Géométrie différentielle

Antoine Touzé

12 décembre 2024

Table des matières

Références

[Laf] J. Lafontaine, introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences.

▷ Le livre de Lafontaine est la référence principale pour la majorité du cours. D'autres références seront utilisées plus ponctuellement (pour certaines parties du cours, pour les exercices. . .), la liste cidessous sera complétée au fur et à mesure du cours.

***

[Bre] G. E. Bredon, Topology and geometry, Graduate text in mathematics 139, Springer.
Le livre de Bredon est un référence pour la topologie algébrique avec un penchant pour la géométrie différentielle. Il couvre la totalité du cours, et bien plus.

[BT] R. Bott, L. Tu, Differential forms in algebraic topology, Graduate text in mathematics 82, Springer.
Le livre de Bott et Tu est un excellent livre avancé sur les formes différentielles. Ce livre est une référence pour la section 6 du cours.

[FT] Y. Félix, D. Tanré, Topologie algébrique, Dunod.
Le livre de Félix Tanré en traite pas de géométrie différentielle, mais c'est une excellente référence élémentaire pour mieux comprendre les espaces topologiques sous-jacents (groupe fondamental, revêtements,. . .). On l'utilise notamment dans la section 3.5, et c'est une référence pour l'algèbre homologique développée dans la section 6.2.

[G] C. Godbillon, Elements de topologie algébrique, Hermann.
Le livre de Godbillon est un classique sur le groupe fondamental, les revêtements et la cohomologie de De Rham.

[GT] S. Gonnord, N. Tosel, Calcul différentiel, Ellipses.
Le livre de Gonnord et Tosel est un livre d'exercices qui peuvent servir de développements à l'agrégation. Il contient des démonstrations élémentaires de certains résultats très utiles et difficiles à trouver dans la littérature.

1 Rappels de calcul différentiel

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application.

A. Différentiabilité. L'application f est dite *différentiable en* $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application $\mathbb{R}$-lineaire $L : E \to F$ telle que l'on ait pour tout h dans une boule ouverte $B(0, r) \subset E$ assez petite

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \epsilon(h)$$

où $\epsilon : B(0, r) \to F$ vérifie $\epsilon(h)/||h|| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. L'application f est dite *différentiable sur* $\mathcal{U}$ si elle est différentiable en tout $a \in \mathcal{U}$.

Si f est différentiable, l'application linéaire L est unique. On l'appelle la *différentielle de* f *en* a et on la notera $D_a f$, ou parfois df_a si $F = \mathbb{R}$.

Remarques 1.1. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, la notion de différentiabilité et l'application différentielle $D_a f$ ne dépendent pas du choix de la norme sur E et F.

Exemples 1.2.

1. Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a, et $D_a f(h) = f'(a)h$.
2. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors f est différentiable sur E, et $D_a f = f$.
3. L'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto X^2$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et $D_A f(H) = AH + HA$.
4. Si on a deux applications composables $g : \mathcal{V} \subset F \to G$ et $f : \mathcal{U} \subset E \to F$ telles que f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D_a(g \circ f) = D_{f(a)} g \circ D_a f$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, on note $(f_i)_{1 \le i \le p}$ les composantes de f. Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles des f_i en a existent, et la matrice de $D_a f$ dans les bases canoniques est :

$$[D_a f]_{\mathrm{Bcan},\mathrm{Bcan}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right] .$$

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, on note $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application linéaire qui renvoie la i-ème coordonnée d'un vecteur. Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent et :

$$df_a = \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i .$$

B. Applications de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$.

L'application f est dite *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ lorsque ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$. Elle est dite de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ ou *lisse* lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

La relation importante avec la différentiabilité est que si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ pour $k \geq 1$, alors f est différentiable.

Exemples 1.3.
1. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lisse.
2. Plus généralement, une application $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^p$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses k variables est lisse.
3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme à n variables, alors f est lisse.
4. Si $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est un polynôme de matrices, c'est à dire si $f(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, alors f est lisse.
5. Plus généralement, si $\sum a_i x^i$ est une série entière convergente sur $\mathbb{R}$, alors $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par $f(X) = \sum a_i X^i$ est lisse.
6. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1.4. Notre définition d'application $\mathcal{C}^k$ suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie quelconques, alors il existe des isomorphismes linéaires $\phi : E \simeq \mathbb{R}^n$ et $\psi : F \simeq \mathbb{R}^p$, et on dit que f est $\mathcal{C}^k$ si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$. Cette définition ne dépend pas du choix de ϕ et ψ à cause des points 1) et 6) de l'exemple 1.3.

C. Le lemme de Sard. On rappelle le phénomène des courbes de Peano.

Théorème 1.5 (Peano)**.** *Pour tout $n \geq 1$, il existe une application continue surjective $\gamma : [0,1] \to [0,1]^n$.*

Le résultat suivant est un cas facile du lemme de Sard. Il montre que le calcul différentiel permet de maintenir à distance les "monstres de Peano".

Proposition 1.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$. Si E est un sous-ensemble négligeable de $\mathcal{U}$, alors $f(E)$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire 1.7 (Cas facile du lemme de Sard)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p > n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^1$. L'image de f est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^p$.*

D. Difféomorphismes. On considère des ouverts $\mathcal{U} \subset E$ et $\mathcal{V} \subset F$. Un *difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$* est une application bijective $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ telle que ϕ est $\mathcal{C}^k$ et ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1.8. Les difféomorphismes sont des "changements de variables". Composer une application f de classe $\mathcal{C}^k$ par des difféomorphismes $\mathcal{C}^k$ n'altère pas les propriétés de f : du point de vue du calcul différentiel théorique, il n'y a pas de différence entre $\psi \circ f \circ \phi$ et f. *Mais* si on utilise des changements ψ et ϕ de variable bien choisis, l'application $\psi \circ f \circ \phi$ peut être en pratique radicalement plus facile à étudier que f, notamment lorsqu'il s'agit de faire des calculs explicites. Voir par exemple le paragraphe F.

Exemple 1.9. Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne $||\cdot||$. L'application $\phi : \mathbb{R}^n \to B$ donnée par

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + ||x||^2}}$$

est un difféomorphisme lisse [1]. (En effet ϕ est lisse, elle est bijective d'inverse $\phi^{-1}(y) = y/\sqrt{1 - ||y||^2}$ lisse.)

Remarques 1.10. 1. Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme alors $D_a\phi$ est inversible pour tout $a \in \mathcal{U}$ (d'inverse $D_{\phi(a)}\phi^{-1}$). En particulier E et F ont même dimension. On peut se servir de cette observation pour voir qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$.

2. Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme, alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont homéomorphes, c'est-à-dire qu'ils sont 'identiques' en tant qu'espaces topologiques. Ceci implique qu'ils ont même nombre de composantes connexes, mêmes groupes fondamentaux, etc. On peut se servir de cette observation pour voir qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, ou de difféomorphisme $\phi :]-2, 0[\cup]3, 4[\to \mathbb{R}$.

On dispose d'une variante locale de la notion de difféomorphisme. Soit $a \in \mathcal{U}$. On dit que $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a* lorsqu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_a$ de a contenu dans $\mathcal{U}$, et un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{f(a)}$ de $f(a)$ tels que $\phi : \mathcal{U}_a \to \mathcal{V}_{f(a)}$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^k$.

Le théorème fondamental suivant donne un critère algébrique simple et pratique pour vérifier qu'une application est un difféomorphisme local.

Théorème 1.11 (Inversion locale)**.** *Soit $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a $\Leftrightarrow$ $D_a\phi$ est inversible.*

Corollaire 1.12 (Inversion globale)**.** *Soit $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. On remarque que l'expression de ϕ n'est pas lisse si on remplace la norme euclidienne par la norme infinie (par exemple). Il est possible de démontrer que pour n'importe quelle norme, la boule unité ouverte est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, mais la construction du difféomorphisme suit une autre stratégie, qui n'utilise pas la norme ! Voir [GT, Partie I, Chap. 2, Exercice 4, page 60] pour la démonstration.

1. *ϕ est une bijection,*
2. *$D_a\phi$ est inversible pour tout $a \in \mathcal{U}$.*

Exemple 1.13. L'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en tout point $a \in \mathbb{C}^*$ (c'est facile à montrer avec le théorème d'inversion locale), mais n'est pas un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, car ce n'est pas une bijection. Plus généralement, nous verrons que les revêtements $\mathcal{C}^k$ non triviaux fournissent des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes locaux qui ne sont pas des difféomorphismes.

E. Propriétés locales vs propriétés globales. On peut s'intéresser aux propriétés locales d'une fonction (= qui ne dépendent que de la définition de la fonction au voisinage d'un point) ou aux propriétés globales (= qui ne peuvent pas se vérifier en faisant une étude au voisinage de chaque point).

exemples de props locales	exemples de props globales
f est différentiable	f est injective
f est $\mathcal{C}^k$	f est surjective
f est un $\mathcal{C}^k$-difféo local en a	f est un $\mathcal{C}^k$-difféo
f est une application ouverte	l'image de f est connexe

L'étude des propriétés locales et celle des propriétés globales procèdent généralement de méthodes assez différentes.

Les énoncés relatifs aux propriétés locales sont parfois un peu lourds à écrire (il faut spécifier des tas d'ouverts et de voisinages convenablement emboîtés les uns dans les autres...). Le résultat suivant permet parfois d'écrire ces énoncés de manière un peu plus légère, en remplaçant une fonction f définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ par une fonction g définie sur tout $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.14. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^k$, et $a \in \mathcal{U}$. Il existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que f et g sont égales au voisinage de a.*

La démonstration de cette proposition repose sur l'existence de "fonctions plateau", qui nous seront utiles en bien d'autres occasions.

Lemme 1.15. *Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et soit $r_1 < r_2$ deux réels strictement positifs. Il existe une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ lisse telle que*

1. *$\chi(x) = 1$ si et seulement si $||x|| \leq r_1$,*
2. *$\chi(x) = 0$ si et seulement si $||x|| \geq r_2$,*
3. *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \chi(tx) \end{array}$ est décroissante.*

F. Description locale des fonctions différentiables. A quoi ressemble localement une fonction différentiable (à changement de variables près) ? Les résultats suivants répondent très partiellement à cette question. Quitte à faire une translation au départ et à l'arrivée, on peut se ramener à étudier les fonctions différentiables f définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et telles que $f(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Dans la suite du paragraphe D, on considère donc un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, telle que $f(0) = 0$.

Lemme 1.16 (Lemme d'immersion)**.** *On a équivalence entre :*

(i) $D_0 f$ *injective*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme local en* 0 *:* $\phi : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(\phi \circ f)(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} .$$

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une *immersion* lorsque $D_a f$ est injective pour tout $a \in \mathcal{U}$.

Il est clair qu'une application linéaire injective est une immersion. Le lemme d'immersion montre donc que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une immersion au voisinage de 0 si et seulement si $D_0 f$ est injective. (Comme dans le théorème d'inversion locale, un information sur la différentielle de f en un seul point donne une information sur f sur tout un voisinage de ce point !)

Lemme 1.17 (Lemme de submersion)**.** *On a équivalence entre :*

(i) $D_0 f$ *surjective*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme local en* 0 *:* $\phi : (\mathcal{U}', 0) \to (\mathcal{U}, 0)$ *tel que pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(f \circ \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p) .$$

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une *submersion* lorsque $D_a f$ est surjective pour tout $a \in \mathcal{U}$. Le lemme de submersion montre que f est une submersion au voisinage de 0 et et seulement si $D_0 f$ est surjective.

On remarquera que $D_0 f$ injective (resp. surjective) implique que $D_a f$ injective (resp. surjective) pour a au voisinage de 0. Les lemmes d'immersion et de submersion décrivent donc des applications localement de rang maximal. Le théorème suivant décrit plus généralement les applications qui sont localement de rang constant.

Théorème 1.18 (Rang constant)**.** *Soit* $r \geq 0$*. On a équivalence entre :*

(i) $\mathrm{rg} D_a f = r$ *au voisinage de* 0*.*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en 0 *:* $\phi_1 : (\mathcal{U}', 0) \to (\mathcal{U}, 0)$ *et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local* $\phi_2 : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *tels que pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(\phi_2 \circ f \circ \phi_1)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)\ .$$

1.1 Exercices du chapitre 1

Exercice 1. Montrez que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est lisse. Calculez la différentielle $D_A \det$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ une série entière réelle à coefficients $a_k \geq 0$, de rayon de convergence $\rho > 0$.

1. Soit $A_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite de matrices telle que $||A_k||_\infty \leq a_k$ pour tout k. Montrez que

$$\begin{array}{cccc} f: & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & \sum_{k\geq 0} A_k X^k \end{array}$$

   est une fonction lisse sur l'ouvert $\{X \in M_n(\mathbb{R})\,,\, ||X||_\infty < \rho/n\}$, et calculez sa différentielle.

2. Montrez que l'exponentielle de matrices est une fonction lisse sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculez sa différentielle.

Exercice 3. Un théorème de Whitney [2]. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}+$ telle que $F = f^{-1}\{0\}$ (c'est un théorème de Whitney).

1. Montrez l'existence de f lorsque $F = \mathbb{R}^n$. Dans la suite de l'exercice on suppose $F \neq \mathbb{R}^n$.
2. Montrez qu'il existe une famille dénombrable de boules euclidiennes ouvertes B_i telles que $F = \bigcap_{i\geq 0} \mathbb{R}^n \setminus B_i$.
3. Construire pour chaque B_i une application lisse $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}+$ telle que ϕ_i s'annule exactement sur $\mathbb{R}^n \setminus B_i$.
4. Construire f à partir des ϕ_i.
   [Indication : on posera $f = \sum_{i\geq 0} a_i \phi_i$ pour des a_i bien choisis.]

Exercice 4. Un lemme de Hadamard [3]. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à 0, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Montrez qu'il existe des applications $h_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{U}$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{1\leq j\leq n} x_j h_j(x)\ .$$

[Indication : on a $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt$, calculez ensuite $\frac{d}{dt} f(tx)$ à l'aide de la règle de la chaîne.]

Exercice 5. Construisez un difféomorphisme explicite entre le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et le pavé ouvert $]0,1[\times]0,1[$.

2. Voir [GT] Partie I, Chap 1, Exercice 21 pour la correction.
3. Voir [Laf] chap. III, Lemme 14 pour la correction.

Exercice 6. Montrez que l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféo local en chaque point $a \in \mathbb{C}$. Existe-t-il des difféomorphismes $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$?
[Indication : utilisez le groupe fondamental (cf le cours de topologie algébrique), ou l'indice d'un lacet (cf. le cours d'analyse complexe).]

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

A partir de maintenant, toutes nos applications différentiables seront lisses, sauf mention du contraire. En particulier, on dira simplement immersion, submersion, difféomorphisme à la place de immersion lisse, submersion lisse, difféomorphisme lisse.

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de dimension p* de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tel que

$$\phi(\mathcal{U} \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Remarque 2.2. L'ensemble vide n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (et ne sera pas non plus une variété abstraite au sens du chapitre suivant).

Exemples 2.3. Les sous-variétés de dimension 0 sont exactement les sous-ensembles de points isolés de $\mathbb{R}^n$, les sous-variétés de dimension n sont exactement les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4. *Soit M une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.*
2. *Pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a et une submersion $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que*
$$M \cap \mathcal{U} = g^{-1}(0) \ .$$
3. *Pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et une immersion $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui induit un homéomorphisme*
$$h : \Omega \xrightarrow{\simeq} M \cap \mathcal{U}.$$
4. *Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a, un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et application lisse $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que, après permutation éventuelle des coordonnées :*
$$M \cap \mathcal{U} = \mathrm{Graphe}(f).$$

Définition 2.5. Une application h comme dans la condition *3.* du théorème précédent s'appelle une *paramétrisation de M* autour de a, une application g comme dans la condition *2.* est une *équation de M* autour de a.

Exemple 2.6. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application lisse telle que pour tout $a \in \mathcal{U}$ le vecteur gradient

$$\mathrm{grad} f_a := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

est non nul, alors pour tout $b \in \mathrm{Im} f$, l'ensemble de niveau $f^{-1}(b)$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, la sphère euclidienne unité $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ ||x|| = 1\}$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.7. Si N est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^m$ et M est une sous-variété de dimension q de $\mathbb{R}^m$ alors $N \times M$ est une sous-variété de dimension $p+q$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

En particulier, le tore $T^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ , \ |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{C}^n$.

Exemple 2.8. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.9. L'image de l'application lisse

$$\begin{array}{cccc} \gamma : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{2}{\pi}\arctan(t)\exp(it) \end{array}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. (Cette sous-variété est une "spirale qui s'enroule le long du cercle unité", et on remarquera en particulier que ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$).

2.2 Espace tangent

Définition 2.10. Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Une *courbe lisse de M* est une application lisse $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ dont l'image est contenue dans M. Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent à M en a* s'il existe une courbe lisse $\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\to M$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Proposition 2.11. *L'ensemble des vecteurs tangents en a à M forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, noté T_aM.*

Proposition 2.12. *Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$, et $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de a.*

(1) Si $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une submersion telle que $M \cap \mathcal{U} = g^{-1}(0)$, alors

$$T_aM = \mathrm{Ker}\, D_a g.$$

(2) Si $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une immersion qui induit un homéomorphisme $\Omega \simeq M \cap \mathcal{U}$, alors

$$T_aM = \mathrm{Im}\, D_{h^{-1}(a)} h.$$

Exemple 2.13. Soit $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dont le gradient ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, et soit M la sous-variété de niveau de f passant par a (c'est-à-dire $M = f^{-1}(f(a))$). Alors T_aM est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathrm{grad} f_a$ (pour le produit scalaire canonique).

Exemple 2.14. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors

$$T_{(a_1,a_2)}M \times N = T_{a_1}M \times T_{a_2}N.$$

Exemple 2.15. Pour toute matrice orthogonale A on a

$$T_AO_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ {}^tAM + {}^tMA = 0\}.$$

2.3 Fonctions différentiables entre sous-variétés

Définition 2.16. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : M \to N$ est dite *lisse* sur M lorsque pour tout $a \in M$ il existe un ouvert $\mathcal{U}_a$ de $\mathbb{R}^m$ contenant a, et une application lisse [4] $\widetilde{f_a} : \mathcal{U}_a \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\widetilde{f_a}(x) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{U}_a \cap M$. L'application $f : M \to N$ est un *difféomorphisme* si c'est une bijection lisse d'inverse lisse.

Remarques 2.17. 1. Si $M = \mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $N = \mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est lisse au sens de la définition précédente si et seulement si elle est lisse au sens du calcul différentiel usuel (section 1).

2. Si $M = \mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ alors $f : \mathcal{U} \to N$ est lisse au sens de la définition précédente si et seulement si l'application $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)$ est lisse. En particulier la définition précédente est en accord avec la définition de courbe lisse (voir la définition 2.10.)
3. Si M est une sous-variété de dimension 0, alors toute fonction $f : M \to N$ est lisse. En particulier, les difféomorphismes entre entre sous-variétés de dimension 0 sont exactement les bijections.

Proposition 2.18. *Si $f : M \to N$ est lisse, alors pour toute courbe lisse $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, l'application $f \circ \gamma$ est une courbe lisse de N. L'application suivante est bien définie et linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} T_af : & T_aM & \to & T_{f(a)}N \\ & \gamma'(0) & \mapsto & (f \circ \gamma)'(0) \end{array} .$$

Exemple 2.19. Si $f : M \to N$ est la restriction d'une application lisse $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, alors f est lisse et pour tout $a \in M$, $D_a\overline{f}$ se restreint en une application $D_a\overline{f} : T_aM \to T_{f(a)}N$ qui n'est autre que T_af.

4. au sens du calcul différentiel usuel !

Proposition 2.20. *La composée d'applications lisses est lisse, et*

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_a f \ .$$

Le théorème d'inversion globale s'étend aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.21. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : M \to N$ est un difféomorphisme si et seulement si c'est une bijection lisse, telle que $T_a f$ inversible pour tout $a \in M$.*

Exemple 2.22. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Alors $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation de M si et seulement si $h : \Omega \to \mathcal{U} \cap M$ est un difféomorphisme.

2.4 Cartes d'une sous-variété

Si M est une sous-variété de dimension n, une *carte de M de domaine $\mathcal{U}$* est un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \Omega$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les inverses des paramétrisations de M sont des cartes de M, dont les domaines recouvrent M. Cet ensemble de cartes est appelé *l'atlas canonique de M*. On peut utiliser les cartes de l'atlas canonique pour caractériser les applications lisses entre variétés en termes d'applications lisses entre sous-variétés de $\mathbb{R}^n$:

Proposition 2.23. *Soit $f : M \to N$ une fonction entre sous-variétés. La fonction f est lisse si et seulement si pour tout $a \in M$ on peut trouver une carte ϕ_1 de M dont le domaine $\mathcal{U}$ contient a, et une carte ϕ_2 de N dont le domaine $\mathcal{V}$ contient $f(a)$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et telles que $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ soit lisse.*

2.5 Exercices du chapitre 2

Exercice 7. Courbes.

1. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue injective. On suppose que γ est lisse de dérivée non nulle sur $]a,b[$. Montrez que $\gamma(]a,b[)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\gamma :]-1,2[\to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $\gamma(t) = (t^2, t-t^3)$. Montrez que γ est injective, lisse de dérivée non nulle, mais que $\gamma(]-1,2[)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Intersection de sous-variétés.

1. Montrez que la demi-droite $]-\infty,0] \times \{0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.
2. En déduire que pour $n \geq 2$ l'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

   [Indication : considérer les sous-variétés $M_1 = \mathrm{Graphe}(f)$ et $M_2 = \mathrm{Graphe}(-f)$ où f est une application lisse bien choisie.]
3. Que se passe-t-il pour l'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^1$?

Exercice 9. Transversalité. Soit M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives p et q. On suppose que $M \cap N \neq \emptyset$, et que pour tout $a \in M \cap N$ on a[5] $T_aM + T_aN = \mathbb{R}^n$. Montrez que $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p+q-n$.

[Indication : montrez que si $g_M : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une équation de M autour de a, et $g_N : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-q}$ est une équation de N autour de a, alors $(g_M, g_N) : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{n-q}$ est une equation de $M \cap N$ autour de a.]

Exercice 10. Groupe unitaire. Vérifiez que le groupe unitaire $U_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$. Précisez sa dimension et l'espace tangent en I.

Exercice 11. Fibré tangent. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrez que l'ensemble TM des couples (x,v) où $x \in M$ et v est un vecteur tangent à x forme une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dont on donnera la dimension. Montrez que l'application $p : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ est une submersion lisse.
2. Montrez que l'ensemble TUM des couples (x,v) où $x \in M$ et v est un vecteur tangent à x et de norme 1 forme une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dont on donnera la dimension. Montrez que l'application $p_u : TUM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ est une submersion lisse.

5. Si deux variétés satisfont cette condition sur les espaces tangents, on dit qu'elles sont en "position transverse".

3. Montrez que si M est compacte alors TUM est compacte, mais que TM n'est jamais compacte.

(L'application $p : TM \to M$ s'appelle le "fibré tangent" de M, et l'application $p_u : TUM \to M$ s'appelle "fibré tangent unitaire".)

Exercice 12. Solutions d'équations de rang constant. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une fonction lisse telle que le rang de $D_x g$ ne dépend pas de $x \in \mathcal{U}$.

Montrez que si $S := g^{-1}(b) \neq \emptyset$, alors S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Donnez la dimension de S et décrivez l'espace tangent $T_a S$ pour $a \in S$ en fonction de g.

[Indication : utilisez le théorème du rang constant !]

Exercice 13. Le théorème des extremas liés. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ des applications lisses. On suppose $Z := g^{-1}(0) \neq \emptyset$, et on cherche les extremas locaux de f sur l'ensemble Z.

On suppose que $D_z g$ est de rang p pour tout $z \in Z$.

1. Montrez que Z est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit a un point de Z en lequel f présente un extremum local.
   (a) Soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ une courbe lisse de Z telle que $\gamma(0) = a$. Montrez que $(f \circ \gamma)'(0) = 0$.
   (b) En déduire que $D_a f$ s'annule sur $T_a Z$.
   (c) En déduire que $\ker D_a g \subset \ker D_a f$.

Remarques :

1) Si on note $(g_1, \ldots, g_p)$ les fonctions coordonnées de g la dernière question est équivalente à montrer que la forme linéaire $D_a f$ est combinaison linéaire des formes linéaires $D_a g_i$. Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les "multiplicateurs de Lagrange".

2) En utilisant l'exercice sur le rang constant, on voit qu'on peut remplacer l'hypothèse sur les $D_z g$ par l'hypothèse plus faible : "on suppose qu'il existe $p \geq r \geq 0$ tel que $D_z g$ est de rang r pour tout z sur un voisinage de Z".

Exercice 14. Projections stéréographiques. Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la norme euclidienne. Notons $N = (1, 0, \ldots, 0)$ son pôle nord, $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ son pôle sud. La projection stéréographique de pôle nord p_N et la projection stéréographique de pôle sud p_S sont les applications (prendre $X = N$ ou S, et $\epsilon_X = -1$ si $X = N$ et $+1$ si $X = S$) :

$$p_X : \begin{array}{ccc} S^n \setminus \{X\} & \to & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \dfrac{1}{1 + \epsilon_X x_0}(x_1, \ldots, x_n) \end{array} .$$

Montrez que ces projections stéréographiques sont des cartes de S^n.

3 Variétés différentielles "abstraites"

3.1 Variétés topologiques

Définition 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *variété topologique de dimension n* est un espace topologique séparé et σ-compact [6], localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarques 3.2. 1. La séparation évite les aberrations du type "droite à deux origines".

En détail, la droite à deux origines est l'espace topologique D_2 obtenu comme quotient de la réunion disjointe $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ de deux copies de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie un élément non nul $x \in \mathbb{R}^*$ dans la première copie de $\mathbb{R}$ au même élément $x \in \mathbb{R}^*$, dans la seconde copie. Ensemblistement, $D_2 = \mathbb{R}^* \cup \{0\} \cup \{0\}$. Par définition de la topologie quotient, les sous-ensembles $D_2 \setminus \{0\}$ et $D_2 \setminus \{0\}$ sont des ouverts de D_2 et la projection quotient : $p : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \to D_2$ induit des homéomorphismes : $\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} D_2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} D_2 \setminus \{0\}$. Ainsi D_2 est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$, mais n'est pas séparée (tout voisinage ouvert de 0 rencontre un voisinage ouvert de 0).

2. La σ-compacité éviter les aberrations du type "longue droite".

En détail, on peut munir le produit $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$ de l'ordre lexicographique et de la topologie associée [7]. Alors $L = [0, +\infty[\times[0, +\infty[\setminus \{(0, 0)\}$ est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à $\mathbb{R}$, mais il n'est pas σ-compact. Il faut l'imaginer comme une mise bout-à-bout d'un ensemble non dénombrable de copies de $]0, +\infty[$. Il n'existe pas d'application continue surjective $f : \mathbb{R} \to L$.

Exemples 3.3. 1. Les variétés topologiques de dimension 0 sont exactement les ensembles finis ou dénombrables, munis de la topologie discrète.

