Géométrie différentielle

Antoine Touzé

22 octobre 2024

Table des matières

Références

[Laf] J. Lafontaine, introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences.

▷ Le livre de Lafontaine est la référence principale pour la majorité du cours. D'autres références seront utilisées plus ponctuellement (pour certaines parties du cours, pour les exercices...), la liste ci-dessous sera complétée au fur et à mesure du cours.

[Bre] G. E. Bredon, Topology and geometry, Graduate text in mathematics 139, Springer

[FT] Y. Félix, D. Tanré, Topologie algébrique, Dunod.
Le livre de Félix Tanré en traite pas de géométrie différentielle, mais c'est une excellente référence élémentaire pour mieux comprendre les espaces topologiques sous-jacents (groupe fondamental, revêtements,...). On l'utilise notamment dans la section 3.5.

[GT] S. Gonnord, N. Tosel, Calcul différentiel, Ellipses.

[H] M. W. Hirsch, Differential topology, Graduate text in mathematics 33, Springer

1 Rappels de calcul différentiel

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \to F$ une application.

A. Différentiabilité. L'application f est dite *différentiable en* $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application $\mathbb{R}$-lineaire $L : E \to F$ telle que l'on ait pour tout h dans une boule ouverte $B(0, r) \subset E$ assez petite

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \epsilon(h)$$

où $\epsilon : B(0, r) \to F$ vérifie $\epsilon(h)/||h|| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. L'application f est dite *différentiable sur* $\mathcal{U}$ si elle est différentiable en tout $a \in \mathcal{U}$.

Si f est différentiable, l'application linéaire L est unique. On l'appelle la *différentielle de f en a* et on la notera $D_a f$, ou parfois df_a si $F = \mathbb{R}$.

Remarques 1.1. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, la notion de différentiabilité et l'application différentielle $D_a f$ ne dépendent pas du choix de la norme sur E et F.

Exemples 1.2.

1. Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a, et $D_a f(h) = f'(a)h$.
2. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors f est différentiable sur E, et $D_a f = f$.
3. L'application $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto X^2$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et $D_A f(H) = AH + HA$.
4. Si on a deux applications composables $g : \mathcal{V} \subset F \to G$ et $f : \mathcal{U} \subset E \to F$ telles que f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D_a(g \circ f) = D_{f(a)} g \circ D_a f$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, on note $(f_i)_{1\le i\le p}$ les composantes de f. Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles des f_i en a existent, et la matrice de $D_a f$ dans les bases canoniques est :

$$[D_a f]_{\mathrm{Bcan},\mathrm{Bcan}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] .$$

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, on note $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application linéaire qui renvoie la i-ème coordonnée d'un vecteur. Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent et :

$$df_a = \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \ .$$

B. Applications de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$.

L'application f est dite *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ lorsque ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$. Elle est dite de *classe* $\mathcal{C}^\infty$ ou *lisse* lorsqu'elle est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

La relation importante avec la différentiabilité est que si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ pour $k \geq 1$, alors f est différentiable.

Exemples 1.3.

1. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est lisse.
2. Plus généralement, une application $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^p$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses k variables est lisse.
3. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un polynôme à n variables, alors f est lisse.
4. Si $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est un polynôme de matrices, c'est à dire si $f(X) = a_0 I + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, alors f est lisse.
5. Plus généralement, si $\sum a_i x^i$ est une série entière convergente sur $\mathbb{R}$, alors $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ donnée par $f(X) = \sum a_i X^i$ est lisse.
6. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1.4. Notre définition d'application $\mathcal{C}^k$ suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie quelconques, alors il existe des isomorphismes linéaires $\phi : E \simeq \mathbb{R}^n$ et $\psi : F \simeq \mathbb{R}^p$, et on dit que f est $\mathcal{C}^k$ si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est $\mathcal{C}^k$. Cette définition ne dépend pas du choix de ϕ et ψ à cause des points 1) et 6) de l'exemple 1.3.

C. Le lemme de Sard. On rappelle le phénomène des courbes de Peano.

Théorème 1.5 (Peano)**.** *Pour tout $n \geq 1$, il existe une application continue surjective $\gamma : [0,1] \to [0,1]^n$.*

Le résultat suivant est un cas facile du lemme de Sard. Il montre que le calcul différentiel permet de maintenir à distance les "monstres de Peano".

Proposition 1.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$. Si E est un sous-ensemble négligeable de $\mathcal{U}$, alors $f(E)$ est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire 1.7. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p > n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^1$. L'image de f est un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^p$.*

D. Difféomorphismes. On considère des ouverts $\mathcal{U} \subset E$ et $\mathcal{V} \subset F$. Un *difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$* est une application bijective $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ telle que ϕ est $\mathcal{C}^k$ et ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1.8. Les difféomorphismes sont des "changements de variables". Composer une application f de classe $\mathcal{C}^k$ par des difféomorphismes $\mathcal{C}^k$ n'altère pas les propriétés de f : du point de vue du calcul différentiel théorique, il n'y a pas de différence entre $\psi \circ f \circ \phi$ et f. *Mais* si on utilise des changements ψ et ϕ de variable bien choisis, l'application $\psi \circ f \circ \phi$ peut être en pratique radicalement plus facile à étudier que f, notamment lorsqu'il s'agit de faire des calculs explicites. Voir par exemple le paragraphe F.