2. Une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ est une variété topologique.
3. Le graphe d'une fonction continue : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une variété topologique (par exemple le graphe de $x \mapsto |x| \ldots$)

Les variétés topologiques possèdent des propriétés topologiques remarquables, par exemple des propriétés de connexité sympathiques.

Proposition 3.4. *Soit M une variété topologique de dimension n.*

1. *$\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de M $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs.*
2. *Si $n \geq 2$ et $x \in M$ alors M connexe $\Leftrightarrow$ $M \setminus \{x\}$ connexe.*
3. *Les composantes connexes de M sont ouvertes et fermées dans M.*
4. *Si M est compacte, elle a un nombre fini de composantes connexes.*

6. Un espace σ-compact est un espace qui est réunion dénombrable de compacts.
7. La topologie associée à un ensemble ordonné est celle dont les ouverts sont des réunions d'intervalles.

3.2 Variétés différentielles et fonctions lisses

Définition 3.5. Soit M une variété topologique de dimension n. Une *carte de M* est un homéomorphisme ϕ d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M vers un ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$. L'ouvert $\mathcal{U}$ est le *domaine* de la carte, et la carte est souvent notée $(\mathcal{U}, \phi)$. Un *atlas de M* est un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M. Un *atlas lisse* est un atlas de M tel que pour toutes cartes $(\mathcal{U}_1, \phi_1)$ et $(\mathcal{U}_2, \phi_2)$ dont les domaines sont d'intersection non vide, la composée :

$$\phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \xrightarrow[\simeq]{\phi_1^{-1}} \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \xrightarrow[\simeq]{\phi_2} \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

est un difféomorphisme lisse entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.6. Si $\mathcal{A}$ est un atlas lisse de M, une carte ϕ de M est dite *compatible avec l'atlas $\mathcal{A}$* lorsque $\mathcal{A} \cup \{\phi\}$ est encore un atlas lisse. Un atlas lisse est dit *maximal* lorsque pour toute carte ϕ compatible avec $\mathcal{A}$, on a $\phi \in \mathcal{A}$.

Remarque 3.7. Soit $\mathcal{A}$ un atlas lisse, et $\phi : \mathcal{U} \to \Omega$ une carte de $\mathcal{A}$. Alors, pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, la restriction $\phi : \mathcal{V} \to \phi(\mathcal{V})$ est une carte compatible avec $\mathcal{A}$, et pour tout difféomorphisme $\psi : \Omega \to \Omega'$ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ la composée $\psi \circ \phi$ est une carte compatible de $\mathcal{A}$. En particulier, les atlas maximaux son stable par restriction de domaine de carte ou par composition des cartes au but par un difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.8. *Soit M une variété topologique de dimension n. Tout atlas lisse $\mathcal{A}$ de M est contenu dans un unique atlas lisse maximal $\mathcal{A}_{\max}$.*

Définition 3.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *variété différentielle de dimension n* est une variété topologique M de dimension n, munie d'un atlas lisse maximal $\mathcal{A}$.

Exemple 3.10. Une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, munie de son atlas canonique (l'ensemble des homéomorphismes obtenus comme les inverses de paramétrisations lisses de la sous-variété M – c'est un atlas lisse maximal) est une variété différentielle.

Exemple 3.11. Notons $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, x^2 le carré de la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^n$, de sorte que le carré de la norme euclidienne de (x, y) vaut $x^2 + y^2$. Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, son pôle nord est le point $\mathtt{N} = (0, 1)$, son pôle sud est le point $\mathtt{S} = (0, -1)$. On dispose de deux homéomorphismes, les projections stéréographiques, données par

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathtt{N}} : & S^n \setminus \{\mathtt{N}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x}{1-y} \end{array} , \qquad \begin{array}{rccc} \pi_{\mathtt{S}} : & S^n \setminus \{\mathtt{S}\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x}{1+y} \end{array} .$$

Les homéomorphismes réciproques sont donnés par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & S^n \setminus \{\mathtt{N}\} \\ x & \mapsto & \left(\dfrac{2x}{x^2+1}, \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & S^n \setminus \{\mathtt{S}\} \\ x & \mapsto & \left(\dfrac{2x}{x^2+1}, -\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) \end{array} .$$

La composée $\pi_{\mathtt{N}} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ envoie x sur x/x^2, c'est un difféormorphisme lisse d'invers lui-même. Ainsi, si $\mathcal{A} = \{\pi_{\mathtt{N}}, \pi_{\mathtt{S}}\}$, alors $(S^n, \mathcal{A}_{\max})$ est une variété différentielle.

En fait, les formules explicites de $\pi_{\mathtt{N}}^{-1}$ et $\pi_{\mathtt{S}}^{-1}$ montrent que ce sont des paramétrisations de la sous-variété S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Par unicité de l'atlas maximal, $\mathcal{A}_{\max}$ est l'atlas maximal de S^n formé des inverses des paramétrisations de la sous-variété de S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. En d'autres termes, la structure de variété différentielle de S^n définie ici est égale à celle définie dans l'exemple 3.10.

Exemple 3.12. On note $P^n(\mathbb{R})$ l'espace topologique quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$. Cet espace topologique est séparé et compact. Notons $[x_0 : \cdots : x_n] \in P^n(\mathbb{R})$ la classe de $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Alors les sous-ensembles

$$\mathcal{U}_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \,,\, x_i \neq 0\}$$

pour $0 \leq i \leq n$ sont des ouverts de $P^n(\mathbb{R})$ qui recouvrent $P^n(\mathbb{R})$. L'ensemble des applications

$$\begin{array}{rccc} \phi_i : & \mathcal{U}_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x_0 : \cdots : x_n] & \mapsto & \dfrac{1}{x_i}(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{array}$$

forme un atlas lisse $\mathcal{A}$ de $P^n(\mathbb{R})$. La variété différentielle $(P^n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\max})$ s'appelle l'espace projectif réel de dimension n.

Exemple 3.13. Une variété topologique de dimension 0 possède un unique atlas. On convient que l'unique application $\mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^0$ est un difféomorphisme (c'est en accord avec le dernier point de la remarque 2.17), de sorte que cet atlas est un atlas lisse. Vu que c'est le seul atlas disponible, il est automatiquement maximal. Ainsi, toute variété topologique de dimension 0 peut être vue (d'une unique manière) comme une variété différentielle.

Exemple 3.14. Si $(M, \mathcal{A})$ est une variété différentielle de dimension n alors on considère les ouverts $\mathcal{U}$ de M comme des variétés différentielles de dimension n en les munissant de l'atlas lisse maximal $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ constitué des cartes de $\mathcal{A}$ dont le domaine est contenu dans $\mathcal{U}$.

Exemple 3.15. Si $(M_1, \mathcal{A}_1)$ est une variété différentielle de dimension n_1 et $(M_2, \mathcal{A}_2)$ est une variété différentielle de dimension n_2, alors on considère $M_1 \times M_2$ comme une variété différentielle de dimension $n_1 + n_2$ en la munissant de l'atlas lisse maximal contenant toutes les cartes de la forme

$$\phi_1 \times \phi_2 : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \phi_1(\mathcal{U}_1) \times \phi_2(\mathcal{U}_2) \;,$$

où $\phi_1 \in \mathcal{A}_1$ et $\phi_2 \in \mathcal{A}_2$.

En pratique, pour définir une variété différentielle, on procédera comme dans l'exemple 3.12 : on spécifiera une variété topologique M et un atlas lisse $\mathcal{A}$, et la variété différentielle sera le couple $(M, \mathcal{A}_{\max})$.

L'atlas $\mathcal{A}$ sera généralement omis quand on fera référence à une variété différentielle. Ainsi on dira "soit M une variété différentielle, et soit $(\mathcal{U}, \phi)$ une carte de M" plutôt que "soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentielle et soit $(\mathcal{U}, \phi)$ une carte de l'atlas $\mathcal{A}$".

Définition 3.16. Soient M et N deux variétés différentielles. Une application $f : M \to N$ est *lisse* si pour tout $a \in M$ on peut trouver une carte ϕ_1 de M dont le domaine $\mathcal{U}$ contient a, et une carte ϕ_2 de N dont le domaine $\mathcal{V}$ contient $f(a)$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et telles que la composée suivante soit lisse [8] :

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(\mathcal{U}) \to \phi_2(\mathcal{V}) \;.$$

Un *difféomorphisme* entre variétés différentielles est une bijection lisse dont l'inverse est lisse.

Remarque 3.17. Les notions d'applications lisses et de difféomorphismes données dans la définition précédente généralisent aux variétés différentielles quelconques les notions d'applications lisses et de difféomorphismes entre sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (voir la prop. 2.23).

Exemple 3.18. Soit $M = N = S^n$, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lisse. On reprend les notations de l'exemple 3.11. On définit une application $\widehat{f} : S^n \to S^n$ par

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \pi_{\mathtt{N}}^{-1}(f(\pi_{\mathtt{N}}(x))) & \text{si } x \neq \mathtt{N}, \\ \mathtt{N} & \text{si } x = \mathtt{N}. \end{cases}$$

Alors $\widehat{f}$ est lisse en tout point de $S^n \setminus \{\mathtt{N}\}$ car $\pi_{\mathtt{N}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{N}}^{-1} = f$. Et $\widehat{f}$ est lisse sur S^n si et seulement si la composée $\pi_{\mathtt{S}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1}$ est lisse autour de 0.

(a) Supposons $n = 1$. Alors

$$(\pi_{\mathtt{S}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \;, \\ f(1/x)^{-1} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

En particulier, si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $n > 0$, alors $(\pi_{\mathtt{S}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1})(x) = x^n/(a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n)$, donc $\widehat{f}$ est lisse sur S^1.

(b) Supposons $n = 2$. Alors en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et en notant par une barre la conjugaison complexe

$$(\pi_{\mathtt{S}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1})(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \;, \\ \overline{f(1/\overline{z})}^{-1} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

8. au sens usuel du calcul différentiel entre ouverts de $\mathbb{R}^n$!

En particulier, si $f(x) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ est un polynôme de degré $n > 0$, alors $(\pi_{\mathtt{S}} \circ \widehat{f} \circ \pi_{\mathtt{S}}^{-1})(z) = z^n/(\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \cdots + \overline{a_0}z^n)$, donc $\widehat{f}$ est lisse sur S^2.

Exemple 3.19. L'application quotient $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to P^n(\mathbb{R})$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \cdots : x_n]$ est lisse.

Exemple 3.20. Une application $f : M \to N_1 \times N_2$ est lisse si et seulement si ses applications coordonnées sont lisses.

Exemple 3.21. Toute carte $(\mathcal{U}, \phi)$ d'une variété différentielle M est un difféomorphisme de l'ouvert $\mathcal{U}$ sur l'ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.22. *La composée d'applications lisses est lisse.*

3.3 Espace tangent et application tangente

Soit M une variété différentielle et $a \in M$. On note $\mathcal{C}_a(M)$ l'ensemble des courbes lisses $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ telles que $\gamma(0) = a$.

Définition 3.23. On dit que deux courbes γ et μ de $\mathcal{C}_a(M)$ sont *tangentes en a* s'il existe une carte ϕ de M dont le domaine contient a, telle que

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0) .$$

La règle de la chaîne assure que cette définition ne dépend pas du choix de la carte ϕ. La relation de tangence en a est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}_a(M)$, et on note T_aM l'ensemble quotient.

On remarque que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M contenant a on a une identification canonique $T_a\mathcal{U} = T_aM$ qui envoie la classe de $\gamma \in \mathcal{C}_a(\mathcal{U})$ sur la classe de $\gamma \in \mathcal{C}_a(M)$.

Proposition 3.24. *L'ensemble T_aM possède une unique structure d'espace vectoriel, telle que pour toute carte ϕ de domaine $\mathcal{U}$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} T_aM = T_a\mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^n \\ [\gamma] & \mapsto & (\phi \circ \gamma)'(0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel T_aM s'appelle l'espace tangent de M en a.

Proposition 3.25. *Si $f : M \to N$ est une application lisse, alors pour tout $a \in M$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_a(M) & \to & \mathcal{C}_{f(a)}(N) \\ \gamma & \mapsto & f \circ \gamma \end{array}$$

passe au quotient en une application linéaire $T_af : T_aM \to T_aN$ qui est appelée l'application tangente de f en a.

Proposition 3.26. *L'application tangente de la composée d'applications lisses suit la règle de la chaîne :*

$$T_a(g \circ f) = (T_{f(a)}g) \circ (T_a f)\ .$$

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_a(M) & \to & \mathbb{R}^N \\ \gamma & \to & \gamma'(0) \end{array}$$

induit un isomorphisme canonique entre l'espace tangent au sens des variétés différentielles et l'espace tangent au sens des sous-variétés. Si $f : M \to N$ est une fonction lisse entre sous-variétés, l'application tangente $T_a f$ au sens des sous-variétés coïncide avec l'application tangente $T_a f$ au sens des variétés différentielles.

Les notions d'espace tangent et d'application tangente développées pour les variétés différentielles généralisent donc les notions développées pour les sous-variétés à la section 2. Toutefois, le cadre abstrait a un parfum un peu différent. En effet, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, on peut "calculer concrètement" T_aM, en donnant une base ou des équations qui l'identifient en tant que sous-espace de $\mathbb{R}^N$. Dans le cadre abstrait, on ne peut pas "calculer concrètement" T_aM (ce n'est pas naturellement un sous-espace d'un R^k).

Dans le cadre abstrait on peut toutefois "calculer concrètement" $T_a f$: $T_aM \to T_{f(a)}N$ de la manière suivante. Si ϕ est une carte explicite de M dont le domaine contient a et ψ une carte explicite de N dont le domaine contient $f(a)$, et si $f : M \to N$ est donnée par une formule explicite, alors on peut calculer par une formule explicite $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, qui est une fonction entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et on peut donc calculer explicitement sa différentielle en $\phi(a)$. On a un diagramme commutatif qui exprime comment la formule explicite obtenue est reliée à l'application tangente abstraite $T_a f$.

$$\begin{array}{ccc} T_aM & \xrightarrow[\simeq]{T_a\phi} & T_a\phi(U) = \mathbb{R}^n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T_a f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_{\phi(a)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1}) = D_{\phi(a)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1})} \\ T_{f(a)}N & \xrightarrow[\simeq]{T_{f(a)}\psi} & T_a\psi(U) = \mathbb{R}^n \end{array}$$

Le théorème d'inversion globale du calcul différentiel se généralise sans difficulté aux variétés différentielles abstraites.

Théorème 3.27. *Soit $f : M \to N$ une bijection lisse entre variétés différentielles. L'application f est un difféomorphisme $\Leftrightarrow$ pour tout $a \in M$, l'application tangente $T_a f$ est inversible.*

3.4 Actions de groupes et variétés quotients

Soit G un groupe agissant sur une variété M. Dans cette section nous allons montrer que sous certaines hypothèses sur l'action, l'espace topologique des orbites M/G possède une structure de variété canonique. La difficulté de l'énoncé est essentiellement topologique.

A. Préliminaires topologiques

Définition 3.28. On dit qu'un groupe G agit *de façon continue* sur un espace topologique X si pour tout $g \in G$ l'application $g \cdot - : X \to X$ est continue. On dit que G agit *proprement* s'il agit de façon continue et si pour tous les compacts K, L de X, l'ensemble suivant est fini :

$$\{g \in G\ ,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}\ .$$

Exemples 3.29.

1. Les actions continues des groupes finis sont propres.
2. L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translations est propre.
3. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^{-n}x, 2^n y)$ n'est pas propre.

Proposition 3.30. *Si G agit proprement sur un espace X séparé et localement compact, alors le quotient X/G est séparé et localement compact, et la projection $p : X \to X/G$ est ouverte.*

Sous une hypothèse supplémentaire sur l'action, la projection quotient $X \to X/G$ va se comporter encore plus joliment : ce sera un revêtement topologique au sens de la définition suivante.

Définition 3.31. Un *revêtement topologique* est une application continue $p : X \to B$ telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_b$ de b tel que l'image réciproque de $\mathcal{U}_b$ est une réunion disjointe d'ouverts de X

$$p^{-1}(\mathcal{U}_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$$

et telle que les restrictions $p : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_b$ soient des homéomorphismes.

Exemples 3.32.

1. Si F est un espace topologique discret, la projection $F \times B \to B$ est un revêtement topologique, appelé *revêtement trivial.*
2. L'application exponentielle induit un revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$.
3. L'application exponentielle induit un revêtement $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$.
4. L'application puissance n-ème induit un revêtement $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$.
5. Un produit fini de revêtements est un revêtements. Ainsi l'application $\mathbb{R}^n \to (S^1)^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n})$ est un revêtement.

Définition 3.33. On dit qu'un groupe G agit *librement* sur X si tous les stabilisateurs de l'action sont triviaux, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$ et pour tout $g \in G$ on a :

$$(gx = x) \;\Rightarrow\; (g = 1) \;.$$

La proposition suivante complémente la proposition 3.30 lorsque l'action est libre.

Proposition 3.34. *Soit G un groupe agissant proprement et librement sur un espace X localement compact. Alors la projection $p : X \to X/G$ est un revêtement.*

B. Actions de groupes lisses et quotients

Définition 3.35. Un groupe G agit *de façon lisse* sur une variété différentielle M si pour tout $g \in G$ l'application $g \cdot - : M \to M$ est lisse.

Définition 3.36. Un *revêtement lisse* est une application lisse $p : M \to B$ telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_b$ de b tel que l'image réciproque de $\mathcal{U}_b$ est une réunion disjointe d'ouverts de M

$$p^{-1}(\mathcal{U}_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$$

et telle que les restrictions $p : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_b$ soient des difféomorphismes.

Exemples 3.37. Les exemples 3.32 sont en fait des exemples de revêtements lisses (dans le premier il faut bien sûr supposer B une variété différentielle.

Remarque 3.38. Si $p : M \to B$ est un revêtement topologique entre variétés lisses, et si p est lisse, alors p n'est pas nécessairement un revêtement lisse. Le problème vient du fait qu'il existe des homéomorphismes lisses qui ne sont pas des difféomorphismes (par exemple l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$).

Le théorème suivant assure l'existence des variétés différentielles quotient.

Théorème 3.39. *Soit M une variété lisse, et soit G un groupe agissant de façon lisse, propre et libre. Alors il existe un unique atlas lisse maximal sur M/G tel que la projection $p : M \to M/G$ soit un revêtement lisse.*

Corollaire 3.40. *Une fonction $f : M/G \to N$ est lisse si et seulement si la composée $f \circ p$ est lisse.*

Les variétés quotient permettent de revisiter certains exemples de variétés différentielles, et d'en donner de nouveaux.

Exemple 3.41 (Tores)**.** Le groupe additif $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ possède une structure de variété différentielle, difféomorphe au tore $T^n = (S^1)^n$.

Exemple 3.42 (Espaces projectifs)**.** Le groupe cyclique C_2 à deux éléments agit sur S^n par antipodie (c'est-à-dire que le générateur σ de C_2 agit comme l'application antipode $x \mapsto -x$ sur S^n). Le quotient S^n/C_2 possède une structure de variété différentielle, difféomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.43 (Ruban de Moebius)**.** Le groupe cyclique C_2 à deux éléments agit par antipodie sur la "bande équatoriale" BE de S^2 :

$$\mathrm{BE} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, |x_1| < \frac{1}{2} \right\} .$$

Le quotient a une structure de variété différentielle, on l'appelle le ruban de Moebius. Le ruban de Moebius est difféomorphe à un ouvert du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Exemple 3.44 (Variétés lenticulaires)**.** Soient p et q deux entiers premiers entre eux, soit $\zeta = e^{2i\pi/p}$, et soit C_p le groupe cyclique à p éléments et σ un générateur. Alors C_p agit sur

$$S^3 = \{(z_1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \ , |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

par la formule

$$\sigma \cdot (z_1, z_2) = (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

Le quotient S^3/C_p possède une structure de variété différentielle, cette variété est notée $L(p, q)$ et appelée la variété lenticulaire (de paramètres (p, q)). Notons que $L(p, q_1) = L(p, q_2)$ si $q_1 = q_2 \mod p$, et que $L(2, 1) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Voir l'exercice 23 pour des identifications supplémentaires entre variétés lenticulaire.

3.5 Complément : π_1 des variétés quotients

Nous rappelons maintenant quelques morceaux du cours de topologie algébrique sur le groupe fondamental et les revêtements (module de M1). Les résultats de cette section sont importants et permettent de mieux comprendre la topologie des variétés quotient. Toutefois, nous les donnons ici à titre de "complément culturel" : nous en ferons une utilisation relativement anecdotique. Ces résultats ne seront pas démontrés dans le cours, on renvoie à [FT, Chap 1, 3, 4] pour les détails des démonstrations et pour des informations complémentaires.

A. Définition du groupe fondamental. Soit X un espace topologique et $x \in X$. Un *lacet de X de point de base x* est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. On note $\Omega_x(X)$ l'ensemble des lacets de X de point de base x.

Deux lacets γ_0 et γ_1 dans $\Omega_x(X)$ sont dits *homotopes par une homotopie pointée* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que

(i) $H(0,t) = \gamma_0(t)$ pour tout $t \in [0,1]$,

(ii) $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$,

(iii) $H(s,0) = H(s,1) = x$ pour tout $s \in [0,1]$.

L'application H s'appelle une *homotopie pointée*[9]. En d'autres termes, H est une déformation de paramètre s, qui permet de passer de manière continue de γ_0 à γ_1. La dernière condition assure que tout au long de la déformation, l'application $\gamma_s : [0,1] \to X$, $t \mapsto H(s,t)$ reste bien un élément de $\Omega_x(X)$.

La relation d'homotopie pointée est une relation d'équivalence sur $\Omega_x(X)$. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble quotient :

$$\pi_1(X,x) = \Omega_x(X)/\sim$$

Notons $[\gamma] \in \pi_(X,x)$ la classe d'un lacet $\gamma \in \Omega_x(X)$. L'ensemble $\pi_1(X,x)$ est muni d'une structure de groupe par l'opération $[\gamma][\mu] := [\gamma\mu]$, où $\gamma\mu$ est le lacet obtenu en parcourant à la suite les lacets γ et μ, plus précisément :

$$(\gamma\mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \mu(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

L'élément neutre est le lacet constant en x : $\epsilon_x : [0,1] \to X$, $t \mapsto x$, l'inverse γ^{-1} d'un lacet γ est le même lacet, mais parcouru à l'envers $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

L'ensemble $\pi_1(X,x)$, muni de cette structure de groupe, s'appelle le groupe fondamental de X (au point x).

B. Propriétés de base du groupe fondamental.

1. **(In)dépendance du point de base.** [FT, Prop 1.14] S'il existe un chemin de X reliant x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, alors les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.

   En particulier, si X est connexe par arcs, le groupe fondamental ne dépend pas du choix du point de base, à isomorphisme près. Dans ce cas, on dit souvent "le groupe fondamental de X" sans préciser le point de base.

9. Le terme "pointée" est là pour rappeler la condition (iii) : le point de base ne bouge pas au cours de la déformation.

2. **Simple connexité.** Un espace X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si son groupe fondamental est trivial (= si c'est un groupe à un élément).

   Ex n°1 : si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à un point x, alors X est simplement connexe. En effet, il est connexe par arcs, et si γ est un lacet de X basé en x alors on obtient une homotopie pointée H entre γ et le lacet constant en x en posant $H(s,t) = sx+(1-s)\gamma(t)$.

   Ex n°2 : les sphères S^n, $n \geq 2$, sont simplement connexes. Voir [FT, Thm 1.36] pour une démonstration topologico-algébrique, ou l'exercice **??** pour une démonstration de géométrie différentielle.

3. **Fonctorialité.** Si $f : X \to Y$ est une application continue, elle induit pour tout $x \in X$ un morphisme de groupes :

$$f_\# : \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(Y,f(x)) \\ [\gamma] & \mapsto & [f\circ\gamma] \end{array} .$$

   En particulier, si f est un homéomorphisme [10], alors $f_\#$ est un isomorphisme d'inverse $(f^{-1})_\#$. Voir la section 6.4 pour plus de développements sur la notion d'homotopie.

C. Groupe fondamental et variétés quotients. Rappelons le théorème 3.39 : si G est un groupe agissant de façon lisse, propre et libre sur une variété différentielle M, alors M/G est une variété et $p : M \to M/G$ est un revêtement lisse.

La théorie des revêtements topologiques est intimement liée au groupe fondamental. Nous énonçons ici deux résultats importants reliant ces notions, que nous formulons dans le cadre des variétés différentielles. Le premier théorème suit de [FT, Thm 4.29 et Prop 4.30].

Théorème 3.45. *si G est un groupe agissant de façon lisse, propre et libre sur une variété différentielle M* **simplement connexe***, alors M/G est connexe par arcs et son groupe fondamental est isomorphe à G.*

Exemples 3.46. S^1 a pour groupe fondamental $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a pour groupe fondamental le groupe cyclique C_2 à deux éléments, $L(p,q)$ a pour groupe fondamental le groupe cyclique C_p à p éléments ...

Le deuxième théorème généralise la construction du logarithme complexe [11]. Plus précisément, on suppose qu'on dispose d'un revêtement lisse

10. Plus généralement, et un peu plus subtilement, si f est une équivalence d'homotopie alors $f_\#$ est un isomorphisme, [FT, Thm 1.17].

11. Si on considère le revêtement lisse $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ donné par l'exponentielle, si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ est l'inclusion, alors l'application $\overline{f}$ est une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$.

$p : M \to B$ et d'une application lisse $f : N \to B$. On prend un point $n \in N$, et un point $m \in M$ tel que $p(m) = f(n) =: b$, et on se demande s'il existe une application lisse $\overline{f} : N \to M$ telle que $\overline{f}(n) = m$. La situation peut être représentée par le diagramme suivant, et $\overline{f}$ est appelé un *relèvement de* f.

$$\begin{tikzcd} & (M,m) \arrow[d, "p"] \\ (N,n) \arrow[ur, dashed, "\exists ? \overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B,b) \end{tikzcd}$$

D'après l'exercice 21 si on trouve une application $\overline{f}$ continue répondant à ce problème, alors elle est automatiquement lisse. Le théorème suivant est donc une conséquence du théorème [FT, Thm 4.10] sur les revêtements topologiques.

Théorème 3.47. *L'application lisse $\overline{f}$ existe si et seulement si l'image du morphisme de groupes $f_\sharp : \pi_1(N,n) \to \pi_1(B,b)$ est contenue dans l'image du morphisme de groupes $p_\sharp : \pi_1(M,m) \to \pi_1(B,b)$. De plus, si $\overline{f}$ existe, elle est unique.*

3.6 Sous-variétés, plongements, submersions

La définition suivante étend la notion de sous-variété de $\mathbb{R}^n$ au cadre des variétés différentielles abstraites.

Définition 3.48. Soit M une variété différentielle de dimension n, et N un sous-ensemble non vide de M. On dit que N est *une sous-variété de M de dimension p* lorsque pour tout $x \in N$, il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ dont le domaine contient x telle que

$$\phi(N \cap \mathcal{U}) = \phi(\mathcal{U}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p) .$$

Si N est une sous-variété de M, alors pour chaque carte $(\mathcal{U}, \phi)$ comme dans la définition, la restriction $\phi : N \cap \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est un homéomorphisme de $N \cap \mathcal{U}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble de ces restrictions forme un atlas lisse sur N, qui fait de N une variété différentielle abstraite de dimension p.

Définition 3.49. Une application lisse $f : N \to M$ est une *immersion* si pour tout $a \in N$, l'application tangente $T_a f$ est injective. Un *plongement* est une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image.

Exemple 3.50. Si N est une sous-variété de M, alors l'inclusion $N \hookrightarrow M$ est un plongement.

La proposition suivante montre que l'exemple 3.50 est, à difféomorphisme près, l'unique exemple de plongement.

Proposition 3.51. *Soit $f : N \to M$ un plongement. Alors l'image $f(N)$ est une sous-variété de M, et f induit un difféomorphisme de N sur $f(N)$.*

Les submersions sont un moyen commode de produire des sous-variétés.

Définition 3.52. Une application lisse $f : M \to L$ est une *submersion* si pour tout $a \in M$, l'application tangente T_af est surjective (injective).

Proposition 3.53. *Soit $f : M \to L$ une submersion. Alors pour tout $b \in L$, l'ensemble de niveau $M_b := f^{-1}(b)$ est une sous-variété de M de dimension* $\dim M - \dim L$*, et pour tout $a \in M_b$ l'espace tangent T_aM_b est égal au noyau de T_af.*

Théorème 3.54 (Whitney)**.** *Toute variété différentielle se plonge dans un espace vectoriel.*

De manière équivalente, toute variété différentielle est isomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Les variétés différentielles abstraites n'apportent finalement pas de nouveaux exemples par rapport aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, mais remarquons que la théorie abstraite est plus souple d'utilisation : par exemple il aurait été bien pénible d'exposer la construction des quotients dans le cadre des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$!

3.7 Partitions de l'unité

Soit $\mathbb{U} = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de M. Un *raffinement* de $\mathbb{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathbb{V} = (\mathcal{V}_\beta)_{\beta\in B}$ tel que pour tout $\beta \in B$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{U}_\alpha$. Un recouvrement ouvert $\mathbb{U}$ est dit *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage B qui n'intersecte non trivialement $\mathcal{U}_\alpha$ pour un nombre fini d'indices α seulement.

Rappelons que le *support* d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est le sous ensemble fermé $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in M\ ,\ f(x) \neq 0\}}$.

Théorème 3.55. *Soit M une variété différentielle.*

1. *Tout recouvrement ouvert de M admet un raffinement qui est localement fini.*
2. *Si $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un recouvrement ouvert localement fini de M alors il existe une famille de fonctions lisses $g_\alpha : M \to [0,1]$ telle que :*
   - *(i) Pour tout $\alpha \in A$,* $\mathrm{supp}(g_\alpha) \subset \mathcal{U}_\alpha$*,*
   - *(ii)* $\sum_{\alpha\in A} g_\alpha = 1$.

Remarque 3.56. Pour tout $x \in M$ la finitude locale du recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ et la condition (i) impliquent que la somme $\sum_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. C'est donc une somme "algébrique".

Les partitions de l'unité sont un outil puissant pour construire des objets globaux à partir d'objets locaux. La proposition suivante est un exemple type de ce genre de situation. Nous donnons la démonstration car c'est un raisonnement standard.

Proposition 3.57. *Soit N une sous-variété de M, qui est fermée dans M. Pour toute fonction lisse $f : N \to \mathbb{R}$ il existe une fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$ dont la restriction à N est égale à f.*

Démonstration.

1. On démontre d'abord le résultat localement : pour tout $x \in N$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ de M et une fonction lisse $F_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $N \cap \mathcal{U}_x$ coïncide avec f.

   Pour montrer ce résultat local, on utilise une carte $(\mathcal{U}_x, \phi_x)$ autour de x, qui redresse la sous-variété N : $\phi_x(N \cap \mathcal{U}_x) = \phi_x(\mathcal{U}_x) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$. Quitte à rétrécir $\mathcal{U}_x$ on peut supposer que $\phi_x(\mathcal{U}_x)$ est de la forme $V \times W$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$ et W un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Trouver une fonction lisse F_x qui étende f à $\mathcal{U}_x$ est alors équivalent à trouver une fonction lisse qui étende $f \circ \phi_x^{-1} : \{0\} \times W \to \mathbb{R}$ à $V \times W$, ce qui est facile à faire (on prend la fonction $(x, y) \mapsto f(\phi_x^{-1}(0, y))$).

2. On utilise alors le théorème des partitions de l'unité pour "recoller les fonctions définies localement".

   Plus précisément, si $x \in M \setminus N$, on choisit un ouvert $\mathcal{U}_x$ contenant x et ne rencontrant pas N (on peut en trouver un car N est un fermé de M), et on pose $F_x := 0 : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$. Avec les ouverts de la première étape, on obtient donc un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_x)_{x \in M}$ de M, qui admet un raffinement $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in A}$ localement fini. Pour chaque indice α, on choisit un x tel que $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{U}_x$ et on note $F_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to \mathbb{R}$ la restriction de F_x à $\mathcal{V}_\alpha$.

   Les F_α ont été définies indépendamment les unes des autres, elles n'ont aucune raison de se recoller convenablement pour former une fonction lisse F. Mais on contourne ce problème à l'aide d'une partition de l'unité $g_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to [0, 1]$ associée au recouvrement $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha \in A}$. On définit d'abord des fonctions lisses :

$$\begin{array}{rccl} \overline{F}_\alpha : & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} g_\alpha(x) F_\alpha(x) & \text{si } x \in \mathcal{V}_\alpha, \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus \operatorname{supp}(g_\alpha). \end{cases} \end{array}$$

   (Les $\overline{F}_\alpha$ sont bien lisses car définies comme la réunion de deux fonctions lisses qui coïncident sur l'intersection de leurs ensembles de définition.) On peut maintenant définir la fonction globale F comme la somme :

$$F := \sum_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha \,.$$

Cette somme est finie au voisinage de chaque $x \in M$ (car le recouvrement formé par les $\mathcal{V}_\alpha$ est localement fini et $\mathrm{supp}(\overline{F}_\alpha) \subset \mathcal{V}_\alpha$) et elle est lisse car localement une somme finie de fonctions lisses. De plus si $x \in N$ alors on a

$$F(x) = \sum_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in A\;,\; x\in\mathcal{V}_\alpha} \overline{F}_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in A\;,\; x\in\mathcal{V}_\alpha} g_\alpha(x)F_\alpha(x)\;.$$

Comme $x \in N \cap \mathcal{V}_\alpha$ on a $F_\alpha(x) = f(x)$, et comme les g_α sont une partition de l'unité on a :

$$F(x) = \sum_{\alpha\in A\;,\; x\in\mathcal{V}_\alpha} g_\alpha(x)f(x) = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha(x)f(x) = f(x)\;.$$

□

Remarque 3.58. Le résultat ne subsiste pas si on ne suppose pas que N est un fermé de M. Par exemple $N = \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est une sous-variété de dimension nulle de $M = \mathbb{R}$, et la fonction $f : N \to \mathbb{R}$ telle que $f(1/n) = n$ ne s'étend pas en une fonction lisse sur M.

3.8 Autour du lemme de Sard

Une partie X d'une variété différentielle M est dite *négligeable* si pour toute carte $(\mathcal{U}, \phi)$ de M, la partie $\phi(\mathcal{U} \cap X)$ est négligeable dans $\mathbb{R}^{\dim M}$. Les sous-ensembles d'une partie négligeable sont négligeables, et les parties négligeables sont stables par réunion dénombrable.

Proposition 3.59 (Lemme de Sard, cas facile)**.** *Soit $f : N \to M$ une fonction lisse. Si $\dim N < \dim M$, l'image de f est négligeable dans M.*

La proposition précédente est un un point clé pour faire fonctionner des arguments de position générale. L'exemple suivant est un modèle élémentaire de ce genre d'argument.

Exemple 3.60. Soit M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ telles que $\dim M + \dim N < n$. Alors pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $||b|| < \epsilon$ et tel que la variété translatée $b + M = \{b + m\;,\; m \in M\}$ ne rencontre pas N. En effet la l'image de la fonction $f : M \times N \to \mathbb{R}^n$, $(m, n) \mapsto m - n$ est de mesure nulle, et le complémentaire de l'image est précisément l'ensemble des vecteurs b tels que $(b+M)\cap N = \emptyset$. Remarquons que la condition sur les dimensions est absolument nécessaire : deux cercles de $\mathbb{R}^2$ ayant une corde commune ne peuvent pas être séparés si on translate l'un des deux par un vecteur trop petit.

Un raisonnement du même type, mais un peu plus sophistiqué, permet de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 3.61. *Pour tout vecteur $v \in S^{n-1}$, on note $p_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur l'hyperplan $v^\perp$. Si $f : M \to \mathbb{R}^n$ est un plongement, on note :*

$$I_f = \{v \in S^{n-1}\ , p_v \circ f \text{ est une immersion } \}\ ,$$
$$P_f = \{v \in S^{n-1}\ , p_v \circ f \text{ est un plongement } \}\ ,$$

Alors I_f est dense dans S^{n-1} dès que $2\dim M < n$, et P_f est dense dans S^{n-1} dès que $2\dim M + 1 < n$.

Corollaire 3.62. *Toute variété différentielle de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et s'immerge dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Remarque 3.63. Whitney a en fait montré, avec des techniques différentes, que toute variété compacte peut se plonger dans $\mathbb{R}^{2n}$. On pourra consulter sur ce sujet le livre de Adachi, Embeddings and immersions. Cette borne est optimale : on ne peut pas plonger $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$, comme nous l'expliquerons à la remarque 5.51.

Proposition 3.64. *Soit $f : M \to \mathbb{R}^n$ un plongement. Soit $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\mathrm{pr}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$.*

Si $2\dim M + 1 < n$ alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe une application linéaire $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $|||a - \mathrm{pr}||| < \epsilon$ et $a \circ f$ est un plongement.

Si $2\dim M < n$ alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe une application linéaire $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $|||a - \mathrm{pr}||| < \epsilon$ et $a \circ f$ est une immersion.

Corollaire 3.65. *Soit M une variété compacte, et considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ muni de la norme infinie (norme de la convergence uniforme). Si $2\dim M \leq k$ alors les immersions sont denses dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, et si $2\dim M + 1 \leq k$ alors les plongements sont denses dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$.*

3.9 Complément : classification des variétés

Une question "naïve" est de classifier les variétés différentielles à difféomorphisme près. Ceci peut être réalisé en dimension 1, où l'on peut montrer que toute variété de dimension 1 est difféomorphe au cercle S^1 ou à la droite réelle $\mathbb{R}$, voir par exemple [Laf, Chap III, thm 55].

Le monde des variétés de dimension 2 est plus riche, mais encore classifiable (au moins en ce qui concerne les variétés compactes). On peut montrer que les surfaces lisses compactes sont caractérisées à difféomorphisme près par deux notions : leur orientabilité (une surface est orientable si et seulement si elle ne contient pas de ruban de Moebius, nous reviendrons sur cette notion un peu plus tard dans le cours), et leur genre g (le genre de M est l'entier $\frac{1}{2}\dim H^1(M)$, nous y reviendrons également plus tard dans le cours). Pour produire des modèles explicites des surfaces, on peut utiliser l'opération de somme connexe #, voir par exemple [Laf, Chap II, ex 28].

Plus précisément, toute surface orientable compacte est difféomorphe à une surface :

$$S_g := S^2 \# \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ copies de } T^2}$$

pour un unique $g \geq 0$, et toute surface non orientable compacte est difféomorphe à la surface

$$S'_g := \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \underbrace{\# T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ copies de } T^2}$$

pour un unique $g \geq 0$. Une démonstration classique de la classification passe par la théorie de Morse, voir par exemple l'article d'exposition :

[CKK] A. Champanerkar, A. Kumar et S. Kumaresan, Classification of surfaces via Morse theory, Expositiones Mathemathicae, 18 (2000) no. 1, 37–73.

A partir de la dimension 3 la situation devient beaucoup plus compliquée, et la classification est hors de portée. Ainsi, le simple fait de montrer qu'à difféomorphisme près, la seule variété compacte simplement connexe de dimension 3 est la sphère S^3, est l'objet de la célèbre conjecture de Poincaré (résolue en 2002 par G. Perelman).

3.10 Exercices du chapitre 3

Exercice 15. Propriétés des variétés topologiques. Soit M une variété topologique de dimension n.

1. Montrez que $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de M si et seulement si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs.
2. Montrez que si M est connexe et si $n \geq 2$ alors pour tout $x \in M$ $M \setminus \{x\}$ connexe.
3. Montrez que les composantes connexes de M sont ouvertes et fermées dans M.
4. Montrez que si M est compacte, elle a un nombre fini de composantes connexes.

Exercice 16. Atlas dénombrable. Soit M une variété différentielle. Montrez que l'on peut trouver une famille dénombrable de cartes dont les domaines recouvrent M.

Exercice 17. Cartes de l'atlas maximal engendré par $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}$ un atlas lisse sur une variété topologique M, et $\mathcal{A}_{\max}$ l'atlas maximal associé.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M et $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrez que $\phi \in \mathcal{A}_{\max}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{U}$ on peut trouver une carte $(\mathcal{U}', \phi') \in \mathcal{A}$ dont le domaine contient x, et un difféomorphisme $\psi : \phi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \to \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$ telles que les applications ϕ et $\psi \circ \phi'$ sont égales sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$.

Exercice 18. Espaces projectifs complexes. Notons $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ x = \lambda y$. On munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la topologie quotient. On note $[z_0 : \cdots : z_n]$ la classe d'équivalence d'un point

1. Montrez que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est égal au quotient de $S^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \ \ , |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in S^1 \ x = \lambda y$.

   En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est séparé, puis que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est compact.
2. Montrez que les sous-ensembles $\mathcal{U}_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] \ , \ z_i \neq 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et que les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \phi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : \cdots : z_n] & \mapsto & \dfrac{1}{z_i}(z_0, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n) \end{array}$$

   sont des homéomorphismes.
3. Montrez que les ϕ_i, $0 \leq i \leq n$, forment un atlas lisse de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 19. Droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On interprète S^2 comme la sous-variété $\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ , \ |z|^2 + t^2 = 1\}$.

1. Montrez que l'application $h : S^3 \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ telle que $h(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z_2}, |z_1|^2 - |z_2|^2)$ a pour image S^2.
2. Montrez que h induit une bijection continue $\overline{h} : \mathrm{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$.
3. Montrez que $\overline{h}$ est un difféomorphisme.

Exercice 20. Revêtements vs difféomorphismes locaux.

1. Soit $p : X \to B$ un revêtement, de base B connexe. Montrez que le cardinal de $p^{-1}(b)$ est indépendant de b.
2. Soit $p : X \to B$ un difféomorphisme local, tel que pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(b)$ est de cardinal fini n indépendant de b. Montrez que p est un revêtement lisse.
3. Trouvez un exemple de difféomorphisme local, dont toutes les fibres sont de même cardinal infini dénombrable, et qui n'est pas un revêtement lisse.

   [Indication : "poinçonnez" l'exponentielle.]

Exercice 21. Lissité et revêtements. Soit $p : M \to B$ un revêtement lisse, et $f : N \to M$ une application continue. Montrez que f est lisse si et seulement si $p \circ f$ est lisse.

Exercice 22. Quotients du cercle.

1. On identifie S^1 avec l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère le groupe cyclique $C_n = \{e^{ik\pi/n}, 0 \leq k < n\}$, qui agit sur S^1 par multiplication.

   Montrez que l'on a un difféomorphisme $S^1/C_n \simeq S^1$.
2. En déduire que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est difféomorphe à S^1.

Exercice 23. Variétés lenticulaires. Soient p et q deux nombres premiers entre eux, et $L(p,q)$ la variété lenticulaire associée (voir l'exemple 3.44). On voit S^3 comme la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

1. Montrez que si $L(p,q)$ et $L(p',q')$ sont difféomorphes, alors $p = p'$.

   [Indication : utilisez le groupe fondamental.]
2. On suppose que $q_1 = -q_2 \mod p$. Montrez que l'application $S^3 \to S^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \overline{z_2})$ induit un difféomorphisme entre $L(p; q_1)$ et $L(p; q_2)$.
3. On suppose que $q_1 q_2 = 1 \mod p$. Montrez que l'application $S^3 \to S^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ induit un difféomorphisme entre $L(p, q_1)$ et $L(p, q_2)$.
4. En déduire que si $q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \mod p$, alors $L(p, q_1)$ et $L(p, q_2)$ sont difféomorphes.

[Pour la culture : on peut en fait montrer que $L(p, q_1)$ et $L(p, q_2)$ sont difféomorphes si et seulement si $q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \mod p$, mais les techniques utilisées pour démontrer la partie "seulement si" dépassent le cadre de ce cours. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article "espaces lenticulaires" de wikipédia, et les références qui y sont mentionnées.]

Exercice 24. Immersions, submersions. Soit M une variété différentielle de dimension m, N une variété différentielle de dimension n et $f : M \to N$ une application lisse.

1. On suppose que f est une submersion. Montrez que pour tout $x \in M$ il existe une carte (U, ϕ) de M dont le domaine contient x et une carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$ et telles que la composée

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

est égale à l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$.

2. On suppose que f est une immersion. Montrez que pour tout $x \in M$ il existe une carte (U, ϕ) de M dont le domaine contient x et une carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$ et telles que la composée

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

est égale à l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

Exercice 25. Sous-variétés et applications de rang constant. Soit $f : M \to N$ une application lisse telle que pour tout $a \in M$, $T_a f$ est de rang r, pour un entier r indépendant de a. Montrez que pour tout $b \in N$ l'ensemble de niveau $M_b = f^{-1}(b)$ est une sous-variété de M, dont on précisera la dimension.

Exercice 26. Droite de Kronecker du tore. Soit α un nombre réel. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'application telle que $\gamma(t) = (t, \alpha t)$.

1. Montrez que γ est une immersion lisse.
2. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Notons $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action par translation du sous-groupe discret $q\mathbb{Z}$ des entiers multiples de q.
   (a) Montrez que $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ est une variété différentielle difféomorphe à S^1, et que l'application quotient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ est un revêtement lisse.
   (b) Montrez qu'il existe un plongement $\overline{\gamma} : \mathbb{R}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tel que $\gamma = \overline{\gamma} \circ q$.
   (c) Montrez que l'image de γ est un sous-variété du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, difféomorphe à S^1.
3. On suppose maintenant $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'image de γ s'appelle la *droite de Kronecker du tore* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Nous la noterons D_α dans cet exercice.

(a) Montrez que D_α est dense dans le tore.

(b) Déduisez-en que D_α n'est pas une sous-variété du tore, et que γ est une immersion injective lisse qui n'est pas un plongement.

Exercice 27. Connexité du complémentaire. Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ telle que $\dim M \leq n-2$. Soit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n \setminus M$. Soient x et y deux points distincts de $\mathcal{U}$.

Soit $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse telle que $\lambda(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\lambda(t) = 1$ pour $t \geq 1$. On considère la fonction $f_{x,y} : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que $f_{x,y}(m,t) = m - x - \lambda(t)(y-x)$.

1. Justifier que l'image de $f_{x,y}$ est de mesure nulle.
2. Déduisez-en l'existence d'un chemin continu de $\mathcal{U}$ reliant x et y.

4 Champs de vecteurs

4.1 Définitions

A. Champs de vecteurs sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de R^n. Un *champ de vecteurs* sur $\mathcal{U}$ est la donnée pour chaque point $x \in \mathcal{U}$ d'un vecteur X_x de $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteur est dit *lisse* lorsqu'il définit une application lisse :

$$X : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & X_x \end{array} .$$

On définit les combinaisons linéaires de champs de vecteurs par $(\lambda X + \mu Y)_x := \lambda X_x + \mu Y_x$. Si X et Y sont deux champs de vecteurs lisses sur $\mathcal{U}$, alors leur combinaison linéaire est un champ de vecteurs lisse sur $\mathcal{U}$.

Si $\phi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et si v est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}_1$, *l'image de v par ϕ* est le champ de vecteurs $\phi_* X$ sur $\mathcal{U}_2$ défini en tout $\phi(x) \in \mathcal{U}_2$ par :

$$(\phi_* X)_{\phi(x)} = D_x\phi(X_x) .$$

Lemme 4.1. *1. L'opération d'image par un difféomorphisme est compatible avec la composition : $\psi_*(\phi_* X) = (\psi \circ \phi)_* X$.*

2. Le champ de vecteurs $\phi_* X$ est lisse si et seulement si v est lisse.

B. Champs de vecteurs sur les variétés. Soit M une variété différentielle. Un *champ de vecteurs X sur M* est la donnée pour chaque point $x \in M$ d'un vecteur $X_x \in T_x M$. On définit les combinaisons linéaires de champs de vecteurs par la formule évidente : $(\lambda X + \mu Y)_x := \lambda X_x + \mu Y_x$. Si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, *l'image de X par ϕ* est le champ de vecteurs $\phi_* X$ sur N défini en tout point $\phi(x) \in N$ par :

$$(\phi_* X)_{\phi(x)} = T_x\phi(X_x) .$$

Un champ de vecteurs X sur M est *lisse au voisinage de x* s'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ autour de x telle que $\phi_* X_{|\mathcal{U}}$ est lisse comme champ de vecteurs sur l'ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$ (ici $X_{|\mathcal{U}}$ désigne la restriction du champ de vecteurs v à l'ouvert $\mathcal{U}$). Cette notion est indépendante du choix de la carte $(\mathcal{U}, \phi)$. Un champ de vecteurs sur M est *lisse* s'il est lisse au voisinage de chacun de ses points.

Lemme 4.2. *1. Si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, le champ de vecteurs $\phi_* X$ est lisse si et seulement si X est lisse.*

2. Une combinaison linéaire de champs de vecteurs lisses est lisse.

4.2 Flot d'un champ de vecteurs

A. Rappels du cours d'équations différentielles Soit X un champ de vecteurs lisse sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation différentielle associée :

$$\dot{\gamma} = X_\gamma \qquad (E)$$

Une *solution de* (E) est un couple (I, γ) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une application lisse, telle que

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \ , \quad \forall t \in I \ .$$

L'existence et l'unicité de solutions est donnée par le théorème de Cauchy et Lipschitz.

Théorème 4.3 (Cauchy Lipschitz)**.** *1. Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une solution (I, γ) telle que (i) $0 \in I$ et (ii) $\gamma(0) = x$.*

2. Si (J, μ) est une autre solution verifiant (i) et (ii), alors $\gamma_{|I\cap J} = \mu_{I\cap J}$.

On dit qu'une solution (J, μ) *prolonge* (I, γ) si $J \supset I$ et $\mu_{|I} = \gamma$. Une solution (I, γ) est *maximale* si son seul prolongement est (I, γ).

Lemme 4.4 (Zornette)**.** *Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale (I_x, γ_x) de (E) vérifiant (i) et (ii).*

Le *flot de l'équation différentielle* (E) est défini de la manière suivante. Posons

$$\Omega := \bigsqcup_{x\in\mathcal{U}} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{U}$$

où chaque I_x est l'intervalle de définition de la solution maximale (I_x, γ_x) telle que $\gamma_x(0) = x$. Le *flot de* (E) est l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi^X : & \Omega & \to & \mathcal{U} \\ & (t,x) & \mapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

Théorème 4.5 (Régularité du flot)**.** *Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$, et ϕ^X est une application lisse.*

Cas des variétés différentielles. Tout ce qui a été rappelé (définitions et théorèmes [12]) dans la section précédente reste valable sans aucun changement si on remplace $\mathcal{U}$ par une variété différentielle M. Dans le cas d'une variété M compacte, on dispose de plus du résultat suivant.

12. La preuve des deux théorèmes (Cauchy-Lipschitz et régularité du flot) s'obtient à partir des théorèmes sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ en regardant dans les cartes. La preuve du lemme d'existence des solutions maximales (une simple application du lemme de Zorn) est identique à celle du cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.6. *Si $\mathcal{U} = M$ est une variété compacte, alors l'ouvert Ω de définition du flot est égale à $\mathbb{R} \times M$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi_t^X : & M & \to & M \\ & x & \mapsto & \phi^X(t,x) \end{array}$$

vérifie $\phi_{s+t}^X = \phi_s^X \circ \phi_t^X$ pour tous les réels s et t, et $\phi_0^X = \mathrm{id}_M$.

Les deux dernières conditions signifient que le flot définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ des difféomorphismes de M. Les champs de vecteurs constituent donc un moyen de construire des familles de difféomorphismes de M dont on contrôle bien les propriétés. Le résultat suivant est un exemple d'application.

Théorème 4.7. *Soit M une variété différentielle compacte, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose*

$$M^{\leq t} := f^{-1}(]-\infty, t]) \;.$$

Si $a < b$ et si $f^{-1}([a,b])$ ne contient aucun point critique de f, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi(M^{\leq a}) = M^{\leq b}$.

4.3 Le fibré tangent

Le fibré tangent d'un variété différentielle M est un moyen de conceptualiser les espaces tangents et les champs de vecteurs. Pour le définir, on considère l'ensemble :

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M \;.$$

Un vecteur v de l'espace tangent T_xM sera souvent noté (x,v). On considère également l'application ensembliste

$$\begin{array}{rccc} p : & TM & \to & M \\ & (x,v) & \mapsto & x \end{array} \;.$$

Si $(\mathcal{U}, \phi)$ est une carte de M, on note $T\mathcal{U} := p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{U}} T_xM \subset TM$ et on définit une bijection :

$$\begin{array}{rccc} T\phi : & T\mathcal{U} & \to & \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \\ & (x,v) & \mapsto & (\phi(x), T_x\phi(v)) \end{array} \;.$$

Théorème 4.8.

1. *Il existe une unique topologie sur TM telle que les ensembles $T\mathcal{U}$ soient ouverts et les applications $T\phi$ soient des homéomorphismes. Cette topologie est séparée et σ-compacte.*
2. *Les applications $T\phi$, pour toutes les cartes ϕ de M, forment un atlas lisse de TM, qui définit une structure de variété différentielle sur TM. L'application $p : TM \to M$ est une submersion lisse.*

3. *Donner un champ de vecteurs X sur M est équivalent à donner une application $\widetilde{X} : M \to TM$ telle que $p \circ \widetilde{X} = \mathrm{id}_M$. Le champ de vecteurs est lisse si et seulement si cette application est lisse.*
4. *Si $f : M \to N$ est une application lisse, l'application $Tf : TM \to TN$ telle que $(Tf)(x, v) = (f(x), T_x f(v))$ est lisse.*

Remarque 4.9. Le dernier point du théorème généralise à toutes les applications lisses $f : M \to N$ la construction des applications $T\phi$ qui définissent la structure lisse de TM.

Le fibré tangent est un fibré vectoriel au sens de la définition suivante.

Définition 4.10. Un *fibré vectoriel (lisse) de rang n* est une application lisse $p : E \to B$ telle que :

(i) pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(b)$ est munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension n,

(ii) pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

et dont les restrictions $\Phi : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ sont des isomorphismes linéaires pour tout $x \in \mathcal{U}$.