Exemple 1.9. Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne $||\cdot||$. L'application $\phi : \mathbb{R}^n \to B$ donnée par

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+||x||^2}}$$

est un difféomorphisme lisse [1]. (En effet ϕ est lisse, elle est bijective d'inverse $\phi^{-1}(y) = y/\sqrt{1-||y||^2}$ lisse.)

Remarques 1.10. 1. Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme alors $D_a\phi$ est inversible pour tout $a \in \mathcal{U}$ (d'inverse $D_{\phi(a)}\phi^{-1}$). En particulier E et F ont même dimension. On peut se servir de cette observation pour voir qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$.

2. Si $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme, alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont homéomorphes, c'est-à-dire qu'ils sont 'identiques' en tant qu'espaces topologiques. Ceci implique qu'ils ont même nombre de composantes connexes, mêmes groupes fondamentaux, etc. On peut se servir de cette observation pour voir qu'il n'existe pas de difféomorphisme $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, ou de difféomorphisme $\phi :]-2,0[\cup]3,4[\to \mathbb{R}$.

On dispose d'une variante locale de la notion de difféomorphisme. Soit $a \in \mathcal{U}$. On dit que $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a* lorsqu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_a$ de a contenu dans $\mathcal{U}$, et un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{f(a)}$ de $f(a)$ tels que $\phi : \mathcal{U}_a \to \mathcal{V}_{f(a)}$ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^k$.

Le théorème fondamental suivant donne un critère algébrique simple et pratique pour vérifier qu'une application est un difféomorphisme local.

Théorème 1.11 (Inversion locale)**.** *Soit $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a $\Leftrightarrow$ $D_a\phi$ est inversible.*

Corollaire 1.12 (Inversion globale)**.** *Soit $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Alors ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. On remarque que l'expression de ϕ n'est pas lisse si on remplace la norme euclidienne par la norme infinie (par exemple). Il est possible de démontrer que pour n'importe quelle norme, la boule unité ouverte est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, mais la construction du difféomorphisme suit une autre stratégie, qui n'utilise pas la norme ! Voir [GT, Chap. 2, Exercice 4, page 60] pour la démonstration.

1. *ϕ est une bijection,*
2. *$D_a\phi$ est inversible pour tout $a \in \mathcal{U}$.*

Exemple 1.13. L'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en tout point $a \in \mathbb{C}^*$ (c'est facile à montrer avec le théorème d'inversion locale), mais n'est pas un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme, car ce n'est pas une bijection. Plus généralement, nous verrons que les revêtements $\mathcal{C}^k$ non triviaux fournissent des $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes locaux qui ne sont pas des difféomorphismes.

E. Propriétés locales vs propriétés globales. On peut s'intéresser aux propriétés locales d'une fonction (= qui ne dépendent que de la définition de la fonction au voisinage d'un point) ou aux propriétés globales (= qui ne peuvent pas se vérifier en faisant une étude au voisinage de chaque point).

exemples de props locales	exemples de props globales
f est différentiable	f est injective
f est $\mathcal{C}^k$	f est surjective
f est un $\mathcal{C}^k$-difféo local en a	f est un $\mathcal{C}^k$-difféo
f est une application ouverte	l'image de f est connexe

L'étude des propriétés locales et celle des propriétés globales procèdent généralement de méthodes assez différentes.

Les énoncés relatifs aux propriétés locales sont parfois un peu lourds à écrire (il faut spécifier des tas d'ouverts et de voisinages convenablement emboîtés les uns dans les autres...). Le résultat suivant permet parfois d'écrire ces énoncés de manière un peu plus légère, en remplaçant une fonction f définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ par une fonction g définie sur tout $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.14. *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^k$, et $a \in \mathcal{U}$. Il existe $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que f et g sont égales au voisinage de a.*

La démonstration de cette proposition repose sur l'existence de "fonctions plateau", qui nous seront utiles en bien d'autres occasions.

Lemme 1.15. *Soit $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et soit $r_1 < r_2$ deux réels strictement positifs. Il existe une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ lisse telle que*

1. *$\chi(x) = 1$ si et seulement si $||x|| \leq r_1$,*
2. *$\chi(x) = 0$ si et seulement si $||x|| \geq r_2$,*
3. *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \chi(tx) \end{array}$ est décroissante.*

F. Description locale des fonctions différentiables. A quoi ressemble localement une fonction différentiable (à changement de variables près) ? Les résultats suivants répondent très partiellement à cette question. Quitte à faire une translation au départ et à l'arrivée, on peut se ramener à étudier les fonctions différentiables f définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et telles que $f(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Dans la suite du paragraphe D, on considère donc un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, telle que $f(0) = 0$.