L'espace total E d'un fibré vectoriel est donc une variété qui est *localement* le produit d'une variété différentielle et d'un espace vectoriel.

Définition 4.11. Un *isomorphisme de fibrés vectoriels* entre $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ est un difféomorphisme $\Phi : E \to E'$ tel que pour tout $x \in B$, la restriction $\Phi : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire, et tel que $p = \Phi \circ p'$. Un fibré vectoriel $p : E \to B$ de rang n est dit *trivialisable* s'il est isomorphe au fibré trivial $\mathrm{pr}_B : B \times \mathbb{R}^n \to B$.

Exemple 4.12. Le fibré tangent d'une variété M de dimension n est trivialisable si et seulement s'il existe n champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ sur M qui forment une famille libre en tout point.

Ainsi le fibré tangent de la sphère S^1 est trivialisable, mais pas celui de la sphère S^2 (à cause du théorème de la "boule chevelue", voir le théorème 5.61 démontré en section 5).

4.4 Champs de vecteurs sur les groupes de Lie

Définition 4.13. Un *groupe de Lie* est une variété différentielle, munie d'une structure de groupe, telle que la multiplication et l'inverse définissent des applications lisses :

$$m : G \times G \to G\ , \qquad \iota : G \to G\ .$$

Un *sous-groupe de Lie* de G est une sous-groupe H de G qui est une sous-variété. Un *morphisme de groupes de Lie* est un morphisme de groupes lisse $f : G \to H$ entre deux groupes de Lie.

Exemples 4.14.

1. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe de Lie de dimension n^2, de dimension n^2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de dimension $2n^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{K})$, de dimension $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de dimension $2(n^2 - 1)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe de Lie de dimension 1. Les applications $f, g : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ telles que

   $$f(t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\ , \qquad g(t) = \left[\begin{smallmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$$

   sont des morphismes de groupes de Lie.

Pour tout $g \in G$ on note $L_g, R_g : G \to G$ les difféomorphismes lisses données par les translations à gauche et à droite par G :

$$L_g(x) = gx\ , \qquad R_g(x) = xg\ .$$

Pour tout champ de vecteurs X de G, on dispose des champs de vecteurs translatés $(L_g)_*X$ et $(R_g)_*X$.

Définition 4.15. Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à gauche* si $(L_g)_*X = X$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire si $X_g = T_eL_g(X_e)$ pour tout $g \in G$.

Théorème 4.16. *Tous les champs de vecteurs invariants à gauche sont automatiquement lisses. L'application $X \mapsto X_e$ induit un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche et l'espace vectoriel T_eG.*

Corollaire 4.17. *Les groupes de Lie sont des variétés parallélisables.*

Nous introduisons maintenant un deuxième concept relié à l'espace vectoriel tangent T_eG.

Définition 4.18. Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G est un morphisme de groupes de Lie $h : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Théorème 4.19. *Pour tout $v \in T_eG$, il existe un unique groupe de Lie à un paramètre h^v tel que $h^v(0) = 1_G$ et $(h^v)'(0) = v$.*

Sur une variété différentielle quelconque, les vecteurs tangents sont les dérivées des courbes lisses. Le théorème 4.19 dit que sur les groupes de Lie, on peut remplacer les courbes lisses quelconques par les courbes lisses très particulières que sont les sous-groupes à un paramètre. La démonstration du théorème consiste à montrer que h^v est la solution maximale de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs invariant à gauche X satisfaisant $X_e = v$.

Exemple 4.20. Si G est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $T_eG \subset M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in T_eG$, $h^A(t) = \exp(tA) \in G$ (le fait que l'exponentielle d'un élément de T_eG est dans G se déduit du théorème 4.19).

L'exemple 4.20 motive la définition suivante.

Définition 4.21. On note $\exp : T_eG \to G$ l'application qui associe à tout $v \in T_eG$ l'élément $h^v(1) \in G$, où h^v est le groupe à un paramètre déterminé par v.

Proposition 4.22. *L'exponentielle est lisse et* $T_0 \exp = \mathrm{id}$. *En particulier l'exponentielle est un difféomorphisme local en* 0. *Enfin,* $\exp(-v) = \exp(v)^{-1}$ *pour tout v.*

Comme exemple d'application, nous donnons un théorème de structure sur le voisinage d'un sous-groupe de Lie.

Théorème 4.23. *Soit H un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie G. Soit S un supplémentaire de T_eH dans T_eG. Alors il existe une boule ouverte B de S de centre* 0 *telle que l'application*

$$f : \begin{array}{ccc} B \times H & \to & G \\ (b,h) & \mapsto & \exp(b)h \end{array}$$

soit un difféomorphisme de $B \times H$ sur un ouvert $f(B \times H)$ de G.

4.5 Devoir maison

Exercice 28. Une variante du théorème d'inversion globale. Soit $f : N \to P$ une application lisse entre variétés et K un compact de N tel que

(i) pour tout $x \in K$, $T_x f$ est un isomorphisme,

(ii) la restriction $f : K \to P$ est injective.

On suppose que N une sous-variété de $\mathbb{R}^q$, on note d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^q$, et pour tout entier $k > 0$, on définit

$$K^{1/k} = \left\{ x \in N \;\middle|\; d(x, K) < \frac{1}{k} \right\} .$$

1°) Montrez qu'il existe k_0 tel que pour tout $x \in K^{1/k_0}$, $T_x f$ est un isomorphisme.

2°) Montrez qu'il existe k_1 tel que $f : K^{1/k_1} \to P$ est injective.

[Indication : procédez par l'absurde, en supposant que pour chaque k on dispose de deux points a_k et b_k tels que $f(a_k) = f(b_k)$, et extrayez des sous-suites de (a_k) et (b_k) qui convergent vers a et b...]

3°) Déduisez en qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de N contenant K tel que $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est un difféomorphisme.

Exercice 29. Voisinages tubulaires. Soit M une sous-variété compacte de dimension k de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\epsilon > 0$ on pose :

$$M^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \epsilon\} .$$

Le but de cet exercice est de montrer que si ϵ est assez petit, alors il existe une application de projection $\pi_\epsilon : M^\epsilon \to M$ telle que π_ϵ est une submersion, et tel que $\pi_\epsilon(y)$ est l'unique point $z \in M$ tel que $d(z, y) = d(y, M)$.

1°) On pose $\mathcal{N}M = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_x M^\perp\}$ et on note $p : \mathcal{N}M \to M$ l'application $p(x, v) = x$.

(a) Montrez qu'il existe une application lisse $-^\dagger : GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $A^\dagger(\{0\} \times \mathbb{R}^k) = \{0\} \times \mathbb{R}^k$ si $1 \leq k \leq n$.

(b) Montrez que si $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ est un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi(\mathcal{V} \cap \{0\} \times \mathbb{R}^k) = M \cap \mathcal{U}$ alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \mapsto & (\psi(x), D_x\psi^\dagger(v)) \end{array}$$

est un difféomorphisme qui envoie $\mathcal{V} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ sur $\mathcal{N}M \cap (\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n)$.

(c) En déduire que $\mathcal{N}M$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension n, et que p est un fibré vectoriel de rang $n - \dim M$.

***

On appelle $p : \mathcal{N}M \to M$ le fibré normal à la sous-variété M.

***

2°) On note $h : \mathcal{N}M \to \mathbb{R}^n$ l'application $h(x, v) = x + v$.

(a) Montrez que pour tout $x \in M$, $T_{(x,0)}h$ est inversible.

(b) Montrez qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{N}M$ contenant $M \times \{0\}$ et un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant M tel que la restriction de h soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.

[Indication : utilisez l'exercice précédent]

(c) En déduire qu'il existe un ϵ_0 tel que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la restriction $h : h^{-1}(M^\epsilon) \to M^\epsilon$ est un difféomorphisme.

***

On appelle M^ϵ un voisinage tubulaire de M dans $\mathbb{R}^n$.

***

3°) On fixe maintenant ϵ comme à la question 2°) (c), et on note

$$\begin{array}{cccc} \pi_\epsilon : & M^\epsilon & \to & M \\ & x & \mapsto & p(h^{-1}(x)) \end{array} .$$

(a) Justifiez que π_ϵ est une submersion.

(b) Soit $y \in M^\epsilon$. Justifiez qu'il existe $z \in M$ tel que $d(y, z) = d(y, M)$.

(c) On fixe $y \in M^\epsilon$, et $z \in M$ tel que $d(y, z) = d(y, M)$. Montrez que $(y - z) \in T_z M^\perp$, et déduisez-en que $\pi_\epsilon(y) = z$.

[Indication : pour montrer que $z - y \in T_z M^\perp$, utilisez que si γ est une courbe lisse de M telle que $\gamma(0) = z$, alors la fonction $t \mapsto ||\gamma(t) - y||^2$ est lisse, de dérivée nulle en 0.]

Exercice 30. Autour de l'approximation des fonctions continues par des fonctions lisses. Dans tout l'exercice, on fixe une variété lisse N.

1°) Soit $f : N \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit A un fermé de N (éventuellement vide) tel que f est lisse sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}_A$ de A. On fixe un réel $\epsilon > 0$.

(a) Montrez que pour tout $x \in N \setminus A$ il existe un ouvert $\mathcal{U}_x \subset N \setminus A$ contenant x, et une application $g_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$ constante telle que pour tout $y \in \mathcal{U}_x$ on a $|g_x(y) - f(y)| < \epsilon$

(b) A l'aide d'une partition de l'unité et des applications g_x précédentes, construisez une application lisse

$$g : N \to \mathbb{R}$$

telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, et telle que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in N$.

2°) Soit $f : N \to M$ une fonction continue à valeurs dans une sous-variété compacte M de $\mathbb{R}^k$. Soit A un fermé de N (éventuellement vide) tel que f est lisse sur un voisinage ouvert de A.

(a) On fixe $\epsilon > 0$. Montrez qu'il existe une application lisse $g : N \to M$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, et telle que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in N$.

[Indication : utilisez la question précédente et l'exercice précédent]

(b) Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que si $g : N \to M$ est une fonction telle que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ pour tout x alors f et g sont homotopes.

[Rappel : une homotopie est une application $H : N \times [0,1] \to M$ continue telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. Indication : construisez l'homotopie dans un voisinage tubulaire de M et utilisez la projection associée.]

3°) Soit $f : N \to S^k$ une fonction continue. On suppose $k > \dim N$. Montrez que f est homotope à une application constante.

[Indication : On peut se ramener au cas où f est lisse (justifiez !), et dans ce cas on commencera par montrer que l'image de f évite au moins un point, donc est contenue dans un ouvert de S^k homéomorphe à $\mathbb{R}^k$.]

Exercice 31. Une propriété de rigidité des groupes de Lie. Soient G et H deux groupes de Lie, et $f : G \to H$ un morphisme de groupes continu. On souhaite montrer que f est automatiquement lisse.

1°) Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de T_eG. Montrez que l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi_{\mathcal{B}} : & \mathbb{R}^n & \to & G \\ & (t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & \exp(t_1 b_1) \ldots \exp(t_n b_n) \end{array}$$

induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de l'élément neutre $e \in G$.

2°) Soit $h : (\mathbb{R}, +) \to H$ un morphisme de groupes continu.

(a) Montrez qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ et $v \in T_eH$ tel que $h(t_0) = \exp(v)$.

(b) Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $h(t_0 t) = \exp(tv)$.

[Indication : on pourra commencer par établir l'égalité pour les nombres dyadiques $t = k/2^p$.]

(c) En déduire que pour chaque indice i, il existe $w_i \in T_eH$ tel que $f(\exp(t_ib_i)) = \exp(t_iw_i)$.

3°) Montrez que $f \circ \phi_{\mathcal{B}}$ est lisse au voisinage de 0, et en déduire que f est lisse.

4.6 Exercices supplémentaires du chapitre 4

Exercice 32. Difféomorphismes d'une variété. Soit M une variété compacte connexe. Montrez que pour toute paire de points (x, y) de M, il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi(x) = y$.

Exercice 33. Redressement des champs de vecteurs. Soit X un champ de vecteurs lisse sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $X_0 \neq 0$.

1. Montrez qu'il existe deux voisinages ouverts $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ de 0 tels que $F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, définie par $F(x_1, \ldots, x_n) = \phi^X_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$.
2. Montrez que $(F^{-1})_*X$ est un champ de vecteurs constant égal en tout point à $(1, 0, \ldots, 0)$.
3. Soit M une variété lisse, et soit X un champ de vecteurs lisse sur M tel que $X_a \neq 0$. Montrez qu'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ de M contenant a telle que ϕ_*X est le champ de vecteurs constant égal en tout point à $(1, 0, \ldots, 0)$.

Exercice 34. Produits de fibrés vectoriels. Montrez que si $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ sont deux fibrés vectoriels de rang n et n' respectivement, leur produit $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un fibré vectoriel de rang $n + n'$. Montrez que le fibré tangent de $M \times N$ est isomorphe au produit du fibré tangent de M et du fibré tangent de N.

Exercice 35. Un exemple de variété parallélisable. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une submersion. On suppose que $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Montrez que la variété $S^1 \times M$ est parallélisable.

[Indication : on pourra montrer que l'on obtient un difféomorphisme de fibrés en envoyant $(v, \lambda e^{i(\theta+\pi/2)}) \in T_xM \times T_{e^{i\theta}}S^1$ sur $v + \lambda \mathrm{grad}_x f \in \mathbb{R}^n$.]

Exercice 36. Propriétés des morphismes de groupes de Lie. Dans tout cet exercice, on fixe un morphisme de groupes de Lie $f : G \to H$.

1. Montrez que f est une application de rang constant.
2. Montrez que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe de Lie de G.
3. Montrez que si f est injective, alors f est une immersion.
4. Montrez que si f est surjective, alors f est une submersion.
5. Montrez que si f est bijective, alors f est un difféomorphisme.
6. On suppose G compact. Montrez que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de Lie de H.

   [Indication : on commencera par montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe topologique compact de H, et que f passe au quotient en un isomorphisme de groupes topologiques $\overline{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$. Puis on montrera que si B est une petite boule ouverte autour de 0 d'un supplémentaire S de $T_e\mathrm{Ker}\, f$ dans T_eG, alors : (i) la composée

$B \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{f} H$ est un plongement, (ii) la projection $G \to G/\ker f$ envoie $\exp(B)$ sur un voisinage ouvert de e. On déduira de (ii) qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de H tel que $f(\exp(B)) = \operatorname{Im} f \cap \mathcal{U}$, et ensuite de (i) qu'il existe une carte (V, ϕ) de H autour de e qui redresse localement $\operatorname{Im} f$. Ceci implique que $\operatorname{Im} f$ est une sous-variété de H.]

7. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si G n'est pas compact ?

5 Formes différentielles

5.1 Algèbre multilinéaire

Dans cette section $\Bbbk$ désigne un anneau commutatif, mais par la suite nous utiliserons toutes les notions d'algèbre multilinéaire pour $\Bbbk = \mathbb{R}$ seulement. Pour cette raison, les $\Bbbk$-modules seront nommés avec des lettres V, W, etc.

A. Le produit tensoriel. Le *produit tensoriel de deux* $\Bbbk$*-modules* V *et* W est le $\Bbbk$-module $V \otimes W$ défini comme le quotient du $\Bbbk$-module libre de base l'ensemble $V \times W$ par le sous-module $\mathcal{R}$ engendré par les éléments suivants pour tous les v, v' dans V, w, w' dans W et $\lambda \in \Bbbk$:

$$\begin{cases} (\lambda v, w) - (v, \lambda w) \\ \lambda(v, w) - (v, \lambda w) \\ (v + v', w) - (v, w) - (v', w) \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w') \end{cases}$$

On note $v \otimes w$ la classe de $(v, w) \in V \times W$ dans le quotient. les éléments $(v \otimes w)_{(v,w) \in V \times W}$ s'appellent les *tenseurs élémentaires.* Les tenseurs élémentaires engendrent donc le $\Bbbk$-module $V \otimes W$ et sont sujets aux relations :

$$\begin{aligned} &\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) \ , \\ &(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w \ , \\ &v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w' \ . \end{aligned}$$

On a une application $\Bbbk$-bilinéaire :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V \times W & \to & V \otimes W \\ & (v, w) & \mapsto & v \otimes w \end{array} .$$

Le produit tensoriel est caractérisé par la propriété universelle suivante, qui permet de ramener l'étude des applications bilinéaires à celle des applications linéaires.

Proposition 5.1. *Pour toute application* $\Bbbk$*-bilinéaire* $f : V \times W \to X$*, il existe une unique application* $\Bbbk$*-linéaire* $\overline{f} : V \otimes W \to X$ *telle que* $f = \overline{f} \circ \pi$*.*

Le *produit tensoriel de deux applications* $\Bbbk$*-linéaires* $f : V \to V'$ *et* $g : W \to W'$ est l'unique[13] application $\Bbbk$-linéaire $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ telle que $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$.

13. L'unicité est claire car les tenseurs élémentaires engendrent $V \otimes W$, pour l'existence on applique la propriété universelle à l'application $\Bbbk$-bilinéaire $V \times W \to V' \otimes W'$, $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$.

B. Propriétés du produit tensoriel. Le propriété suivantes se démontrent facilement à l'aide de la définition ou de la propriété universelle du produit tensoriel. Les quatre premières propriétés montrent une forte analogie formelle [14] entre les $\Bbbk$-modules munis des opérations $\otimes$ et $\oplus$, et les entiers munis des opérations $\times$ et $+$.

(1) **Fonctorialité.**

$$\begin{aligned}&(f\otimes g)\circ(f'\otimes g') = (f\circ f')\otimes(g\circ g')\;,\\ &\mathrm{id}_V\otimes\mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes W}\;.\end{aligned}$$

(2) **Monoïdalité.** Le produit tensoriel est symmétrique, associatif, avec élément neutre $\Bbbk$. Plus précisément on a des isomorphismes $\Bbbk$-linéaires :

$$\begin{array}{ccc} V\otimes W & \xrightarrow{\simeq} & W\otimes V \\ v\otimes w & \mapsto & w\otimes v \end{array}\;,$$

$$\begin{array}{ccccc} V\otimes \Bbbk & \xrightarrow{\simeq} & V & \xleftarrow{\simeq} & \Bbbk\otimes V \\ v\otimes\lambda & \mapsto & \lambda v & \leftarrow\!\shortmid & \lambda\otimes v \end{array}\;,$$

$$\begin{array}{ccc} (V\otimes W)\otimes X & \xrightarrow{\simeq} & v\otimes(W\otimes X) \\ (v\otimes w)\otimes x & \mapsto & v\otimes(w\otimes x) \end{array}\;.$$

(3) **Distributivité.** Le produit tensoriel est distributif par rapport aux sommes directes (éventuellement infinies). Plus précisément on a des isomorphismes $\Bbbk$-linéaires :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} V_i\otimes W & \xrightarrow{\simeq} & (\bigoplus_{i\in I} V_i)\otimes W \\ \sum_{i\in I}(v_i\otimes w) & \mapsto & (\sum_{i\in I} v_i)\otimes w \end{array}\;,$$

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} V\otimes W_i & \xrightarrow{\simeq} & V\otimes(\bigoplus_{i\in I} W_i) \\ \sum_{i\in I}(v\otimes w_i) & \mapsto & v\otimes(\sum_{i\in I} w_i) \end{array}\;.$$

De plus 0 est absorbant pour le produit tensoriel : $V\otimes 0\simeq 0\simeq 0\otimes V$.

(4) **Produit tensoriel de modules libres.** Si V est un $\Bbbk$-module libre de base $(e_i)_{i\in I}$ et W est un $\Bbbk$-module libre de base $(e'_j)_{j\in J}$ alors $V\otimes W$ est un $\Bbbk$-module libre de base $(e_i\otimes e'_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

(5) **Adjonction avec** Hom. On a un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Bbbk(V\otimes W, X) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_\Bbbk(V,\mathrm{Hom}_\Bbbk(W,X)) \\ f & \mapsto & v\mapsto[f_v : w\mapsto f(v\otimes w)] \end{array}\;.$$

14. En particulier, on remarquera que si $\Bbbk$ est un corps, la fonction "dimension" fournit un "morphisme d'anneaux" : $\dim(V\otimes W)=\dim V\times\dim W$, $\dim(V\oplus W)=\dim V+\dim W$.

(6) **Exactitude.** Un diagramme "en ligne" de $\Bbbk$-modules et d'applications linéaires

$$\cdots \to M^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} M^i \xrightarrow{f^i} M^{i+1} \to \cdots$$

est dit *exact* si pour chaque objet M^i du diagramme on a $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Im} f^{i-1}$. Une *suite courte exacte* est un diagramme exact :

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

Proposition 5.2. *Si* $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ *est une suite exacte courte, et si* V *est un* $\Bbbk$*-module libre, alors le diagramme suivant est une suite exacte courte :*

$$0 \to A \otimes V \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_V} B \otimes V \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_V} C \otimes V \to 0\ . \qquad (*)$$

Remarque 5.3. En général, si V est un $\Bbbk$-module quelconque, le diagramme $(*)$ peut très bien ne pas être exact, et on a seulement exactitude du diagramme :

$$A \otimes V \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_V} B \otimes V \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_V} C \otimes V \to 0 \qquad (**)$$

(c'est-à-dire que par rapport à la situation de la suite exacte courte, on peut perdre l'injectivité de $f \otimes \mathrm{id}_V$). Prenons par exemple $\Bbbk = \mathbb{Z}$ et comme suite exacte courte de départ la suite

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$$

où f est la multiplication par p et g est la projection quotient. En tensorisant par $V = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on obtient $f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = 0$ et $g \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme. Ainsi $(**)$ est exacte, mais pas $(*)$.

C. Puissances tensorielles, algèbre tensorielle. On pose $V^{\otimes 0} = \Bbbk$, et pour $d > 1$ on note

$$V^{\otimes d} = \underbrace{((V \otimes V) \otimes \cdots \otimes V)}_{d \text{ facteurs } V}\ ,$$

Un tenseur élémentaire $((v_1 \otimes v_2) \otimes \cdots \otimes v_d) \in V^{\otimes d}$ sera noté sans parenthèses : $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$. On dispose d'une application d-linéaire

$$\pi_d : \begin{array}{ccc} V^{\times d} & \to & V^{\otimes d} \\ (v, \dots, v_d) & \mapsto & v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \end{array} .$$

Proposition 5.4. *Pour toute application* d*-linéaire* $f : V^{\times d} \to W$*, il existe une unique application* $\Bbbk$*-linéaire* $\overline{f} : V^{\otimes d} \to W$ *telle que* $f = \overline{f} \circ \pi_d$.

L'*algèbre tensorielle sur un* $\Bbbk$*-module* V est la $\Bbbk$-algèbre TV, définie comme le $\Bbbk$-module

$$TV = \bigoplus_{d\geq 0} V^{\otimes d} = \Bbbk \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \ ,$$

muni du produit $\cdot : TV \times TV \to TV$ qui est l'unique application $\Bbbk$-bilinéaire qui concatène les tenseurs élémentaires :

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \cdot (v_{d+1} \otimes \cdots \otimes v_{d+e}) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_d \ ,$$

avec pour unité l'élément $1 \in \Bbbk$. On remarque que l'algèbre tensorielle n'est pas commutative en général. L'algèbre tensorielle vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 5.5. *Soit* A *une* $\Bbbk$*-algèbre, et soit* $f : V \to A$ *une application* $\Bbbk$*-linéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres* $\overline{f} : TV \to A$ *tel que* $\overline{f}_{|V} = f$*.*

L'algèbre tensorielle permet notamment de définir des algèbres par générateurs et relations. Par exemple, l'algèbre engendrée par trois générateurs a, b, c, avec relations $a^2 = 0$ et $2ab = c$ est définie comme l'algèbre TV/I, où V est le $\Bbbk$-module libre de rang 3, de base a, b, c, et I est l'idéal de la $\Bbbk$-algèbre TV engendré par les éléments $a \otimes a$ et $2a \otimes b - c$.

D. L'algèbre extérieure. L'*algèbre extérieure sur un* $\Bbbk$*-module* V est définie comme le quotient de l'algèbre tensorielle sur V par l'idéal engendré par les éléments $v \otimes v$, $v \in V$:

$$\Lambda(V) = TV/\langle v \otimes v \ , \ v \in V\rangle.$$

Notation 5.6. La classe d'un tenseur élémentaire $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ dans $\Lambda(V)$ est notée $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$.

Avec cette notation, on dispose des règles de calcul suivantes dans l'algèbre extérieure.

(1) Le produit de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ et $v_{d+1} \wedge \cdots \wedge v_{d+e}$ est égal à $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d+e}$. Ceci justifie de noter le produit par le symbole "$\wedge$".

(2) Si σ est une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$ de signature $\epsilon(\sigma)$ et si $v_1, \ldots, v_d$ sont des éléments de V on a :

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(d)} = \epsilon(\sigma) v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \ .$$

(3) Si $v_1, \ldots, v_d$ sont des éléments de V, et s'il existe $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$, alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d = 0$.

Notation 5.7. On note $\Lambda^0(V) = \Bbbk$ et pour $d > 1$ on note $\Lambda^d(V)$ le sous-module du $\Bbbk$-module $\Lambda(V)$ engendré par les éléments de la forme $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ avec $v_1, \ldots, v_d$ des éléments de V.

Avec cette notation, l'algèbre extérieure se décompose comme une somme directe :

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d(V) = \Bbbk \oplus V \oplus \Lambda^2(V) \oplus \cdots .$$

L'algèbre extérieure est donc une algèbre graduée, graduée commutative, au sens de la définition suivante.

Définition 5.8. Une $\Bbbk$-*algèbre graduée* est une algèbre A telle que :

(i) le $\Bbbk$-module A se décompose comme somme directe de sous-modules :

$$A = \bigoplus_{d \geq 0} A^d = A^0 \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots$$

(ii) si $x \in A^d$ et $y \in A^e$ alors le produit xy est un élément de A^{d+e}.

Dans une algèbre graduée A, les éléments du sous-module A^d s'appellent les *éléments homogènes de degré* d de A.

Une algèbre graduée est dite *graduée commutative* si pour tout $x \in A^d$ et tout $y \in A^e$ on a $xy = (-1)^{de} yx$.

E. Formes alternées et algèbre extérieure. Si $d \geq 1$, une application d-linéaire $f : V^{\times d} \to W$ est dite *alternée* si elle verifie $f(v_1, \ldots, v_d) = 0$ dès qu'il existe des indices $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$.

Exemples 5.9.

1. Les applications 1-linéaires alternées sont les applications linéaires.
2. Si $V = \Bbbk^3$, le produit vectoriel $\wedge : V \times V \to V$ est une forme bilinéaire alternée.
3. Si $V = \Bbbk^d$, et $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ la base duale de la base canonique, le déterminant définit une forme d-linéaire alternée

$$\begin{array}{ccc} V^{\times d} & \to & \Bbbk \\ (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & \det[e_i^*(v_j)] \end{array} .$$

4. D'après les règles de calcul dans l'algèbre extérieure, on a une application d-linéaire alternée :

$$\begin{array}{cccc} \pi_d : & V^{\times d} & \to & \Lambda^d(V) \\ & (v_1, \ldots, v_d) & \mapsto & v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \end{array} .$$

La propriété universelle suivante permet de ramener l'étude des applications d-linéaires alternées à celle des applications linéaires.

Proposition 5.10. *Pour toute application $f : V^{\times d} \to W$ d-linéaire alternée, il existe une unique application linéaire $\overline{f} : \Lambda^d(V) \to W$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi_d$.*

Théorème 5.11. *Supposons que V est un $\Bbbk$-module libre de rang n, de base $e_1, \dots, e_n$. Soit d un entier strictement positif.*

(1) Si $d > n$, $\Lambda^d(V) = 0$. Si $d \leq n$, alors $\Lambda^d(V)$ est un $\Bbbk$-module libre de rang $\binom{n}{d}$, de base les éléments :

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \text{ , pour les indices } 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n \text{ .}$$

(2) Notons $\mathrm{Alt}_d(V)$ le $\Bbbk$-module des formes d-linéaires alternées sur V. On a un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire (où $\overline{f}$ désigne l'application linéaire de la proposition 5.10)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alt}_d(V) & \xrightarrow{\simeq} & \Lambda^d(V)^* \\ f & \mapsto & \overline{f} \end{array} \text{ .}$$

(3) On a un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^d(V^*) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Alt}_d(V) \\ f_1 \wedge \cdots \wedge f_d & \mapsto & [(v_1, \dots, v_d) \mapsto \det[f_i(v_j)]_{1 \leq i,j \leq d}] \end{array} \text{ .}$$

5.2 Définition des formes différentielles

A. Premières définitions.

Définition 5.12. Soients M et N deux variétés différentielles.

1. Une *p-forme différentielle α sur M* est la donnée pour chaque $x \in M$ d'une forme p-linéaire alternée α_x sur T_xM :

$$\alpha_x \in \Lambda^p(T_xM^*) \text{ .}$$

2. On définit la combinaison linéaire et le produit de deux formes différentielles sur M "point par point" :

$$(\lambda\alpha + \mu\beta)_x = \lambda\alpha_x + \mu\beta_x$$
$$(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$$

Exemples 5.13. 1. Une 0-forme différentielle sur M est une fonction $\alpha : M \to \mathbb{R}$.

2. Si $p > \dim M$, alors une p-forme différentielle est nulle en tout point.
3. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors une p-forme différentielle α équivaut à la donnée d'une fonction

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\alpha} : & \mathcal{U} & \to & \Lambda^p(\mathbb{R}^{n\,*}) \\ & x & \mapsto & \alpha_x \end{array} \text{ .}$$

Pour tout p-uplet $I = (i_1, \ldots, i_p)$ d'entiers compris entre 1 et n, on pose
$$dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$
où $dx_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire telle que $dx_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$. Avec cette notation, toute p-forme différentielle α s'écrit de manière unique comme une somme

$$\alpha_x = \sum_{I\ p\text{-uplet ordonné}} f_I(x) dx_I$$

pour des fonctions $f_I : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Ces fonctions f_I sont les applications coordonnées de $\widetilde{\alpha}$ dans la base (dx_I), I p-uplet ordonné.

Définition 5.14. Si $f : M \to N$ est une application lisse, et si α est une p-forme linéaire alternée sur N, *l'image réciproque de α par f* est la p-forme alternée $f^*\alpha$ sur M définie pour tout $x \in M$ par

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_p) = \alpha_{f(x)}(T_x f(v_1), \ldots, T_x f(v_p)) \ .$$

Dans le cas où α est une 0-forme différentielle sur M (c'est-à-dire une fonction sur M à valeurs dans $\mathbb{R}$), la définition précédente s'interprète comme $f^*\alpha = \alpha \circ f$.

Lemme 5.15. *L'opération d'image réciproque est compatible avec la composition, et préserve les produits et les combinaisons linéaires de formes :*

$$\begin{aligned}
&(f \circ g)^*\alpha = g^*(f^*\alpha) \ , \\
&f^*(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda f^*\alpha + \mu f^*\beta \ , \\
&f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta) \ .
\end{aligned}$$

Notation 5.16. Si N est une sous-variété de M, et $\iota : N \to M$ est l'inclusion, la restriction $\iota^*\alpha$ est aussi notée $\alpha_{|N}$.

B. Régularité.

Définition 5.17. Une p-forme différentielle α sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite *lisse* lorsque l'application $\widetilde{\alpha} : \mathcal{U} \to \Lambda^p(\mathbb{R}^{n\,*})$ telle que $\widetilde{\alpha}(x) = \alpha_x$ est lisse. De manière equivalente, avec l'écriture de l'exemple 5.13.3, α est lisse si les fonctions f_I sont lisses.

Lemme 5.18. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.*

1. *Les combinaisons linéaires et les produits de formes différentielles lisses sur $\mathcal{U}$ sont lisses.*
2. *Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est lisse, et α est une p-forme lisse sur $\mathcal{V}$ alors $f^*\alpha$ est lisse.*

3. *Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme, alors une p-forme α est lisse si et seulement si $f^*\alpha$ est lisse.*

Définition 5.19. Soit α une p-forme différentielle sur une variété M.

La forme α est dite *lisse au voisinage de* $x \in M$ s'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ autour de x telle que $(\phi^{-1})^*\alpha_{|\mathcal{U}}$ est une p-forme différentielle lisse. La forme α est dite *lisse sur* M si elle est lisse au voisinage de chaque $x \in M$.

Exemples 5.20.
1. Une 0-forme lisse sur M est une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$.
2. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, on a une 1-forme lisse df sur M définie par :
$$df_x = T_x f : T_x M \to \mathbb{R} .$$

Notation 5.21. Si M est une variété différentielle, on note $\Omega^p(M)$ l'espace vectoriel des p-formes alternées lisses sur M et on note $\Omega(M)$ l'algèbre graduée, graduée commutative :
$$\Omega(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M) .$$
Toute application lisse $f : M \to N$ induit un morphisme d'algèbres $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$, $\alpha \mapsto f^*\alpha$.

5.3 Le fibré des p-formes alternées lisses

On construit le fibré des p-formes alternées de la même manière que le fibré tangent. Plus précisément, si M est une variété différentielle on pose :
$$\Lambda^p(T^*M) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^p(T_x M^*) .$$
Un élément $\alpha \in \Lambda^p(T_x M^*)$ sera souvent noté (x, α) lorsqu'il est vu comme un élément de $\Lambda^p(T^*M)$. On note
$$p : \Lambda^p(T^*M) \to M$$
l'application telle que $p(x, \alpha) = x$.

Pour toute carte $(\mathcal{U}, \phi)$ de M on pose $\Lambda^p(T^*\mathcal{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{U}} \Lambda^p(T_x M^*)$ et on note $\Lambda^p(T^*\phi)$ l'application :
$$\begin{array}{rccc} \Lambda^p(T^*\phi) : & \Lambda^p(T^*\mathcal{U}) & \to & \phi(\mathcal{U}) \times \Lambda^p(\mathbb{R}^{n\,*}) \\ & (x, \alpha) & \mapsto & (\phi(x), \alpha \circ \Lambda^p((T_x\phi)^{-1})) \end{array}$$
La démonstration du théorème suivant est similaire à celle du théorème relatif au fibré tangent (théorème 4.8).

Théorème 5.22. *1. Il existe une unique topologie sur $\Lambda^p(T^*M)$ telle que les $\Lambda^p(T^*\mathcal{U})$ sont des ouverts et les $\Lambda^p(T^*\phi)$ sont des homéomorphismes. Pour cette topologie, $\Lambda^p(T^*M)$ est une variété topologique.*

2. Les $\Lambda^p(T^*\phi)$ forment un atlas lisse de $\Lambda^p(T^*M)$. L'application $p : \Lambda^p(T^*M) \to M$ est un fibré vectoriel lisse de rang $\binom{n}{p}$.

3. Une p-forme différentielle α sur M est lisse si et seulement si l'application suivante est lisse :

$$\begin{array}{ccc} M & \to & \Lambda^p(T^*M) \\ x & \mapsto & (x, \alpha_x) \end{array} .$$

5.4 La différentielle extérieure

Soit M une variété différentielle. Comme observé dans l'exemple 5.20, la différentielle des fonctions définit un opérateur

$$d : \begin{array}{ccc} \Omega^0(M) & \to & \Omega^1(M) \\ f & \mapsto & df \end{array}$$

Nous allons étendre cet opérateur aux formes différentielles de degré supérieur. Nous commençons par le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, où l'on étend cet opérateur par une formule explicite.

Définition 5.23. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute p-forme $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{U})$, $p \geq 1$ s'écrit de manière unique comme une somme

$$\alpha = \sum_{I\ p\text{-uplet ordonné}} f_I dx_I$$

où les f_I sont des fonctions lisses sur $\mathcal{U}$. On définit :

$$d\alpha = \sum_{\substack{I\ p\text{-uplet} \\ \text{ordonné}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I .$$

Lemme 5.24. *pour $p \geq 0$, l'opérateur $d : \Omega^p(\mathcal{U}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ vérifie les propriétés suivantes*

1) L'opérateur d est $\mathbb{R}$-linéaire et si $p = 0$ c'est la différentielle des fonctions.

2) L'opérateur d vérifie la formule de Leibniz graduée

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (d\beta) .$$

3) L'opérateur d est de carré nul : $d \circ d = 0$.

4) L'opérateur d est compatible avec l'image réciproque des formes différentielles pour toute application lisse $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$:

$$f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha) .$$

Les propriétés précédentes caractérisent l'opérateur d. Plus précisément :

Lemme 5.25. *Il existe un unique opérateur $d : \Omega(\mathcal{U}) \to \Omega(U)$ qui vérifie les propriétés 1) 2) et 3) du lemme précédent.*

Pour les variétés différentielles M générales, l'existence et l'unicité de l'opérateur d est assuré par le théorème suivant.

Théorème 5.26. *Il existe un unique opérateur $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ vérifiant les propriétés suivantes.*

1) L'opérateur d est $\mathbb{R}$-linéaire, pour tout $p \geq 0$ il se restreint en une application $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, et si $p = 0$ c'est la différentielle des fonctions.

2) L'opérateur d vérifie la formule de Leibniz graduée

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (d\beta) \ .$$

3) L'opérateur d est de carré nul : $d \circ d = 0$.

La démonstration de l'unicité de d repose sur le lemme suivant, qui montre que la différentielle du théorème est une construction locale.

Lemme 5.27. *Si d est un opérateur vérifiant les trois conditions du théorème 5.26 et si α et β sont deux formes différentielles et $\mathcal{U}$ un ouvert de M tel que $\alpha_{|\mathcal{U}} = \beta_{|\mathcal{U}}$, alors $(d\alpha)_{|\mathcal{U}} = (d\beta)_{|\mathcal{U}}$.*

L'unicité dans le lemme 5.25 et le lemme 5.27 permettent alors de donner la formule explicite suivante pour la différentielle.

Lemme 5.28. *Soit α une forme différentielle sur M et (U, ϕ) une carte de M. Alors*

$$(d\alpha)_{|\mathcal{U}} = \phi^* d({\phi^{-1}}^* \alpha)$$

où la différentielle de droite sur $\phi(\mathcal{U})$ est donnée par la formule de la définition 5.23.

Comme la différentielle sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ est compatible avec l'image réciproque, on récupère en prime la propriété suivante.

Proposition 5.29. *Si $f : M \to N$ est lisse et si α est un p-forme différentielle lisse sur N on a $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$.*

5.5 Orientation et forme volume

Définition 5.30. Soit M une variété différentielle de dimension $n \geq 1$, d'atlas maximal $\mathcal{A}$. Un sous-atlas de $\mathcal{A}$ est appelé *atlas d'orientation* si les fonctions de changement de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des difféomorphismes à jacobien positif. La variété M est *orientable* si elle admet un atlas d'orientation. Un *atlas d'orientation maximal* est un atlas d'orientation $\mathcal{A}'$ tel que si ψ est une carte de M telle que $\psi \circ \phi^{-1}$ est à jacobien positif pour tout $\phi \in \mathcal{A}'$ alors $\psi \in \mathcal{A}'$.

Remarque 5.31. Dans cette section nous discutons de l'orientation des variétés de dimension non nulle. On peut parler d'orientation pour les variétés de dimension nulle, mais la théorie est dégénérée : toutes les variétés de dimension nulle sont orientables, et au lieu de définir une variété orientée comme une variété munie d'un atlas d'orientation (cf définition 5.36), une variété orientée de dimension 0 est une variété de dimension 0 munie en chacun de ses points d'un signe $+$ ou $-$. L'orientation des variétés de dimension 0 sera utile pour le théorème de Stokes.

Lemme 5.32. *Soit M une variété différentielle orientable. Alors :*

1. *M admet un atlas d'orientation maximal,*
2. *si M est connexe, alors M admet exactement deux atlas d'orientation maximaux. De plus l'atlas maximal de M s'écrit comme la réunion disjointe de ces deux atlas d'orientation maximaux.*

Définition 5.33. Soit M une variété différentielle de dimension n. Une *forme volume sur M* est une n-forme lisse $\omega \in \Omega^n(M)$ telle que $\omega_x \neq 0$ pour tout $x \in M$.

Proposition 5.34.
1. *Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme local et ω une forme volume sur N. Alors $f^*\omega$ est une forme volume sur M.*
2. *Soit ω une forme volume sur M. Alors toute forme volume α sur M s'écrit sous la forme $\alpha = f\omega$, pour une unique fonction f lisse sur M qui ne s'annule pas.*

Théorème 5.35. *Soit M une variété différentielle. Alors M est orientable si et seulement si M admet une forme volume.*

Détaillons la démonstration du sens réciproque du théorème 5.35. La n-forme linéaire alternée $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ n'est autre que la forme $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det[v_1|\cdots|v_n]$. Les propriétés du déterminant montrent donc que si $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est une n-forme différentielle sur $\mathcal{V}$ alors pour toute application lisse $\psi : U \to \mathcal{V}$ on a

$$(\psi^*\alpha)_x = f(\psi(x))\mathrm{Jac}_x(\psi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \,. \qquad (*)$$

Supposons donnée une forme volume ω sur M. On sélectionne toutes les cartes $(\mathcal{U}, \phi)$ de M telles que $\phi^{-1\,*}\omega = f dx_1 \wedge \cdots dx_n$ pour une fonction f strictement positive sur $\mathcal{U}$. Alors l'ensemble $\mathcal{A}'$ de ces cartes forme un atlas orientable de M. En effet :

1. l'ensemble des domaines de ces cartes recouvre M.

   Car pour chaque point x on peut trouver une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ autour de x dont le domaine $\mathcal{U}$ est connexe. Alors $\phi^{-1\,*}\omega$ est une forme volume sur l'ouvert connexe $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$. Par connexité, elle est de la forme $f dx_1 \wedge \cdots dx_n$ où f est une fonction lisse de signe constant. Si f est strictement positive, alors $(\mathcal{U}, \phi)$ est dans $\mathcal{A}'$. Sinon d'après la formule $(*)$, la composée $(\mathcal{U}, \rho\circ\phi)$ est dans $\mathcal{A}'$, où ρ est la réflexion orthogonale de $\mathbb{R}^n$ par rapport à l'hyperplan $x_2 = \cdots = x_n = 0$.

2. Les changements de carte de $\mathcal{A}'$ sont à Jacobiens positifs. En effet supposons que ϕ_1 et ϕ_2 sont deux cartes de $\mathcal{A}'$ dont le domaine contient un même point x. Alors la formule $(*)$ appliquée à $\psi = \phi_2\circ\phi_1^{-1}$ montre que
$$f_1(\phi_2(x))\mathrm{Jac}_{\phi_1(x)}(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = f_2(\phi_2(x)) ,$$
de sorte que le Jacobien du changement de cartes est toujours positif.

La démonstration du sens réciproque du théorème 5.35 montre en particulier que le choix d'une forme volume (à multiplication par une fonction lisse positive près) détermine un atlas d'orientation. Réciproquement un atlas d'orientation permet de construire une forme volume (cette construction démontre le sens direct du théorème, nous l'omettons ici).

Définition 5.36. Une *orientation* d'une variété différentielle M est la donnée d'un atlas orientable de M. De manière équivalente une orientation de M est la donnée d'une forme volume sur M (à multiplication par une fonction lisse positive près). Une *variété orientée* est une variété M munie d'une orientation.

Remarque 5.37.

1. La donnée d'une orientation sur M induit une orientation (au sens de l'algèbre linéaire de licence) sur chacun des espaces tangents. Si la forme volume ω représente l'orientation de M, alors une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de T_xM est dite *directe* si $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$, et *indirecte* sinon.
2. Si $M = \mathbb{R}^n$ (ou un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$) alors M possède deux orientations au sens de la définition 5.36, l'*orientation canonique*, associée à la forme $dx_1 \wedge\cdots\wedge dx_n = \det$, et l'orientation associée à l'opposée de cette forme. Si on munit $\mathbb{R}^n$ de l'orientation canonique, alors une base de $\mathbb{R}^n$ est directe au sens ci-dessus si et seulement si $\det[v_1|\cdots|v_n] > 0$, c'est-à-dire si et seulement si elle est directe au sens de l'algèbre linéaire de licence.

Nous étudions maintenant l'orientabilité pour deux familles d'exemples.

A. Orientation des hypersurfaces. On peut faire opérer les champs de vecteurs sur les formes différentielles par évaluation partielle.

Définition 5.38. Soit M un variété différentielle, α une p-forme lisse sur M (pour $p \geq 1$) et X un champ de vecteurs lisse sur M. Le *produit intérieur de α par X* est la $(p-1)$-forme lisse $\iota_X\alpha$ sur M définie par :
$$(\iota_X\alpha)_x(v_1, \ldots, v_{p-1}) = \alpha_x(X_x, v_1, \ldots, v_{p-1}) .$$

Définition 5.39. Soit N une variété différentielle orientable, munie d'une orientation donnée par une forme volume ω, et soit M une hypersurface de N. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs lisse X au voisinage de M tel que pour tout $x \in M$, $X_x \notin T_xM$. Alors $\iota_X\omega_{|M}$ est une forme volume sur M. L'orientation correspondante de M est appelée l'orientation de M *induite par* X.

Exemple 5.40. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une submersion, et M la sous-variété de niveau $M = f^{-1}(0)$. Alors M est orientable. Plus précisément une forme volume sur M est donnée par la restriction à M de la $(n-1)$-forme sur $\mathcal{U}$ (où le chapeau indique l'omission d'un terme)

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Théorème 5.41. *Soit M une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est une submersion sur un voisinage de M et telle que $M = f^{-1}(0)$.*

Corollaire 5.42. *Toute hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ est orientable.*

Remarque 5.43. Le ruban de Moebius peut être réalisé comme une hypersurface non compacte de $\mathbb{R}^3$. Comme le ruban de Moebius n'est pas orientable, ceci montre que le théorème 5.41 n'est pas valable si on retire l'hypothèse de compacité de M.

Le théorème 5.41 possède d'autres corollaires importants, dont une version du théorème de Jordan : le complémentaire d'une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^n$ est la réunion de deux ouverts connexes, voir l'exercice 45.

Nous indiquons ici le détail de la démonstration du théorème 5.41, qui n'est pas facile à trouver dans la littérature (on la trouve par exemple dans [GT, Partie I, Chap. 2, ex. 30]). La démonstration repose sur deux ingrédients. Le premier est le théorème du ϵ-voisinage tubulaire (cf le devoir maison de la section 4.5 pour une démonstration guidée), dont nous rappelons l'énoncé ici, et qui aura d'autres applications dans la section 6.4.

Théorème 5.44 (ϵ-voisinage tubulaire)**.** *Soit K une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, et soit K^ϵ le voisinage ouvert de K défini par :*

$$K^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) < \epsilon\}$$

Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que :

(1) pour tout $y \in K^\epsilon$ il existe un unique $\pi_\epsilon(y) \in K$ qui minimise l'ensemble $\{d(x, y) \mid x \in K\}$,

(2) l'application $\pi_\epsilon : K^\epsilon \to K$ est une submersion.

Un ouvert K^ϵ verifiant les deux propriétés du théorème est appelé *un ϵ-voisinage tubulaire de K dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 5.45. Dans la situation du théorème 5.44, si v est un vecteur tangent à K qui est le vecteur tangent en 0 à une courbe de K telle que $\gamma(0) = \pi_\epsilon(y)$, l'étude de la fonction $t \mapsto ||\gamma(t) - y||^2$ montre que pour tout $y \in K^\epsilon$, $y - \pi_\epsilon(y)$ est orthogonal à $T_{\pi_\epsilon(y)}K$. En d'autres termes, la projection π_ϵ est une généralisation de la projection orthogonale sur un sous-espace affine.

Remarque 5.46. Sans hypothèse de compacité sur K, il peut très bien ne pas exister d'ϵ-voisinage tubulaire. Par exemple, si K est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ alors la projection $\pi_\epsilon(y)$ n'existe pas (le minimum n'est pas atteint !). Pour la même raison, un plongement de la bande de Moebius dans $\mathbb{R}^3$ n'admet pas de ϵ-voisinage tubulaire.

Le deuxième ingrédient de la démonstration du théorème 5.41 est un lemme technique de topologie, qui permet de recoller des fonctions continues sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ qui coïncident localement à un signe près.

Lemme 5.47. *Soit $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit une famille de fonctions continues $f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ telles que :*

(1) pour tout α, $f^{-1}(0)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{U}_\alpha$ d'intérieur vide,

(2) si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, alors localement f_α et f_β coïncident à un signe ± 1 près.

Alors il existe une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tout α on a localement $f = f_\alpha$ ou $f = -f_\alpha$.

Démonstration du théorème 5.41. On fixe un réel $\epsilon > 0$ tel que $M^{2\epsilon}$ est un voisinage tubulaire de M, et on fixe une fonction $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse et impaire, telle que $\alpha(x) = 1$ si $x \geq \epsilon$, $(\alpha(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$, et $\alpha'(0) \neq 0$.

Pour chaque $x_0 \in M$ il existe un voisinage V autour de x_0 et une submersion $f : V \to \mathbb{R}$ telle que $V \cap M = f^{-1}(x_0)$. A partir de f, on construit une "équation normalisée" f_{x_0} de la façon suivante. Notons $\vec{n}_x$ le champ de vecteur unitaire sur V et normal à $V \cap M$ obtenu en normalisant le gradient de f. Notons

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{x + t\vec{n}_x \mid x \in V \cap M \ , \ |t| < 2\epsilon\}$$

On a $\mathcal{U}_{x_0} \subset M^{2\epsilon}$ et la remarque 5.45 montre que tout élément de $\mathcal{U}_{x_0}$ s'écrit d'une unique façon sous la forme $x + t\vec{n}_x$, plus précisément $x = \pi_{2\epsilon}(x_0)$ et $t = \langle x - x_0 | \vec{n}_x \rangle$. On a alors une fonction lisse bien définie, qui est une submersion au voisinage de $V \cap M$, et telle que $V \cap M = f^{-1}(0)$:

$$\begin{array}{rccc} f_{x_0} : & \mathcal{U}_{x_0} & \to & \mathbb{R} \\ & x + t\vec{n}_x & \mapsto & \alpha(t) \end{array} .$$

On note également $\mathcal{U}_* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) > \epsilon$ et $f_* : \mathcal{U}_* \to \mathbb{R}$ telle que $f_*(x) = \epsilon$. Les équations normalisées f_{x_0}, $x_0 \in M$ et f_* peuvent alors être recollées avec le lemme 5.47 pour obtenir l'application f désirée. □

B. Orientation des variétés quotient.

Proposition 5.48. *Soit G un groupe agissant proprement, librement et de façon différentiable sur une variété M, et soit $q : M \to M/G$ l'application quotient. Alors pour tout entier p l'opération d'image réciproque*

$$q^* : \Omega^p(M/G) \to \Omega^p(M)$$

est injective, et son image est l'ensemble des formes G-invariantes :

$$\operatorname{Im} q^* = \{\omega \in \Omega^p(M) \mid g^*\omega = \omega \ \forall g \in G\} \ .$$

Corollaire 5.49. *La variété quotient M/G est orientable si et seulement si il existe une forme volume ω sur M telle que $g^*\omega = \omega$ pour tout $g \in G$. Dans ce cas l'unique n-forme différentielle α telle que $q^*\alpha = \omega$ est une forme volume sur M/G.*

Exemple 5.50. La variété projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si n impair, et non-orientable si n est pair.

Remarque 5.51. L'étude conjointe de l'orientabilité des hypersurfaces et des variétés quotients permet de montrer qu'on ne peut pas plonger $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas orientable. Si on pouvait le plonger dans $\mathbb{R}^3$, il serait une hypersurface compacte, donc orientable, ce qui est impossible.

5.6 Intégration sur les variétés orientées

Dans cette partie on définit l'intégrale des n-formes différentielles sur un compact K d'une variété orientée M de dimension $n > 0$.

A. Le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 5.52. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K est un sous-ensemble compact de $\mathcal{U}$, alors pour tout n-forme $\alpha = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sur $\mathcal{U}$, on pose

$$\int_K \alpha := \int_K f dx_1 \cdots dx_n$$

où l'intégrale de droite est l'intégrale usuelle des fonctions de $\mathbb{R}^n$ (si f est lisse sur $\mathcal{U}$ alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur K).

Remarque 5.53. Si K est vide alors pour toute n-forme α on a $\int_K \alpha = 0$.

La formule usuelle de changement de variables des fonctions à n-variables donne la propriété suivante.

Proposition 5.54. *Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme entre ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$, si K est un compact de $\mathcal{U}$ et si α est une n-forme lisse sur $\mathcal{V}$ alors*

$$\int_K \phi^*\alpha = \epsilon_\phi \int_{\phi(K)} \alpha \ ,$$

où ϵ_ϕ est le signe de la jacobienne de ϕ.

B. Cas général.

Théorème 5.55. *Soit M une variété orientée de dimension $n > 0$ et K un compact de M. Il existe une unique application linéaire :*

$$\mathrm{INT}_K^M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$$

telle que

(1) si $\operatorname{supp}\alpha \cap K = \emptyset$ *alors* $\mathrm{INT}_K^M(\alpha) = 0$

(2) si $\operatorname{supp}\alpha$ *est contenu dans un ouvert d'une carte* $(\mathcal{U}, \phi)$ *de l'atlas d'orientation de M, on a*

$$\mathrm{INT}_K^M(\alpha) = \int_{\phi((\operatorname{supp}\alpha)\cap K)} \phi^{-1\,*}\alpha\ .$$

Définition 5.56. Si α est une n-forme lisse sur M, le réel $\mathrm{INT}_K^M(\alpha)$ s'appelle *l'intégrale de α sur le compact K de la variété orientée M*, et se note $\int_K \alpha$.

Les deux conditions du théorème montrent que si $(\mathcal{U}_i, \phi_i)_{1\le i\le p}$ sont des cartes de l'atlas d'orientation de M dont les domaines recouvrent K, si $\mathcal{U}_0 = M \setminus K$ et si $(\chi_i)_{0\le i\le p}$ est une partition de l'unité associée au recouvrement de M par les $\mathcal{U}_i$, alors

$$\int_K \alpha = \sum_{i=1}^{p} \int_{K\cap\operatorname{supp}\chi_i\alpha} \chi_i\alpha = \sum_{i=1}^{p} \int_{\phi_i(K\cap\operatorname{supp}\chi_i\alpha)} \phi_i^{-1\,*}(\chi_i\alpha)\ ,$$

où le membre de droite est une somme d'intégrales sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cette formule donne une définition théorique de l'intégrale, parfaite pour démontrer des théorèmes abstraits, mais peu exploitable pour des calculs pratiques (les fonctions χ_i ne sont pas données par des formules explicites facilement manipulables dans des calculs). Une autre formule, ne faisant pas appel aux partitions de l'unité est donnée dans la proposition 5.76.

Remarque 5.57. La notion d'intégrale dépend du choix de l'orientation de M. Plus précisément, notons (M, ω) une variété orientée (c'est-à-dire M est une variété différentielle, munie de l'orientation représentée par la forme volume ω). Alors, pour toute n-forme différentielle α sur M on a

$$\mathrm{INT}_K^{(M,\omega)}(\alpha) = -\mathrm{INT}_K^{(M,-\omega)}\alpha\ .$$

Définition 5.58. On dit qu'un difféomorphisme local $f : M \to N$ entre deux variétés orientées *préserve l'orientation* si l'image réciproque de la forme volume de N est un multiple positif de la forme volume de M. De manière équivalente, f préserve l'orientation si pour toutes les cartes ϕ et ψ des atlas d'orientations de M et N pour lesquelles la composée $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est définie, cette composée est à jacobien positif.

Proposition 5.59. *Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation alors pour tout compact K de M et toute n-forme α on a*

$$\int_K f^*\alpha = \int_{f(K)} \alpha \,.$$

Proposition 5.60. 1. *Si α est une n-forme différentielle lisse à support compact, alors pour tout compact K contenant* $\operatorname{supp}\alpha$ *on a*

$$\int_K \alpha = \int_{\operatorname{supp}\alpha} \alpha \,.$$

2. *Si α est une n-forme différentielle lisse et si K et L sont deux compacts d'intersection négligeable, alors*

$$\int_{K\cup L} \alpha = \int_K \alpha + \int_L \alpha \,.$$

C. Application au théorème de la boule chevelue. Le résultat suivant peut s'obtenir comme une application de la théorie de l'intégration.

Théorème 5.61 (boule chevelue)**.** *Si n est pair, tout champ de vecteurs lisse sur S^n s'annule en au moins un point.*

Remarque 5.62. Si n est impair, il existe un champ de vecteurs lisse sur S^n partout non nul. En effet S^{2k-1} s'identifie à l'ensemble des $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ tels que $|z_1|^2 + \cdots + |z_k|^2 = 1$. On définit alors un champ de vecteurs lisse sur S^{2k-1} en posant $v_{(z_1,\dots,z_k)} = i(z_1, \dots, z_n)$.

5.7 Le théorème de Stokes

A. Domaines réguliers

Définition 5.63. Soit M une variété de dimension $n > 0$. Un *domaine régulier* de M est un compact non vide D de M tel que [15]

(1) $\overline{\operatorname{int} D} = D$

(2) le bord topologique $\partial D = \overline{D} \setminus \operatorname{int} D$ est soit vide, soit une hypersurface de M.

Proposition 5.64 (Structure des domaines réguliers)**.** *Soit D un domaine régulier de M.*

(a) Le domaine D possède un nombre finie de composantes connexes. Ces composantes connexes sont des domaines réguliers.

15. On note $\operatorname{int} D$ pour l'intérieur du sous-ensemble D de l'espace topologique M, c'est-à-dire : $\operatorname{int} D$ est le plus grand ouvert de M contenu dans D.

(b) Pour tout $x \in \partial D$, il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ de M dont le domaine contient x, et telle que $\phi(D \cap \mathcal{U}) = \phi(\mathcal{U}) \cap \{x_1 \leq 0\}$ et $\phi(\partial D \cap \mathcal{U}) = \phi(\mathcal{U}) \cap \{x_1 = 0\}$.

(c) Pour tout $x \in \operatorname{int} D$, il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset \operatorname{int} D$ contenant x, difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5.65. Une *variété différentielle à bord* de dimension $n > 0$ est un espace topologique M séparé et σ-compact, muni d'homéomorphismes $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ d'un ouvert de $\mathcal{U}$ de M dans un ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, tels que les $\mathcal{U}_i$ recouvrent M et tels que si $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ le changement de carte $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est lisse sur $\phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. Le *bord de M* [16], noté ∂M, est défini comme l'ensemble des points de M tels que pour une certaine carte $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ autour de x on a $\phi_i(x) \in \phi(\mathcal{U}_i) \cap \{x_1 = 0\}$. On peut montrer que si M est une variété à bord de dimension n, son bord est soit vide, soit une variété différentielle de dimension $n-1$. On dispose de deux exemples fondamentaux :

1. Les variétés différentielles définies dans la section 3 sont exactement les variétés différentielles à bord dont le bord est vide.
2. Si D est un domaine régulier d'une variété différentielle N, alors la proposition 5.64 montre que D est une variété à bord, et que ∂D est à la fois le bord topologique de D dans N et le bord de D en tant que variété à bord.

Le théorème du collier assure que toute variété compacte à bord est en fait un domaine régulier d'une variété différentielle. En d'autres termes, les domaines réguliers permettent d'obtenir toutes les variétés différentielles à bord compactes.

Nous passons maintenant à l'orientation des bords des domaines réguliers. Dans le cas des variétés de dimension 1, le bord d'un domaine régulier, s'il est non vide, est de dimension nulle. On rappelle (cf. remarque 5.31) que toute variété différentielle N de dimension 0 est orientable, et qu'une *orientation* de N est une fonction $\theta : N \to \pm 1$. De manière équivalente une orientation de N est la donnée d'une forme volume sur N, à multiplication par une fonction strictement positive près.

Proposition 5.66. *Soit M une variété différentielle et D un domaine régulier de M tel que $\partial D \neq \emptyset$. Alors il existe un champ de vecteur X sur M qui est* sortant *en tout $x \in \partial D$ c'est-à-dire tel que pour tout $x \in \partial D$ il existe $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ lisse telle que :*

(i) $\gamma(t) \in D$ si $t < 0$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(t) \in M \setminus D$ si $t > 0$,

(ii) $\gamma'(0) = X_x \notin T_x \partial D$

16. On prendra garde au fait que ∂M n'est pas égal au bord topologique du sous-ensemble M de M, lequel est toujours vide.

Définition 5.67. Si M est une variété différentielle orientée par une forme volume ω, et si D est un domaine régulier de M, alors ∂D est une variété orientable. Plus précisément, on appelle *orientation induite* sur ∂D l'orientation donnée par une forme volume $\iota_X w_{|\partial D}$ où X est un champ de vecteurs sortant sur ∂D et ι_X désigne le produit intérieur par X de la définition 5.38.

Remarque 5.68. On vérifie facilement que l'orientation induite sur ∂D ne dépend pas du choix du champ de vecteurs sortant X.

B. Le théorème de Stokes. Pour énoncer le théorème de Stokes dans le cas élémentaire des variétés de dimension 1, nous devons définir l'intégrale des formes différentielles sur les variétés compactes de dimension nulle.

Définition 5.69. Soit N une variété compacte de dimension 0 munie d'une orientation $\theta : N \to \{\pm 1\}$. Toute 0-forme α s'écrit sous la forme $\alpha = f\theta$ pour une unique fonction $f : N \to \mathbb{R}$ et on pose :

$$\int_N \alpha = \sum_{x \in N} f(x) \ .$$

Théorème 5.70. *Soit M une variété différentielle de dimension non nulle, D domaine régulier de M dont le bord est orienté par la normale sortante s'il est non vide. Pour tout $(n-1)$-forme différentielle lisse α sur M on a*

$$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha \ .$$

Exemples 5.71.
1. Si $D = M$ est de bord vide, alors $\int_M d\alpha = 0$ pour toute $(n-1)$ forme différentielle α.
2. Si $M = \mathbb{R}$ muni de l'orientation canonique donnée par la forme dx, et si $D = [a, b]$, alors $\partial D = \{a, b\}$, avec orientation induite θ telle que $\theta(b) = 1$ et $\theta(a) = -1$. Une 0-forme α sur $\mathbb{R}$ est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ et le théorème de Stokes redonne la formule fondamentale :

$$\int_{[a,b]} \alpha'(x)dx = \alpha(b) - \alpha(a) \ .$$

3. Si $M = \mathbb{R}^2$ munie de l'orientation canonique donnée par la forme $dx \wedge dy$ toute 1-forme α sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\alpha_{(x,y)} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

où P et Q sont deux fonctions lisses sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Stokes redonne la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right) dxdy \ .$$

5.8 Forme volume canonique des sous-variétés

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ se restreint en un produit scalaire sur chacun des espaces tangents, et on peut donc définir ce qu'est une base orthonormée de T_xM. Si de plus M est orientée par une forme volume ω, alors une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de T_xM est dite directe si $\omega_x(v_1, \dots, v_n) > 0$, voir la remarque 5.37.

Théorème 5.72. *Soit M une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$, de dimension $p > 0$.*

1. *Il existe une unique forme volume σ sur M telle que si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base orthonormée directe de T_xM on a $\sigma_x(v_1, \dots, v_n) = 1$.*
2. *De plus si $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation locale de M qui préserve l'orientation, alors*

$$F^*\sigma = \sqrt{\det \left[\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} | \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle \right]_{1 \le i,j \le p}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \ .$$

Définition 5.73. La forme volume σ du théorème précédent est appelée la *forme volume canonique* sur M. Si M est compacte, l'intégrale $\int_M \sigma$ est appelé le *volume* de la sous-variété M (Si $p = 1$ on dit aussi la *longueur* de M, si $p = 2$ on dit l'*aire* de M).

Remarque 5.74. Une p-forme linéaire α alternée de $\mathbb{R}^p$ a deux utilités. C'est à la fois une manière d'indiquer l'orientation (le signe de $\alpha(v_1, \dots, v_p)$ indique si la base $(v_1, \dots, v_p)$ est directe ou indirecte) et une manière de mesurer le volume (la valeur absolue $|\alpha(v_1, \dots, v_p)|$ mesure le p-volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$). La première propriété du théorème 5.72 montre que la notion de p-volume définie par σ_x sur T_xM coïncide avec la notion de p-volume usuelle, et justifie la terminologie de la définition 5.73.

Les formes volumes canoniques sont très utilisées en physique, où elles sont appelées "élement de longueur", "élément de surface" ou "élément de volume" suivant la dimension. L'exemple suivant donne une formule utilisant la forme volume canonique, qui possède de nombreuses applications en physique (cas $n = 2$ ou $n = 3$).

Exemple 5.75 (formule d'Ostrogradski)**.** Soit D un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$. On note $\vec{n}$ la normale unitaire sortante à ∂D. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, dont on note X_i les fonctions composantes. La *divergence* de X est la fonction $\operatorname{div} X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $(\operatorname{div} X)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x)$. L'égalité suivante est appelée *formule d'Ostrogradski* :

$$\int_{\partial D} \langle X | \vec{n} \rangle \sigma = \int_D \operatorname{div} X \, dx_1 \cdots dx_n \ .$$

Le membre de gauche de l'égalité est appelé le *flux de X à travers ∂D*. L'égalité est en fait un simple cas particulier du théorème de Stokes. En effet, notons $\omega = dx_1 \cdots dx_n$ la forme volume canonique sur $\mathbb{R}^n$. Alors

1. en utilisant l'unicité dans le théorème 5.72, on obtient $\sigma = \iota_{\vec{n}}\omega_{|\partial D}$,
2. en écrivant $X = \langle X|\vec{n}\rangle\vec{n} + \vec{t}$ où $\vec{t}$ est un champ de vecteurs tangent à ∂D, les propriétés des formes linéaires alternées donnent
$$\langle X|\vec{n}\rangle\sigma = \langle X|\vec{n}\rangle\iota_{\vec{n}}\omega_{|\partial D} = \iota_X\omega_{|\partial D}\ ,$$
3. le théorème de Stokes donne alors l'égalité :
$$\int_{\partial D}\langle X|\vec{n}\rangle\sigma = \int_D d(\iota_X\omega)\ ,$$
4. et finalement on peut calculer explicitement l'intégrande du membre de droite pour obtenir la formule d'Ostrogradski :
$$\begin{aligned} d(\iota_X\omega) &= d\left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}X_i dx_1\wedge\cdots\widehat{dx_i}\cdots\wedge dx_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\widehat{dx_i}\cdots\wedge dx_n\\ &= \operatorname{div} X\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\ . \end{aligned}$$

La proposition suivante est très pratique pour calculer concrètement des intégrales sur une variété (par exemple pour calculer le volume d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) pour laquelle on dispose de "paramétrisations par morceaux".

Proposition 5.76. *Soit M une variété orientée et K un compact de M. Soit $(D_i)_{1\le i\le p}$ une famille finie de compacts de $\mathbb{R}^n$ contenus dans des ouverts Ω_i, et $F_i : \Omega_i \to M$ des fonctions lisses dont les restrictions à $\mathrm{int}(D_i)$ sont des paramétrisations préservant l'orientation. On suppose que :*

(1) $K \setminus \bigcup_{i\in I} F_i(\mathrm{int}(D_i))$ est négligeable,

(2) les ouverts $F_i(\mathrm{int}(D_i))$ sont deux à deux disjoints.

Alors
$$\int_K \alpha = \sum_{i=1}^p \int_{D_i\cap F_i^{-1}(K)} F_i^*\alpha\ .$$

Exemple 5.77 (Intégrale sur les chemins)**.** Soit $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) :]a-\epsilon, b+\epsilon[\to \mathbb{R}^n$ un plongement. On oriente $\mathrm{Im}\,\gamma$ de façon à ce que γ préserve l'orientation. Soit $\alpha = f_1dx_1+\cdots+f_ndx_n$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^n$.
$$\int_{\gamma([a,b])}\alpha = \sum_{i=1}^n\int_{t=a}^b f_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)dt\ .$$

Si σ désigne la 1-forme canonique[17] sur $\operatorname{Im}\gamma$ on a pour toute fonction f lisse sur $\operatorname{Im}\gamma$:

$$\int_{\gamma([a,b])} f\sigma = \int_{t=a}^{b} f(\gamma(t))\,||\gamma'(t)||dt\ .$$

Exemple 5.78 (Coordonnées sphériques sur S^2)**.** L'application $F(\theta,\phi) = (R\cos\theta\cos\phi, R\sin\theta\cos\phi, R\sin\phi)$ définit un difféomorphisme de $]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur la sphère S^2_R de centre 0 et de rayon $R>0$, privée du méridien de Greenwich. L'orientation de S^2_R donnée par F coïncide avec l'orientation de S^2 par la normale extérieure sortante. Pour toute 2-forme différentielle sur S^2_R on a :

$$\int_{S^2_R} \alpha = \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} F^*\alpha\ .$$

Si σ désigne la 2-forme canonique[18] sur S^2_R on a pour toute fonction f lisse sur S^2 :

$$\int_{S^2_R} f\sigma = \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} f(F(\theta,\phi))\,R^2\sin\phi\,d\theta\,d\phi\ .$$

En particulier, si $f=1$ on obtient que l'aire de S^2_R vaut $4\pi R^2$.

17. La forme σ est souvent notée $d\ell$ par les physiciens, et appelé "élément de longueur".
18. La forme σ est souvent notée dS par les physiciens, et appelé "élément de surface".

5.9 Exercices du chapitre 5

Exercice 37. Produit tensoriel d'algèbres graduées.

1. Si A et B sont deux $\mathbb{k}$-algèbres graduées, vérifiez que la formule
$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{\deg a' \deg b}(aa') \otimes (bb')$$
(où b et a' sont des éléments homogènes de A et B) définit une structure d'algèbre graduée sur $A \otimes B$. Montrez que si A et B sont graduées commutatives alors $A \otimes B$ est graduée commutative.
2. On note $\iota_A : A \to A \otimes B$ et $\iota_B : B \to A \otimes B$ les morphismes d'algèbres définis par $\iota_A(a) = a \otimes 1_B$ et $\iota_B(b) = 1_A \otimes b$. Montrez que si $f : A \otimes C$ et $g : B \to C$ sont des morphismes d'algèbres entre algèbres graduées commutatives, il existe un unique morphisme d'algèbres $h : A \otimes B \to C$ tel que $h \circ \iota_A = f$ et $h \circ \iota_B = g$.
3. Montrez que pour tous les $\mathbb{k}$-modules V et W, on a un isomorphisme d'algèbres graduées $\Lambda(V \oplus W) \simeq \Lambda(V) \otimes \Lambda(W)$.

Exercice 38. L'algèbre symétrique. Si V est un $\mathbb{k}$-module, on note $S(V)$ le quotient de $T(V)$ par l'idéal engendré par les éléments $v \otimes w - w \otimes v$, pour $v, w \in V^2$. la classe d'un tenseur $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ dans $S(V)$ est simplement notée $v_1 \cdots v_n$. L'algèbre $S(V)$ est appelée *algèbre symmétrique sur* V.

1. Montrez que $S(V)$ est une $\mathbb{k}$-algèbre commutative.
2. On note $\iota : V \to S(V)$ l'inclusion canonique donnée par $\iota(v) = v$. Montrez que pour toute $\mathbb{k}$-algèbre commutative A, et pour toute application $\mathbb{k}$-linéaire $f : V \to A$ il existe un unique morphisme de $\mathbb{k}$-algèbres $\overline{f} : S(V) \to A$ tel que $\overline{f} \circ \iota = f$.
3. Montrez que si V et W sont deux $\mathbb{k}$-modules, on a un isomorphisme d'algèbres :
$$S(V \oplus W) \simeq S(V) \otimes S(W)$$
(où la $\mathbb{k}$-algèbre de droite est munie du produit donné par $(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac) \otimes (bd)$).
4. On suppose que $V = \mathbb{k}^n$ et on note V^* son dual $\mathbb{k}$-lineaire. Montrez que l'algèbre symmétrique $S(V^*)$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exercice 39. Une description alternative de l'algèbre extérieure. Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique nulle. Si $f : V^p \to \mathbb{k}$ est une forme p-linéaire, son antisymétrisée est la p-forme linéaire $\operatorname{alt} f$ définie par
$$\operatorname{alt} f(v_1, \ldots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \ .$$
(où $\mathfrak{S}_p$ désigne le groupe symétrique sur $\{1, \ldots, p\}$).

1. Vérifiez que $\mathrm{alt} f$ est une p-forme alternée, et que si $f = \mathrm{alt}\, f$ si et seulement si f est alternée.
2. Si f est une p-forme linéaire et g est une q-forme linéaire, on note $f \otimes g$ la $(p+q)$-forme linéaire définie par
$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = f(v_1, \ldots, v_p)g(v_{p+1}, \cdots, v_{p+q})\ .$$
On note $\mathrm{Alt}_p(V)$ l'espace vectoriel des formes p-linéaires sur V. Montrez que l'application bilinéaire $\mathrm{Alt}_p(V) \times \mathrm{Alt}_q(V) \to \mathrm{Alt}_{p+q}(V)$, $(f, g) \mapsto \mathrm{alt}(f \otimes g)$ définit une structure d'algèbre graduée, graduée commutative, sur $\mathrm{Alt}(V) = \bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Alt}_p(V)$.
3. Montrez que l'isomorphisme $\Bbbk$-linéaire $\phi : \Lambda(V^*) \to \mathrm{Alt}(V)$ défini par $\phi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det[f_i(v_j)]$ est un isomorphisme d'algèbres si $\mathrm{Alt}(V)$ est muni du produit défini à la question précédente.

Exercice 40. Restriction des formes différentielles.

1. Soit M une variété différentielle et N une sous-variété de M qui est fermée dans M. Soit α une p-forme différentielle sur N. Montrez qu'il existe une forme différentielle $\widetilde{\alpha}$ sur M telle que $\widetilde{\alpha}_{|N} = \alpha$.

   [Indication : utilisez une partition de l'unité pour vous ramener au cas où M est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ et N est un facteur de ce pavé ouvert.]
2. Le résultat subsiste-t-il si N n'est pas supposée fermée dans M ?

Exercice 41. Non-orientabilité du ruban de Moebius. Montrez que le ruban de Moebius (défini à l'exemple 3.43) est non orientable.

Exercice 42. Orientabilité et fibré des n-formes. Soit M une variété différentielle de dimension n. Montrez que M est orientable si et seulement si le fibré $\Lambda^n(T^*M)$ est trivialisable.

Exercice 43. Orientabilité des variétés parallélisables. On rappelle qu'une variété est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable. Montrez que toute variété parallélisable est orientable.

Exercice 44. Mesure de Haar. Soit G un groupe de Lie de dimension n. Montrez qu'il existe sur G une n-forme différentielle lisse non nulle ω telle que $L_g^*\omega = \omega$ pour tout $g \in G$. Montrez que cette forme différentielle est unique à une constante multiplicative près.

(Cette forme différentielle s'appelle "la" mesure de Haar de G - pour la justification du terme "mesure", voir l'exercice 51.).

Exercice 45. Un théorème de Jordan. Soit M une hypersurface compacte connexe de $\mathbb{R}^n$, définie comme lieu des zéros d'une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est une submersion au voisinage de M. On considère les deux ouverts $A = \{f > 0\}$ et $B = \{f < 0\}$.

1. Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble
$$C_\epsilon = \{x + t\frac{\mathrm{grad}_x f}{||\mathrm{grad}_x f||} \mid (x,t) \in M \times [0,\epsilon[\}$$
soit un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, inclus dans A.
2. Soit $y \in A \setminus C$, et soit $z \in \overline{C_{\epsilon/2}}$ tel que $d(y,z)$ soit minimale. Montrez que le segment $[y,z]$ est dans A.
3. En déduire que A est connexe.
4. Montrez de même que B est connexe, et en déduire que $\mathbb{R}^n \setminus M$ est la réunion de deux ouverts connexes disjoints, chacun des ouverts étant de bord M, et qu'un seul de ces deux ouverts est borné.

Exercice 46. Propriétés topologiques des domaines réguliers.

1. Montrez qu'un domaine régulier est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.
2. Soit M une variété connexe. Montrez que si D est un domaine régulier de M de bord vide, alors $D = M$. (en particulier, ceci implique que M est compacte)

Exercice 47. Domaines réguliers de $\mathbb{R}^n$. Montrez que tout hypersurface compacte H de $\mathbb{R}^n$ est le bord d'un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$.

[Indication : le théorème 5.41 donne une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est une submersion au voisinage H et telle que $H = f^{-1}(0)$. Montrez que quitte à changer f par un signe, on peut supposer que f est minorée, et que $f^{-1}(]-\infty, 0])$ est un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ dont le bord topologique est H.]

Exercice 48. Volume des boules et des sphères. Soit B^{n+1} la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et S^n la sphère unité (orientée par la normale extérieure sortante). Si M est une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{vol}_k(M)$ son k-volume.

1. Montrez que la forme volume canonique sur S^n est égale à la restriction à S^n de la n-forme
$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} .$$
2. Déduisez-en que $\mathrm{vol}_{n+1}(B^{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{vol}_n(S^n)$ (Utilisez le théorème de Stokes). Déduisez-en la valeur de $\mathrm{vol}_2(S^2)$

Exercice 49. Variétés produit. Soient M et N deux variétés différentielles. On notre $\mathrm{pr}_M : M \times N \to M$ et $\mathrm{pr}_N : M \times N \to N$ les projections canoniques. Si α est une forme différentielle sur M et β est une forme différentielle [19] sur N on note $\alpha \times \beta$ la forme différentielle définie par :

$$\alpha \times \beta := \mathrm{pr}_M^* \alpha \wedge \mathrm{pr}_N^* \beta \ .$$

1. Montrez que si α et β sont des formes volumes, alors $\alpha \times \beta$ est une forme volume sur $M \times N$. On appellera *orientation canonique de* $M \times N$ l'orientation de $M \times N$ correspondant à cette forme volume.
2. Montrez que si M est une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^m$ et N est une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$, de formes volumes canoniques respectives σ_M et σ_N, la forme volume canonique sur $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est égale à $\sigma_M \times \sigma_N$.
3. Montrez que si M est orientée, d'atlas d'orientation $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ et si N est orientée, d'atlas d'orientation $(\mathcal{V}_j, \psi_j)$ et alors l'orientation canonique de $M \times N$ est donnée par l'atlas $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{V}_j, \phi_i \times \psi_j)$.
4. Montrez que si M et N sont orientées et $M \times N$ est munie de l'orientation canonique alors pour toutes les formes $\alpha \in \Omega^{\dim M}(M)$ et $\beta \in \Omega^{\dim N}(N)$ et tous les compacts $K \subset M$ et $L \subset N$ on a
$$\int_{K \times L} \alpha \times \beta = (\int_K \alpha)(\int_L \beta) \ .$$

Exercice 50. Coordonnées sphériques. Soit $F :]0, +\infty[\times S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $F(r, u) = ru$. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante, dans laquelle σ est la forme volume canonique sur S^n et l'opérateur $\times$ est celui de l'exercice précédent :

$$F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}) = r^n dr \times \sigma \ .$$

1. On considère l'application bilinéaire $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $\widetilde{F}(r, u) = ru$. Calculez la différentielle $D_{(r,u)}\widetilde{F}$.
2. On fixe un point $(r, u) \in]0, +\infty[\times S^n$. Notons $b_2^S, \ldots, b_{n+1}^S$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui forment une BOND de $T_u S^n$. On pose :
$$\begin{cases} b_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} & \\ b_i = (0, b_i^S) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} & \text{si } 2 \leq i \leq n+1. \end{cases} .$$
Calculez $T_{(r,u)}F(b_i)$ pour tout i.
3. Si $\omega = F^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1})$, montrez que $\omega_{(r,u)}(b_1, \ldots, b_{n+1}) = r^n$.
4. Concluez.

19. La forme différentielle $\alpha \times \beta$ est aussi souvent notée $\alpha \wedge \beta$. Par exemple, si on considère deux copies de $\mathbb{R}$ munies des formes canoniques dx et dy respectivement, on note $dx \wedge dy$ au lieu de $dx \times dy$.

Exercice 51. Formes volumes et mesures. Soit M une variété et ω une forme volume sur M définissant une orientation de M. On note $C_c(M)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur M à support compact.

1. Montrez qu'il existe une unique forme linéaire positive $L_\omega : C_c(M) \to \mathbb{R}$ telle que
   (a) Pour toute fonction f lisse à support compact, $L_\omega(f) = \int_M f\omega$.
   (b) Si f est continue à support contenu dans un compact K et si (f_k) est une suite de fonctions lisses à support contenu dans K qui converge uniformément vers f alors $L_\omega(f) = \lim_{k\to\infty} L_\omega(f_k)$.
2. En déduire qu'il existe une mesure μ sur M telle que pour tout fonction lisse f on a $\int_M f d\mu = \int_M f\omega$ (où l'intégrale de gauche est prise au sens de la théorie de la mesure, et la notation "$d\mu$" n'a donc rien à voir avec la différentielle des formes)

   [Solution : utilisez le théorème de représentation de Riesz !]

6 Cohomologie de De Rham

6.1 Introduction

Le langage des catégories. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée :

(i) d'une collection d'objets $X, Y, Z \dots$,

(ii) pour chaque paire d'objets, d'un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de morphismes de X vers Y. Un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sera noté $f : X \to Y$ et appelé un morphisme de source X et de but Y,

(iii) d'une loi de composition, c'est-à-dire d'une application

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & (f,g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

pour chaque triplet d'objets X, Y, Z, qui possède deux propriétés. La loi de composition est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour tout triplet (f, g, h) d'applications composables, et elle possède des morphismes identité : pour chaque objet Y, il existe [20] un morphisme $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ tel que $f \circ \mathrm{id}_Y = f$ et $\mathrm{id}_Y \circ g = g$ pour tout morphisme f de source Y et tout morphisme g de but Y.

Les exemples de catégories sont nombreux. Un exemple basique est la **catégorie des ensembles** dont les objets sont les ensembles, dont les morphismes sont les applications et dont la loi de composition est donnée par la composée usuelle des applications. Plus généralement, si **"truc"** désigne un type d'objet mathématique de la liste non exhaustive suivante : les groupes, les groupes abéliens, les $\Bbbk$-espaces vectoriels, les $\Bbbk$-algèbres, les $\Bbbk$-algèbres graduées, les espaces mesurés, les espaces topologiques, les variétés différentiables..., on dispose d'une **catégorie des trucs** dont les objets sont les trucs, les morphismes sont les morphismes de trucs [21], et la loi de composition est donnée par la composée usuelle.

Remarque 6.1. La notion de catégorie est très souple, et on dispose de nombreux autres types d'exemples. Par exemple, à partir d'une $\Bbbk$-algèbre A, on peut fabriquer une catégorie $\bullet_A$ avec un unique objet $\bullet$, dont l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ est égal à A, et dont la loi de composition est donné par le produit de A : $a \circ b := ab$. Les catégories que nous utiliserons seront plutôt du type "catégories des trucs".

Un *foncteur* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la donnée :

(i) pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

20. Exercice élémentaire : vérifiez que le morphisme id_Y est unique.

21. Pour les espaces mesurés, les morphismes sont les applications mesurables, pour les espaces topologiques les applications continues, pour les variétés différentielles, les applications lisses.

(ii) pour chaque morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de $\mathcal{D}$,

telle que F préserve la composition : $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour toute paire de morphismes composables (f, g) et les identités : $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$.

Les exemples de foncteurs abondent. Un premier type d'exemple entre "catégories de trucs" est fourni par des "constructions sur les trucs". Ainsi, si $\Bbbk$ est un anneau commutatif, le produit tensoriel par un $\Bbbk$-module U définit un foncteur :

$$\begin{array}{rccc} - \otimes U : & \Bbbk\text{-modules} & \to & \Bbbk\text{-modules} \\ & V & \mapsto & V \otimes U \\ & f & \mapsto & f \otimes \mathrm{id}_U \end{array} .$$

L'algèbre extérieure, le fibré tangent et le groupe fondamental définissent des foncteurs :

$$\begin{array}{rl} \Lambda : & \Bbbk\text{-modules} \to \Bbbk\text{-algèbres graduées} , \\ T : & \text{variétés différentielles} \to \text{variétés différentielles} , \\ \pi_1 : & \mathrm{Top}_* \to \text{groupes} , \end{array}$$

où Top_* désigne la catégorie des espaces topologiques pointés, et des applications continues préservant les points de base, avec la composition usuelle. Un deuxième type d'exemple est fourni par l'oubli d'une partie de la structure des trucs. Ainsi, on a un foncteur d'oubli (la lettre $\mathcal{U}$ est la première lettre de "underlying" = "sous-jacent" en anglais) :

$$\mathcal{U} : \text{groupes} \to \text{ensembles}$$

qui envoie un groupe sur l'ensemble sous-jacent (on "oublie" l'existence de la loi de groupe) et qui envoie un morphisme de groupes sur l'application sous-jacente (on "oublie" la compatibilité avec la loi de groupe).

Certaines constructions naturelles importantes ne définissent pas des foncteurs, car elles produisent des applications "dans le mauvais sens". Ce sont des *foncteurs contravariants*, c'est-à-dire la donnée

(i) pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

(ii) pour chaque morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $F(f) : F(Y) \to F(X)$ de $\mathcal{D}$ ("dans le mauvais sens"),

telle que F préserve la composition : $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ pour toute paire de morphismes composables (f, g) et les identités : $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$. Ainsi, la dualité des espaces vectoriels et l'algèbre des formes différentielles définissent des foncteurs contravariants :

$$\begin{array}{rccl} -^* : & \Bbbk\text{-espaces vectoriels} & \to & \Bbbk\text{-espaces vectoriels} , \\ \Omega(-) : & \text{variétés différentielles} & \to & \mathbb{R}\text{-algèbres graduées} . \end{array}$$

La cohomologie de De Rham. Dans cette dernière partie, nous allons construire la cohomologie de De Rham. C'est un foncteur contravariant :

$$H_{DR} : \text{variétés différentielles} \to \mathbb{R}\text{-algèbres graduées}\ .$$

La $\mathbb{R}$-algèbre de cohomologie de De Rham $H_{DR}(M)$ peut être pensée comme un analogue de la $\mathbb{R}$-algèbre des formes différentielles $\Omega(M)$, mais $H_{DR}(M)$ contient moins d'information sur M (la cohomologie de De Rham d'une variété compacte est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie) et elle plus est facilement calculable.

La cohomologie de De Rham est construite à partir de deux ingrédients. Le premier ingrédient, de nature géométrique, est l'algèbre des formes différentielles, présentée dans la section 5. Le deuxième ingrédient, de nature algébrique, est l'algèbre homologique, que nous exposons maintenant.

6.2 Un peu d'algèbre homologique

Dans cette section, $\Bbbk$ est un anneau. Nous utiliserons les résultats de cette section pour $\Bbbk = \mathbb{R}$, mais les énoncés et leurs démonstrations sont les mêmes pour un anneau quelconque.

A. Complexes et homologie.

Définition 6.2. Un *complexe de* $\Bbbk$*-modules* C est la donnée d'une famille de $\Bbbk$-modules $(C^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et d'applications $\Bbbk$-linéaires $d^i : C^i \to C^{i+1}$ telles que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout i. Les applications d^i sont les *différentielles* du complexe C, les éléments de C^i sont les *éléments de degré* i de C.

Un *morphisme de complexes* $f : C \to D$ est une famille d'applications $\Bbbk$-linéaires $f^i : C^i \to D^i$, $i \in \mathbb{Z}$, satisfaisant $d^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i$ pour tout i.

La *composée* de deux morphismes $g : D \to E$ et $f : C \to D$ est le morphisme $g \circ f : C \to E$ défini par $(g \circ f)^i = g^i \circ f^i$ pour tout i.

Notation 6.3. Les complexes de $\Bbbk$-modules et leurs morphismes forment une catégorie qu'on notera $\mathrm{Ch}(\Bbbk)$.

Les applications d^i d'un complexe sont souvent simplement toutes notées d, en omettant l'exposant. Un complexe peut être représenté comme un diagramme

$$C : \quad \cdots \to C^i \xrightarrow{d} C^{i+1} \xrightarrow{d} C^{i+2} \to \cdots$$

dans lequel $d \circ d = 0$. Un morphisme de complexe $f : C \to D$ peut être représenté comme un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & C^i \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^i"] & C^{i+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & C^{i+2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & D^i \arrow[r, "d"] & D^{i+1} \arrow[r, "d"] & D^{i+2} \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Notre exemple principal de complexe sera le suivant.

Exemple 6.4. Si M est une variété différentielle, alors les formes différentielles sur M forment un complexe :

$$\Omega(M): \quad \cdots \to 0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

et pour toute application lisse $f : M \to N$, l'image réciproque par f définit un morphisme de complexes : $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$. Les formes différentielles sur les variétés différentielles définissent donc un foncteur contravariant :

$$\Omega : \text{ variétés lisses} \to \mathrm{Ch}(\mathbb{R}) \;.$$

Définition 6.5. Pour tout complexe C, les éléments de $\mathrm{Ker}\,(d : C^i \to C^{i+1})$ s'appellent les *cocycles de degré i* de C. Les éléments de $\mathrm{Im}\,(d : C^{i-1} \to C^i)$ s'appellent les *cobords de degré i* de C. Le $\Bbbk$-module quotient :

$$H^i(C) := \frac{\mathrm{Ker}(\,d : C^i \to C^{i+1})}{\mathrm{Im}\,(d : C^{i-1} \to C^i)} = \frac{\text{cocycles de deg } i}{\text{cobords de deg } i}$$

s'appelle la *cohomologie de degré i* de C. Si x est un cocycle de degré i, on note $[x]$ sa classe dans $H^i(C)$. Tout morphisme de complexes $f : C \to D$ induit une application $\Bbbk$-linéaire :

$$\begin{array}{rccc} H^i(f): & H^i(C) & \to & H^i(D) \\ & [x] & \mapsto & [f^i(x)] \end{array} .$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la cohomologie de degré i définit un foncteur

$$H^i : \mathrm{Ch}(\Bbbk) \to \Bbbk\text{-modules} \;.$$

Les deux outils principaux pour calculer l'homologie d'un complexe sont les homotopies et les suites exactes longues.

B. Homotopies.

Définition 6.6. Deux morphismes de complexes $f, g : C \to D$ sont *homotopes* s'il existe une famille d'applications $\Bbbk$-linéaires $h^i : C^i \to D^{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$, telles que

$$d \circ h^i + h^{i+1} \circ d = g^i - f^i$$

pour tout i. La famille $(h^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ s'appelle une *homotopie* entre f et g. On notera $f \sim g$ si f est homotope à g.

Proposition 6.7. *1. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\Bbbk)}(C, D)$.

2. La relation d'homotopie est stable par combinaison linéaire : si on a quatre morphismes $f, f', g, g'; : C \to D$ tels que $f \sim g$ et $f' \sim g'$ alors pour tous les scalaires λ et μ on a $\lambda f + \mu f' \sim \lambda g + \mu g'$.

3. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition : si $f, f' : C \to D$ sont homotopes et $g, g' : D \to E$ sont homotopes, alors $g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont homotopes.*

Définition 6.8. Un morphisme de complexes $f : C \to D$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : D \to C$ telle que $f \circ g \sim \mathrm{id}_D$ et $g \circ f \sim \mathrm{id}_C$.

L'importance de la relation d'homotopie réside dans le résultat suivant.

Théorème 6.9. *Si $f, g : C \to D$ sont deux morphismes de complexes homotopes alors $H^i(f) = H^i(g)$ pour tout i. Par conséquent si $f : C \to D$ est une équivalence d'homotopie, alors $H^i(f)$ est un isomorphisme pour tout i.*

Remarque 6.10. Un morphisme de complexes $f : C \to D$ est un *quasi-isomorphisme* si $H^i(f)$ est un isomorphisme pour tout i. Le théorème précédent montre que les équivalences d'homotopie sont des quasi-isomorphismes. La réciproque est fausse, voir l'exercice 55.

C. Suites exactes longues en cohomologie.

Définition 6.11. Une *suite exacte courte* de complexes est un diagramme de complexes

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

tel qu'en chaque degré i, le diagramme de $\Bbbk$-modules

$$0 \to C^i \xrightarrow{f^i} D^i \xrightarrow{g^i} E^i \to 0$$

est une suite exacte courte. (C'est-à-dire : f^i est injective, g^i est surjective et $\mathrm{Im}\, f^i = \mathrm{Ker}\, g^i$.)

Le résultat du théorème suivant permet de calculer la cohomologie cohomologie d'un complexe contenu dans une suite exacte courte à partir de la cohomologie des deux autres. (On rappelle qu'une suite exacte longue est une suite d'applications $\Bbbk$-linéaires dans laquelle l'image de chaque application est égale au noyau de la suivante.)

Théorème 6.12. *Si $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ est une suite exacte courte de complexes, alors on a une suite exacte longue en cohomologie :*

$$\cdots \xrightarrow{H^{i-1}(g)} H^{i-1}(E) \xrightarrow{\partial} H^i(C) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(D) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(E) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(C) \xrightarrow{H^{i+1}(f)} \cdots$$

L'application ∂ du théorème précédent s'appelle le *connectant* de la suite exacte longue. Il est défini de la manière suivante. Si $c \in H^i(E)$, choisissons un cocycle x de degré i tel que $c = [x]$. Comme $g^i : D^i \to E^i$ est surjective, on peut trouver un élément $w \in D^i$ tel que $g^i(w) = x$. Il existe alors un unique $v \in C^{i+1}$ tel que $f^{i+1}(v) = dw$. On montre alors que v est un cocycle de degre $i+1$ de C, dont la classe $[v] \in H^{i+1}(C)$ ne dépend ni du choix du cocycle x représenant la classe c, ni du choix de l'élément intermédiaire w. On pose alors :

$$\partial(c) := [v]\ .$$

La définition du connectant n'est en général pas d'un grand secours pour faire des calculs concrets.

Théorème 6.13 ("Bonus" du théorème précédent)**.** *De plus, si on a un diagramme commutatif de complexes :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D \arrow[r, "g'"] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes courtes de complexes, alors les suites exactes longues en cohomologie s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "H^{i-1}(g)"] & H^{i-1}(E) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "H^{i-1}(\gamma)"] & H^i(C) \arrow[r, "H^i(f)"] \arrow[d, "H^{i-1}(\alpha)"] & H^i(D) \arrow[r, "H^i(g)"] \arrow[d, "H^{i-1}(\beta)"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "H^{i-1}(g')"] & H^{i-1}(E') \arrow[r, "\partial'"] & H^i(C') \arrow[r, "H^i(f')"] & H^i(D') \arrow[r, "H^i(g')"] & \cdots \end{tikzcd}\ .$$

D. Algèbres différentielles graduées.

Définition 6.14. Une $\Bbbk$-*algèbre différentielle graduée* est une $\Bbbk$-algèbre graduée $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, munie de différentielles $d : A^i \to A^{i+1}$ telles que $d\circ d = 0$, et vérifiant la règle de Leibniz :

$$d(ab) = (da)b + (-1)^i a(db) \qquad \text{pour tout } a \in A^i \text{ et } b \in A^j.$$

Un *morphisme de* $\Bbbk$-*algèbres différentielles graduées* est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $f : A \to B$ qui préserve le degré et la différentielle.

Notation 6.15. Les $\Bbbk$-algèbres différentielles graduées et leurs morphismes (avec la composition usuelle des applications) forment une catégorie qu'on notera $\mathrm{ADG}(\Bbbk)$.

Notre exemple principal d'algèbre différentielles graduées est le suivant.

Exemple 6.16. Si M est une variété différentielle, alors l'algèbre des formes différentielles sur M est une $\mathbb{R}$-algèbre différentielle graduée (nulle en degrés strictement négatifs) et pour toute application lisse $f : M \to N$, l'image réciproque par f définit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres différentielles graduées $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$. Les formes différentielles sur les variétés différentielles définissent donc un foncteur contravariant :

$$\Omega : \text{ variétés lisses} \to \mathrm{ADG}(\mathbb{R})\ .$$

Les $\Bbbk$-algèbres différentielles graduées sont des complexes de $\Bbbk$-modules, on peut donc parler de leur cohomologie. La principale propriété de leur cohomologie est la suivante.

Proposition 6.17. *Si A est une algèbre différentielle graduée alors les applications*

$$\begin{array}{ccc} H^i(A)\times H^j(A) & \to & H^{i+j}(A) \\ ([x],[y]) & \mapsto & [xy] \end{array}$$

définissent une structure d'algèbre graduée sur $H(A) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(A)$. De plus, si $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres différentielles graduées alors le morphisme induit en cohomologie $H(f) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(f) : H(A) \to H(B)$ est un morphisme d'algèbres graduées. En conséquence, la cohomologie définit un foncteur :

$$H : \mathrm{ADG}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\text{-}\textit{algèbres graduées}\,.$$

6.3 Cohomologie de De Rham

Définition 6.18. Le foncteur de cohomologie de De Rham est le foncteur contravariant :

$$H_{DR} : \text{variétés lisses} \to \mathbb{R}\text{-algèbres graduées}$$

obtenu comme la composée du foncteur contravariant des formes différentielles et du foncteur de cohomologie :

$$\text{variétés lisses} \xrightarrow{\Omega} \mathrm{ADG}(\mathbb{R}) \xrightarrow{H} \mathbb{R}\text{-algèbres graduées}\,.$$

Description concrète. Si M est une variété lisse, on dit qu'une forme différentielle α sur M est *fermée* si c'est un cocycle, c'est-à-dire si $d\alpha = 0$, et qu'elle est *exacte* c'est un cobord, c'est-à-dire s'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de cohomologie de De Rham de degré i de M est défini par :

$$H^i_{DR}(M) = \frac{i\text{-formes différentielles fermées}}{i\text{-formes différentielles exactes}} \qquad \text{si } i > 0,$$

$$H^0_{DR}(M) = 0\text{-formes différentielles fermées}\,,$$

$$H^i_{DR}(M) = 0 \qquad \text{si } i < 0.$$

Si on note $[\alpha]$ la classe d'une forme fermée α, alors

$$H_{DR}(M) = \bigoplus_{i\geq 0} H^i_{DR}(M)$$

est une algèbre graduée, graduée commutative, dont le produit est induit par le produit des formes différentielles :

$$[\alpha][\beta] = [\alpha \wedge \beta] \ .$$

L'unité de $H_{DR}(M)$ est la classe de la fonction constante égale à 1 sur M. Toute application lisse $f : M \to N$ induit un morphisme d'algèbres graduées :

$$\begin{array}{rccc} H_{DR}(f) & : H_{DR}(N) & \to & H_{DR}(M) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f^*\alpha] \end{array} .$$

Les propriétés de fonctorialité signifient que $H_{DR}(g \circ f) = H_{DR}(f) \circ H_{DR}(g)$ et $H_{DR}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{H_{DR}(M)}$.

Observations élémentaires.

(1) Si M a pour composantes connexes les variétés $(M_a)_{a\in A}$, alors la donnée d'une i-forme différentielle α sur M est équivalente à la donnée d'une i-forme différentielle α_a sur chaque M_a, et α est fermée (resp. exacte) si et seulement si chaque α_a l'est. On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels en tout degré i :

$$H^i_{DR}(M) = \prod_{a\in A} H^i_{DR}(M_a) \ .$$

On peut ainsi restreindre l'étude de la cohomologie de De Rham aux variétés connexes.

(2) Les 0-formes différentielles exactes sont les fonctions lisses sur M dont la différentielle est nulle, c'est-à-dire des fonctions qui sont localement constantes sur M. On a donc :

$$\begin{aligned} H^0_{DR}(M) &= \{\text{applications } f : M \to \mathbb{R} \text{ localement constantes}\} \\ &= \{\text{applications } f : \pi_0(M) \to \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

où $\pi_0(M)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de M. En particulier, M est connexe si et seulement si le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H^0_{DR}(M)$ est de dimension 1.

(3) Regardons maintenant ce qui se passe en hauts degrés. Si $i > \dim M$, les i-formes différentielles sur M sont nulles, et on a donc

$$H^i_{DR}(M) = 0 \text{ si } i > \dim M.$$

Le plus haut degré pour lequel la cohomologie de De Rham peut ne pas être nulle est le degré $i = \dim M$. Plus précisément :

$$H^{\dim M}_{DR}(M) \neq 0 \text{ si } M \text{ est compacte et orientable.}$$

En effet, si ω est une forme volume sur M, c'est une forme degré égal à $\dim M$ qui est fermée (car en degré supérieur toutes les formes sont nulles) qui ne peut pas être exacte car si on avait $d\alpha = \omega$ alors on aurait $0 < \mathrm{vol}\,(M) = \int_M \omega = 0$ (la dernière égalité venant du théorème de Stokes), ce qui est évidemment impossible. Nous verrons plus loin une description plus fine de $H^{\dim M}_{DR}(M)$.

6.4 Homotopies

A. Homotopies lisses.

Définition 6.19. Deux applications lisses $f, g : M \to N$ sont *différentiablement homotopes* s'il existe une application lisse $H : M \times \mathbb{R} \to N$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in M$. L'application H est appelée une *homotopie lisse* entre f et g.

Il faut penser à une homotopie lisse comme à une "déformation lisse" qui permet de transformer l'application f en l'application g. Le principal résultat concernant les applications différentiablement homotopes est le suivant.

Théorème 6.20. *Si $f, g : M \to N$ sont deux applications lisses différentiablement homotopes, alors $H_{DR}(f) = H_{DR}(g)$.*

Corollaire 6.21 ("Le lemme de poincaré")**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe étoilé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute forme différentielle fermée sur $\mathcal{U}$ est exacte.*

B. Homotopies continues.

Définition 6.22. Deux applications continues $f, g : X \to Y$ entre deux espaces topologiques sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \to Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Si f et g sont homotopes, on note $f \sim g$. L'application H s'appelle une *homotopie* entre f et g.

Exemple 6.23. Si $f, g : X \to C$ sont à valeurs dans une partie convexe d'un espace vectoriel topologique alors $f \sim g$. En effet on peut poser $H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$.

Proposition 6.24.

1. *Être homotope est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X dans Y.*
2. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition : si $f, f' : X \to Y$ sont homotopes et $g, g' : Y \to Z$ sont homotopes, alors $g \circ f$ et $g' \circ f'$ sont homotopes.*

Théorème 6.25. *Soient M et N deux variétés lisses.*

1. *Deux applications lisses $f, g : M \to N$ sont homotopes si et seulement si elles sont différentiablement homotopes.*

2. *Toute application continue $f : M \to N$ est homotope à une application lisse.*

Nous ne démontrons le théorème 6.25 que dans le cas où N est une variété compacte, on renvoie à [G, Chap IV, Prop 4.6 et Cor 4.11] pour le cas général. D'après le théorème de plongement de Whitney, on peut supposer que N est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Notre démonstration repose sur deux ingrédients. Le premier est un résultat de densité. La notation $||\cdots||_\infty$ y désigne comme d'habitude la quantité $||h||_\infty = \sup_{x\in X} ||f(x)||$, où la norme de droite est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 6.26. *Soit N une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, X une variété lisse, et $f : X \to N$ une fonction continue. On suppose*[22] *que f est lisse au voisinage d'un fermé $A \subset X$. Alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe une application lisse $f^{\text{lisse}} : X \to N$ telle que :*

(1) $f(x) = f^{\text{lisse}}(x)$ pour $x \in A$,

(2) $||f - f^{\text{lisse}}||_\infty < \epsilon$.

Le deuxième ingrédient relie ϵ-approximation et homotopie.

Théorème 6.27. *Soit N une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ et X une variété lisse. Il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout couple de fonctions continues $f_1, f_2 : X \to N$ tel que que $||f_1 - f_2||_\infty < \epsilon$, il existe une homotopie à valeurs dans N entre f_1 et f_2.*

Nous renvoyons à l'exercice 30 du devoir maison présenté dans la section 4.5 pour une démonstration guidée de ces deux résultats – qui reposent tous les deux sur le théorème du voisinage tubulaire 5.44. Nous indiquons maintenant comment utiliser ces deux résultats pour démontrer le théorème 6.25.

Démonstration du théorème 6.25. (1) Si deux applications lisses sont différentiablement homotopes, elles sont clairement homotopes. Inversement, supposons que f et g sont homotopes via une homotopie continue $H : M \times I \to N$. Posons $\overline{H} : M \times \mathbb{R} \to N$ l'application continue définie par

$$\overline{H}(x,t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t \leq \frac{1}{4}, \\ H(x, 2t - \frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ g(x) & \text{si } t \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Alors $\overline{H}$ est lisse sur le fermé $A = M \times]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, le théorème 6.26 fournit une application lisse $\overline{H}^{\text{lisse}} : M \times \mathbb{R} \to N$ qui est une homotopie lisse entre f et g. L'assertion (2) est une simple conséquence des théorèmes 6.26 et 6.27 (prendre $g = f^{\text{lisse}}$). □

22. Si f n'est lisse nulle part, l'hypothèse est satisfaite avec $A = \emptyset$.

C. Applications topologiques

Définition 6.28. On dit que $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. On dit que deux espaces topologiques X et Y *ont même type d'homotopie* s'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y.

Exemples 6.29. (1) Si f est un homéomorphisme, alors f est une équivalence d'homotopie. En particuliers deux espaces topologiques homéomorphes ont même type d'homotopie.

(2) Un espace topologique X est *contractile* s'il a le type d'homotopie d'un point. L'espace X est contractile si et seulement si l'application id_X est homotope à une application constante.

Par exemple, si C est une partie convexe étoilée d'un espace vectoriel topologique, alors C est contractile.

(3) Soit A une partie d'un espace topologique X. Une *rétraction par déformation forte de X sur A* est une application continue $r : X \times [0, 1] \to X$ telle que

  (i) $r(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$, et
  (ii) $r(x, 1) \in A$ pour tout $x \in X$, et
  (iii) $r(a, t) = a$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in [0, 1]$

S'il existe une rétraction par déformation forte de X sur A alors l'inclusion $A \subset X$ est une équivalence d'homotopie.

Par exemple $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ et S^{n-1} ont le même type d'homotopie.

Théorème 6.30. *Si deux variétés différentielles M et N ont même type d'homotopie, alors il existe une application lisse $f : M \to N$ qui induit un isomorphisme en cohomologie de De Rham.*

Le théorème 6.30 peut sembler à juste titre surprenant. En effet, on a défini la cohomologie de De Rham à partir de la structure différentielle d'une variété. Mais malgré cela la cohomologie de De Rham ne dépend que du type d'homotopie de l'espace topologique sous-jacent ! !

Le théorème 6.30, combiné au fait que $H^{\dim M}_{DR}(M) \neq 0$ pour une variété compacte orientable, possède des applications topologiques remarquables.

Corollaire 6.31. *La sphère S^n n'est pas contractile*[23]*. Plus généralement, deux variétés compactes orientables de dimension différentes n'ont pas le même type d'homotopie.*

23. On remarquera que pour $n > 1$, S^n est simplement connexe. Pour les espaces topologiques, on montre dans le cours sur le groupe fondamental que X contractile $\Rightarrow X$ simplement connexe. La non contractilité de S^n montre que la réciproque est fausse.

Corollaire 6.32 (Théorème d'invariance de la dimension)**.** *Il n'existe pas d'homéomorphisme* $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^p$ *si* $n \neq p$.

Le résultat suivant peut se démontrer avec les même techniques que le théorème 6.30. C'est un résultat clé dans de nombreux domaines, pour plus de détails autour de l'histoire et des utilisations de ce résultat, on pourra consulter :

[P] S. Park, Ninety years of the Brouwer fixed point theorem, Vietnam J. Math. 27 (1999), no. 3, 187–222.

Théorème 6.33 (Point fixe de Brouwer)**.** *Soit* $n \geq 0$ *et* $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$. *Toute application continue* $f : D^n \to D^n$ *admet un point fixe.*

6.5 La suite de Mayer-Vietoris

A. La théorème de Mayer-Vietoris. Le théorème suivant permet de calculer la cohomologie d'une variété lisse M à partir de la cohomologie de deux morceaux $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et de la cohomologie de l'intersection $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ [24].

Théorème 6.34 (Suite longue de Mayer-Vietoris)**.** *Soit* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *deux ouverts d'une variété lisse* M, *tels que* $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = M$. *Alors on a une suite exacte longue en cohomologie de De Rham :*

$$\begin{aligned}0 \to H^0_{DR}(M) \to H^0_{DR}(\mathcal{U}) \oplus H^0_{DR}(\mathcal{V}) \to H^0_{DR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{\partial} H^1_{DR}(M) \to \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial} H^i_{DR}(M) \to H^i_{DR}(\mathcal{U}) \oplus H^i_{DR}(\mathcal{V}) \to H^i_{DR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}_{DR}(M) \to \cdots\end{aligned}$$

dans laquelle les applications qui préservent le degré sont données par :

$$\begin{array}{ccc} H^i_{DR}(M) & \to & H^i_{DR}(\mathcal{U}) \oplus H^i_{DR}(\mathcal{V}) \\ [\alpha] & \mapsto & [\alpha_{|\mathcal{U}}] - [\alpha_{|\mathcal{V}}] \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} H^i_{DR}(\mathcal{U}) \oplus H^i_{DR}(\mathcal{V}) & \to & H^i_{DR}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \\ [\alpha] + [\beta] & \mapsto & [\alpha_{|\mathcal{U}\cap\mathcal{V}} + \beta_{|\mathcal{U}\cap\mathcal{V}}] \end{array}.$$

L'exemple suivant est l'application la plus élémentaire de la suite de Mayer-Vietoris.

Exemple 6.35 (Cohomologie des sphères)**.** On a

$$H^i_{DR}(S^0) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

24. On peut donc penser à la suite de Mayer-Vietoris comme à un analogue pour la cohomologie de De Rham du théorème de van Kampen pour le groupe fondamental. Toutefois, on remarque que dans le théorème de Mayer-Vietoris, on n'a aucune hypothèse de connexité sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Ceci permet de calculer la cohomologie de S^1 facilement à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris, alors que le théorème de van Kampen ne permet pas de calculer son groupe fondamental.

et pour $n > 0$ on a

$$H^i_{DR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = 0 \text{ ou } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut tirer beaucoup plus de la suite de Mayer-Vietoris, moyennant un argument géométrique sur les bons recouvrements ouverts.

B. Bon recouvrements ouverts.

Définition 6.36. Soit M une variété différentielle de dimension n. Un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ est appelé un *bon recouvrement ouvert* si pour tout sous-ensemble $J \subset I$, l'intersection $\bigcap_{j\in J} \mathcal{U}_j$ est soit vide, soit contractile.

Exemple 6.37. Un recouvrement de $\mathbb{R}^n$ par des ouverts convexes est un bon recouvrement ouvert. (En effet, les parties convexes de $\mathbb{R}^n$ sont contractiles, et l'intersection d'une famille de convexes est soit vide, soit convexe.) Par contre le recouvrement de $\mathbb{R}^2$ par les ouverts :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{(x, y) \mid x < -1 \text{ ou } y < -1\} \\ \mathcal{U}_2 &= \{(x, y) \mid x > 1 \text{ ou } y > 1\} \\ \mathcal{U}_3 &=]-2, 2[\times]-2, 2[\end{aligned}$$

n'est pas un bon recouvrement. (En effet, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ n'est pas connexe, donc pas contractile).

Théorème 6.38. *Toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ admet un bon recouvrement ouvert. En particulier, toute variété différentielle compacte M admet un bon recouvrement ouvert fini.*

Nous donnons ici dans le détail une démonstration élémentaire, qui n'est pas très facile à trouver dans la littérature (elle apparaît comme le lemme IV.(6.9) dans le livre de J.P. Demailly, Complex analytic and differential geometry.) Elle repose sur un lemme de convexité.

Lemme 6.39. *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme. On considère la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$ il existe $\epsilon_a > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, \epsilon_a)$ soit contenue dans $\mathcal{U}$ et tel que pour tout réel strictement positif $\epsilon < \epsilon_a$, l'image de la boule ouverte $B(a, \epsilon)$ par ϕ est convexe.*

Démonstration. Soit $\psi = \phi^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ et $b = \phi(a) \in \mathcal{V}$. La Hessienne de l'application lisse $f : y \mapsto ||\psi(y) - \psi(b)||^2$ est définie positive en a, donc sur un voisinage ouvert convexe W de b. Il s'ensuit que f est convexe sur W. Soit ϵ_a tel que $B(a, \epsilon_a) \subset \psi(W)$. Pour tout $\epsilon < \epsilon_a$ on a $y \in \phi(B(a, \epsilon)) \Leftrightarrow \psi(y) \in B(a, \epsilon) \Leftrightarrow f(x) < \epsilon^2$. et ainsi $\phi(B(a, \epsilon))$ est convexe car les sous-ensembles de niveau d'une fonction convexe sont des convexes. $\square$

Démonstration du théorème 6.38. On fixe une famille d'ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^n$, localement finie, telle que pour chaque i on dispose d'un difféomorphisme $\phi_i : \mathcal{U}_i \to \phi(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^n$ qui envoie $\mathcal{U}_i \cap M$ sur $\phi(\mathcal{U}_i) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$.

Par finitude locale et par le lemme de convexité 6.39, il existe pour chaque $a \in M$ une boule ouverte $B(a, \epsilon_a)$ telle que pour tout i on a : soit $B(a, \epsilon_a) \cap \mathcal{U}_i = \emptyset$, soit $B(a, \epsilon_a) \subset \mathcal{U}_i$, et dans ce dernier cas $\phi_i(B(a, \epsilon_a))$ est un convexe de $\phi_i(\mathcal{U}_i)$.

Alors la famille $(B(a, \epsilon_a) \cap M)_{a\in M}$ est un bon recouvrement ouvert de M. En effet, si $x \in \bigcap_{a\in A} B(a, \epsilon_a) \cap M$, on peut trouver un indice i tel que $x \in \mathcal{U}_i$ et alors

$$\phi_i(\cap_{a\in A} B(a, \epsilon_a) \cap M) = \bigcap_{a\in A} \phi_i(B(a, \epsilon_a)) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$$

est convexe car intersection de convexes, donc contractile. □

Remarque 6.40. La démonstration montre en fait le résultat plus fort : toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p possède un recouvrement ouvert dont les intersections sont soit vides, soit difféomorphes à des ouverts convexes de $\mathbb{R}^p$, donc à $\mathbb{R}^p$ (car tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^p$ [GT, Partie I, Chap 2, ex. 4]).

C. Applications de la suite de Mayer-Vietoris. Nous donnons deux applications. La première est un résultat qualitatif général sur la cohomologie des variétés lisses compactes (ou plus généralement admettant un bon recouvrement fini ouvert).

Théorème 6.41. *Si M est une variété différentielle admettant un bon recouvrement ouvert fini, alors $H_{DR}(M)$ est de dimension finie.*

La deuxième application permet de calculer la cohomologie d'un produit de deux variétés. Si A et B sont deux algèbres graduées, graduées commutatives, on munit le produit tensoriel $A \otimes B$ du produit donné sur des éléments homogènes a, a', b, b' par :

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg a' \deg b} aa' \otimes bb' \,.$$

ceci fait de $A \otimes B$ une algèbre graduée (avec graduation donnée par $\deg(a \otimes b) = \deg(a) + \deg(b)$), graduée commutative, avec unité $1 \otimes 1$.

Théorème 6.42 (Künneth)**.** *Soit M et N deux variétés. On suppose que M possède un bon recouvrement ouvert fini. Notons $p : M \times N \to M$ et $q : M \times N \to N$ les projections. Alors l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \kappa : & H_{DR}(M) \otimes H_{DR}(N) & \to & H_{DR}(M \times N) \\ & [\alpha] \otimes [\beta] & \mapsto & [p^*\alpha \wedge q^*\beta] \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Nous donnons la démonstration car c'est un exemple typique de raisonnement montrant un isomorphisme à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris.

Démonstration. On vérifie facilement que κ est bien défini et que c'est un morphisme d'algèbres. Il reste seulement à vérifier que κ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit $(\mathcal{U}_i)$ un bon recouvrement ouvert fini de M. La démonstration de l'isomorphisme se fait par recurrence sur le cardinal du bon recouvrement ouvert de M. Le cas $k = 1$, où M est contractile, est trivial. Supposons le théorème connu pour les variétés admettant un bon recouvrement par $\leq k$ ouverts, et soit M admettant un bon recouvrement par $k+1$ ouverts $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{k+1}$. Posons $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_k$ et $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{k+1}$. Alors $M = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ et le théorème de Künneth est connu pour $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ car ces trois variétés ont un bon recouvrement par k ouverts ou moins. On a un diagramme commutatif d'espaces vectoriels et d'applications linéaires, dont les suites exactes longues verticales sont produites à partir de suites exactes de Mayer-Vietoris :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{0\leq i\leq n} H^i_{DR}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\otimes H^{n-i}_{DR}(N) \arrow[r, "\kappa", "\simeq"'] & H^n_{DR}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \\
\bigoplus_{0\leq i\leq n} \begin{array}{c} H^i_{DR}(\mathcal{U})\otimes H^{n-i}_{DR}(N) \\ \oplus H^i_{DR}(\mathcal{V})\otimes H^{n-i}_{DR}(N)\end{array} \arrow[u] \arrow[r, "\kappa", "\simeq"'] & H^n_{DR}(\mathcal{U})\oplus H^n_{DR}(\mathcal{V}) \arrow[u] \\
\bigoplus_{0\leq i\leq n} H^i_{DR}(M)\otimes H^{n-i}_{DR}(N) \arrow[u] \arrow[r, "\kappa"] & H^n_{DR}(M) \arrow[u] \\
\bigoplus_{1\leq i\leq n} H^{i-1}_{DR}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\otimes H^{n-i}_{DR}(N) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\kappa", "\simeq"'] & H^{n-1}_{DR}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) \arrow[u, "\partial"'] \\
\bigoplus_{1\leq i\leq n} \begin{array}{c} H^{i-1}_{DR}(\mathcal{U})\otimes H^{n-i}_{DR}(N) \\ \oplus H^i_{DR}(\mathcal{V})\otimes H^{n-i}_{DR}(N)\end{array} \arrow[u] \arrow[r, "\kappa", "\simeq"'] & H^{n-1}_{DR}(\mathcal{U})\oplus H^{n-1}_{DR}(\mathcal{V}) \arrow[u]
\end{tikzcd}\ .$$

On conclut que le morphisme de Künneth de M est un isomorphisme à l'aide du lemme d'algèbre homologique suivant, élémentaire mais fondamental. □

Lemme 6.43 (Lemme des cinq)**.** *Considérons un diagramme commutatif de $\Bbbk$-modules dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}\ .$$

Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exemple 6.44. La cohomologie de De Rham du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est une algèbre extérieure engendrée par deux classes de cohomologie de degré 1. En particulier :

$$H^i_{DR}(T^2) = \begin{cases} \mathbb{R}1 & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{R}c_1 \oplus \mathbb{R}c_2 & \text{si } i = 1, \\ \mathbb{R}c_1c_2 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement, la cohomologie du tore $T^n = (S^1)^{\times n}$ est une algèbre extérieure engendrée par n classes de cohomologie de degré 1.

6.6 Cohomologie des variétés quotient

Soit G un groupe agissant de façon lisse sur une variété M. L'application :

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}(M) \times G & \to & H_{DR}(M) \\ ([\alpha], g) & \mapsto & [g^*\alpha] \end{array}$$

définit une action à droite de G sur $H_{DR}(M)$, par automorphismes d'algèbres. On note :

$$H_{DR}(M)^G = \{x \in H_{DR}(M) \mid xg = x \ \forall g \in G\} \ .$$

C'est une sous-algèbre graduée de $H_{DR}(M)$.

Théorème 6.45. *Soit G un groupe fini agissant librement et de façon lisse sur une variété M. Notons $p : M \to M/G$ l'application quotient. On a un isomorphisme d'algèbres :*

$$\begin{array}{ccc} H_{DR}(M/G) & \xrightarrow{\simeq} & H_{DR}(M)^G \\ [\alpha] & \mapsto & [p^*\alpha] \end{array} .$$

Exemple 6.46. La cohomologie des espaces projectifs réels est donnée par

$$H^i_{DR}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ impair et } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6.7 Complément : la dualité de Poincaré

A. La dualité de Poincaré des variétés compactes orientées. Un *appariement* entre deux espaces vectoriels V et W est une application linéaire

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \otimes W \to \mathbb{R} \ .$$

Un appariement est dit *non dégénéré* si $\langle v|w \rangle = 0$ pour tout $v \in V$ implique que $w = 0$ et si $\langle v|w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$ implique que $v = 0$. De manière équivalente, un appariement est non dégénéré si les applications suivantes sont injectives :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & W^* \\ v & \mapsto & \langle v|\cdot\rangle \end{array}\ , \qquad \begin{array}{ccc} W & \to & V^* \\ w & \mapsto & \langle \cdot|w\rangle \end{array}\ .$$

Lemme 6.47. *Si V et W sont de dimension finie, un appariement est non dégénéré si et seulement si l'application $v \mapsto \langle v|\cdot\rangle$ est un isomorphisme entre V et W^*.*

Théorème 6.48 (Dualité de Poincaré pour les variétés compactes orientées)**.** *Soit M une variété compacte orientée de dimension n. Si $0 \leq i \leq n$ on a un appariement non dégénéré :*

$$\begin{array}{ccc} H^i_{DR}(M) \otimes H^{n-i}_{DR}(M) & \to & \mathbb{R} \\ [\alpha] \otimes [\beta] & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}\ .$$

En particulier $H^i_{DR}(M)$ et $H^{n-i}_{DR}(M)$ ont même dimension.

Une démonstration possible de la dualité de Poincaré utilise les bon recouvrements ouverts et la suite de Mayer-Vietoris, de même manière que pour la formule de Künneth. On renvoie à [BT, Chap 1] pour les détails de la démonstration. La dualité de Poincaré possède de nombreuses applications. Nous survolons une application importante dans le paragraphe suivant.

B. Application à la théorie du degré. La théorie du degré est une application des renseignements donnés par la dualité de Poincaré en plus haut degré. Plus précisément, si M est connexe et que $i = n$, le théorème de dualité de Poincaré donne l'énoncé suivant (qu'on peut aussi obtenir par une méthode directe, voir [Laf, Chap VII, Thm 6]).

Théorème 6.49. *Soit M une variété compacte orientée de dimension n. On a un isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} H^n_{DR}(M) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{R} \\ [\alpha] & \mapsto & \int_M \alpha \end{array}\ .$$

Corollaire 6.50. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés compactes orientables de même dimension n. Alors il existe un unique nombre $\deg(f) \in \mathbb{R}$ tel que pour toute n-forme différentielle lisse α sur N on a*

$$\int_M f^*\alpha = \deg(f) \int_N \alpha\ .$$

Une *valeur régulière* d'une application lisse $f : M \to N$ est un élément $y \in N$ qui n'est pas l'image d'un point critique de f. En d'autres termes, un point $y \in N$ est une valeur régulière de f si et seulement si $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou pour tout $x \in f^{-1}(y)$ l'application $T_x f$ est surjective. Si M et N sont des variétés de même dimension, et M compacte, on peut préciser à quoi ressemble f au voisinage de $f^{-1}(y)$.

Lemme 6.51. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés de même dimension, avec M compacte, et soit y une valeur régulière de f.*

1. *Si $f^{-1}(y) = \emptyset$ alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de y tel que $f^{-1}(\mathcal{V}) = \emptyset$.*
2. *Si $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ alors $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini et il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de y et des voisinages ouverts disjoints $\mathcal{U}_i$ des x_i tels que $f^{-1}(\mathcal{V}) = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{U}_{x_i}$ et tels que les restrictions $f : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}$ soient des difféomorphismes.*

Il se pose maintenant la question de l'existence de valeurs régulières pour une fonction donnée. Le théorème suivant (que nous admettrons, voir par exemple [Bre, App. C] pour une démonstration ou [Laf, Thm I.48] pour le cas spécial $n = m$) répond à cette question. Il généralise la proposition 3.59.

Théorème 6.52 (Lemme de Sard, cas général)**.** *Soient M et N des variétés lisses, et $f : M \to N$ une application lisse. L'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N.*

Corollaire 6.53. *Soit $f : M \to N$ une fonction lisse surjective. Si $\dim M \geq \dim N$ alors il existe une valeur régulière de f telle que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.*

Remarque 6.54. Le corollaire peut tomber en défaut si on omet la surjectivité (prendre f constante).

La proposition suivante permet de calculer le degré. Elle montre aussi des propriétés remarquables des applications lisses entre variétés compactes orientables de même dimension (les valeurs régulières ont toutes le même nombre d'antécédents modulo 2).

Proposition 6.55. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre deux variétés compactes orientables de même dimension n alors $\deg(f)$ est un entier, et plus précisément :*

1) si f n'est pas surjective, alors $\deg(f) = 0$,

2) si y est une valeur régulière de f telle que $f^{-1}(y) \neq \{x_1, \dots, x_n\}$ alors

$$\deg(f) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{or}_{x_i}(f)$$

où $\mathrm{or}_{x_i}(f) = +1$ si $T_{x_i}f$ préserve l'orientation et $\mathrm{or}_{x_i}(f) = -1$ si $T_{x_i}f$ renverse l'orientation.

Exemples 6.56 (Polynômes)**.** Le premier exemple justifie le terme *degré*.

1. Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe non constant. Alors on peut identifier $S^2 = \mathbb{C} \sqcup \{\mathtt{N}\}$ où $\mathtt{N}$ est un point à l'infini, et prolonger P en une application lisse $\widehat{P} : S^2 \to S^2$ en posant $P(\mathtt{N}) = \mathtt{N}$, voir l'exemple 3.18. Alors les valeurs régulières de $\widehat{P}$ dans

$\mathbb{C}$ sont les points de $z \in \mathbb{C}$ tels que $P^{-1}(z)$ possède exactement n racines distinctes. De plus, la différentielle de P (donc de $\widehat{P}$) préserve l'orientation en tout point où elle est non nulle (c'est une similitude d'après les conditions de Cauchy-Riemann). Le degré de $\widehat{P}$ au sens du corollaire 6.50 est donc égal à n.

2. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme réel non constant. Alors on peut identifier $S^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\mathtt{N}\}$ où $\mathtt{N}$ est un point à l'infini, et prolonger P en une application lisse $\widehat{P} : S^1 \to S^1$ en posant $P(\mathtt{N}) = \mathtt{N}$, voir l'exemple 3.18. Alors les valeurs régulières de $\widehat{P}$ dans $\mathbb{R}$ sont les points de $x \in \mathbb{R}$ tels que $P^{-1}(x)$ possède 0 ou n racines distinctes. On a deux possibilités.
   (a) Si n est pair, alors P (donc $\widehat{P}$) n'est pas surjective, et le degré de $\widehat{P}$ au sens du corollaire 6.50 est donc égal à 0.
   (b) Si n est impair, alors il existe $y \gg 0$ qui n'a qu'un antécédent x par P. Le signe de $P'(x)$ est égal au signe de a_n, ainsi la différentielle de P (donc de $\widehat{P}$) en x préserve l'orientation si $a_n > 0$ et renverse l'orientation si $a_n < 0$. Le degré de $\widehat{P}$ au sens du corollaire 6.50 est donc égal à $a_n/|a_n|$.

6.8 Exercices du chapitre 6

A. Catégories

Exercice 52. Isos. Un morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_X$. On appelle g un *inverse de* f

1. Montrez que l'inverse de f, s'il existe, est unique.
2. Montrez que si f est un isomorphisme de $\mathcal{C}$ et si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur alors $F(f)$ est un isomorphisme.

Exercice 53. Epis et monos. Un morphisme $f : X \to Y$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé un *épimorphisme* si pour toute paire de morphismes $g, h : Y \to Z$ on a $(g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$. C'est un *monomorphisme* si pour toute paire de morphismes $g, h : W \to X$ on a $(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$.

1. Montrez que les isomorphismes sont des épimorphismes et des monomorphismes.
2. Montrez que si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles ou la catégorie des $\Bbbk$-modules, alors les épimorphismes sont exactement les applications surjectives et les monomorphismes sont exactement les applications injectives.
3. Trouvez une catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle il existe des morphismes qui sont à la fois des monomorphismes et des épimorphismes, tout en n'étant pas des isomorphismes.

Exercice 54. Coproduits. Dans une catégorie $\mathcal{C}$, le *coproduit* de deux objets X et Y est un objet Z muni de deux morphismes $\iota_X : X \to Z$ et $\iota_Y : Y \to Z$ vérifiant la propriété universelle suivante. Pour toute paire d'applications $f : X \to T$ et $g : X \to T$ il existe une unique application $h : Z \to T$ telle que $h \circ \iota_X = f$ et $h \circ \iota_Z = g$.

1. Montrez que si deux triplets (Z, ι_X, ι_Y) et (Z', ι'_X, ι'_Y) sont tous les deux le coproduit de X et Y alors il existe un unique isomorphisme $\phi : Z \to Z'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[dr, "\iota'_X"'] & Z \arrow[d, "\phi", "\simeq"'] & Y \arrow[l, "\iota_Y"'] \arrow[dl, "\iota'_Y"] \\ & Z' & \end{tikzcd}$$

2. Montrez que le coproduit de deux objets existe toujours dans chacune des six catégories suivantes, et le décrire : (1) catégorie des $\Bbbk$-modules, (2) catégorie des ensembles, (3) catégorie des espaces topologiques, (4) catégorie des groupes, (5) catégorie des algèbres commutatives, (6) catégories des algèbres graduées et graduées commutatives.
3. Trouvez une catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle il existe deux objets X et Y qui n'admettent pas de coproduit.

B. Algèbre homologique

Exercice 55. Soit C le complexe de $\mathbb{Z}$-modules tel que $C^i = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour tout i, et $d : C^i \to C^{i+1}$ est la multiplication par 2 pour tout i.

1. Calculez l'homologie de C.
2. Montrez que le morphisme de complexes $C \to 0$ n'est pas une équivalence d'homotopie.

Exercice 56. Le lemme des neuf. On considère le diagramme commutatif de $\Bbbk$-modules, dans lequel les lignes sont des suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Montrez que si deux des colonnes sont des suites exactes courtes, alors la troisième colonne est également une suite exacte courte.

Exercice 57. Le lemme du serpent. On considère le diagramme commutatif de $\Bbbk$-modules :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Montrez qu'on a une suite exacte[25] :

$$0 \to \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} f_2 \to \operatorname{Ker} f_3 \to \operatorname{Coker} f_1 \to \operatorname{Coker} f_2 \to \operatorname{Coker} f_3 \to 0$$

Exercice 58. Caractéristique d'Euler. Si $V = (V^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une famille de $\Bbbk$-espaces vectoriels telle que $\dim\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i\right) < +\infty$, la *caractéristique d'Euler* de la famille est le nombre

$$\chi(V) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim V^i .$$

25. On rappelle que le conoyau de $f : M \to N$ est le $\Bbbk$-module quotient $\operatorname{Coker} f = N/\operatorname{Im} f$.

1. Soit C un complexe d'espaces vectoriels tel que $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C^i$ est de dimension finie. Montrez que $\chi((C^i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \chi((H^i(C))_{i\in\mathbb{Z}})$.
2. Soit $0 \to C \to D \to E \to 0$ une suite exacte courte de complexes d'espaces vectoriels. On suppose que si $X = C$, D ou E alors $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(X)$ est de dimension finie. Montrez que

$$\chi(H^i(C))_{i\in\mathbb{Z}}) + \chi(H^i(E))_{i\in\mathbb{Z}}) = \chi(H^i(D))_{i\in\mathbb{Z}}) \ .$$

C. Homotopie

Exercice 59. Soit X un espace topologique contractile. Montrez que pour tout espace topologique Y la projection $X \times Y \to Y$ est une équivalence d'homotopie.

Exercice 60. Montrez que si M est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, et que si $M^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \epsilon$ est un voisinage tubulaire de M, alors l'inclusion $M \hookrightarrow M^\epsilon$ est une équivalence d'homotopie.

Exercice 61. Montrez que l'inclusion $O(n) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est une équivalence d'homotopie.

[Indication : l'inverse homotopique est l'application construite à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.]

Exercice 62. Si X est un espace topologique, on note $\pi_0(X)$ le quotient de X par la relation d'équivalence $x \sim y$ s'il existe un chemin continu reliant x et y.

1. Montrez que π_0 définit un foncteur des espaces topologiques vers les ensembles.
2. Montrez que les inclusions $\iota_0 : X \to X \times [0, 1]$, et $\iota_1 : X \to X \times [0, 1]$ définies par $\iota_k(x) = (x, k)$ induisent des isomorphismes en π_0. En déduire que si f et g sont homotopes alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

D. Cohomologie de De Rham

Exercice 63. Calculez l'homologie du tore $T^2 = S^1 \times S^1$ à l'aide de la suite de Mayer-Vietoris.

Exercice 64. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soient $B_1, \dots, B_k$ des boules fermées contenues dans $\mathcal{U}$ et soit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus \bigcup_{1\leq i\leq k} B_k$. On suppose que $\mathcal{U}$ est contractile. Calculez la cohomologie de De Rham de $\mathcal{V}$.

Exercice 65. Soit $n \geq 4$. Trouvez un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont l'homologie de De Rham est triviale, mais qui n'est pas contractile.

[Indication : plongez $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$, et considérez un voisinage tubulaire.]

Exercice 66. Champs de vecteurs sur les ouverts de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathrm{Vec}(U)$ l'ensemble des champs de vecteurs lisses sur $\mathbb{R}^3$. On considère le diagramme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels :

$$C^\infty(U) \xrightarrow{\mathrm{grad}} \mathrm{Vec}(U) \xrightarrow{\mathrm{rot}} \mathrm{Vec}(U) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(\mathcal{U}), \qquad (*)$$

où les morphismes sont les opérateurs différentiels usuels du cours de physique, c'est-à-dire (en notant ∂_i la dérivée partielle par rapport à la i-ème variable) :

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f &= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)\ , \\ \mathrm{rot}(v_1, v_2, v_3) &= (\partial_3 v_2 - \partial_2 v_3, \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1, \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2)\ , \\ \mathrm{div}(v_1, v_2, v_3) &= \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3\ . \end{aligned}$$

1. Montrez que le diagramme $(*)$ est un complexe (c'est-à-dire que $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ et $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$).
2. Montrez que $(*)$ est isomorphe au complexe de De Rham de $\mathcal{U}$.
3. On suppose que $\mathcal{U}$ est un ouvert convexe. Décrivez tous les champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$ tels que $\mathrm{div}(v) = 0$.
4. On suppose que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Décrivez tous les champs de vecteurs v tels que $\mathrm{div}(v) = 0$.

Exercice 67. Montrez que pour toute application lisse $f : S^2 \to T^2$ on a $H^i_{DR}(f) = 0$ si $i > 0$.