Lemme 1.16 (Lemme d'immersion)**.** *On a équivalence entre :*

(i) $D_0 f$ *injective*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme local en* 0 *:* $\phi : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(\phi \circ f)(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \ .$$

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une *immersion* lorsque $D_a f$ est injective pour tout $a \in \mathcal{U}$.

Il est clair qu'une application linéaire injective est une immersion. Le lemme d'immersion montre donc que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une immersion au voisinage de 0 si et seulement si $D_0 f$ est injective. (Comme dans le théorème d'inversion locale, un information sur la différentielle de f en un seul point donne une information sur f sur tout un voisinage de ce point !)

Lemme 1.17 (Lemme de submersion)**.** *On a équivalence entre :*

(i) $D_0 f$ *surjective*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme local en* 0 *:* $\phi : (\mathcal{U}', 0) \to (\mathcal{U}, 0)$ *tel que pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(f \circ \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p) \ .$$

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est une *submersion* lorsque $D_a f$ est surjective pour tout $a \in \mathcal{U}$. Le lemme de submersion montre que f est une submersion au voisinage de 0 et et seulement si $D_0 f$ est surjective.

On remarquera que $D_0 f$ injective (resp. surjective) implique que $D_a f$ injective (resp. surjective) pour a au voisinage de 0. Les lemmes d'immersion et de submersion décrivent donc des applications localement de rang maximal. Le théorème suivant décrit plus généralement les applications qui sont localement de rang constant.

Théorème 1.18 (Rang constant)**.** *Soit* $r \geq 0$*. On a équivalence entre :*

(i) $\mathrm{rg} D_a f = r$ *au voisinage de* 0*.*

(ii) Il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en 0 *:* $\phi_1 : (\mathcal{U}', 0) \to (\mathcal{U}, 0)$ *et un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local* $\phi_2 : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *tels que pour tout* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *au voisinage de* 0 *on a*

$$(\phi_2 \circ f \circ \phi_1)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \ .$$

1.1 Exercices du chapitre 1

Exercice 1. Montrez que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est lisse. Calculez la différentielle $D_A \det$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ une série entière réelle à coefficients $a_k \geq 0$, de rayon de convergence $\rho > 0$.

1. Soit $A_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite de matrices telle que $||A_k||_\infty \leq a_k$ pour tout k. Montrez que
$$\begin{array}{cccc} f: & M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & \sum_{k\geq 0} A_k X^k \end{array}$$
est une fonction lisse sur l'ouvert $\{X \in M_n(\mathbb{R})\,,\, ||X||_\infty < \rho/n\}$, et calculez sa différentielle.
2. Montrez que l'exponentielle de matrices est une fonction lisse sur $M_n(\mathbb{R})$ et calculez sa différentielle.

Exercice 3. Un théorème de Whitney [2]. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}+$ telle que $F = f^{-1}\{0\}$ (c'est un théorème de Whitney).

1. Montrez l'existence de f lorsque $F = \mathbb{R}^n$. Dans la suite de l'exercice on suppose $F \neq \mathbb{R}^n$.
2. Montrez qu'il existe une famille dénombrable de boules euclidiennes ouvertes B_i telles que $F = \bigcap_{i\geq 0} \mathbb{R}^n \setminus B_i$.
3. Construire pour chaque B_i une application lisse $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}+$ telle que ϕ_i s'annule exactement sur $\mathbb{R}^n \setminus B_i$.
4. Construire f à partir des ϕ_i.
[Indication : on posera $f = \sum_{i\geq 0} a_i\phi_i$ pour des a_i bien choisis.]

Exercice 4. Un lemme de Hadamard [3]. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à 0, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Montrez qu'il existe des applications $h_j : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{U}$:
$$f(x) = f(0) + \sum_{1\leq j\leq n} x_j h_j(x)\ .$$
[Indication : on a $f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt$, calculez ensuite $\frac{d}{dt} f(tx)$ à l'aide de la règle de la chaîne.]

Exercice 5. Construisez un difféomorphisme explicite entre le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et le pavé ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$.

2. Voir [GT] Chap 1, Exercice 21 pour la correction.
3. Voir [Laf] chap. III, Lemme 14 pour la correction.

Exercice 6. Montrez que l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféo local en chaque point $a \in \mathbb{C}$. Existe-t-il des difféomorphismes $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$?
[Indication : utilisez le groupe fondamental (cf le cours de topologie algébrique), ou l'indice d'un lacet (cf. le cours d'analyse complexe).]

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

A partir de maintenant, toutes nos applications différentiables seront lisses, sauf mention du contraire. En particulier, on dira simplement immersion, submersion, difféomorphisme à la place de immersion lisse, submersion lisse, difféomorphisme lisse.

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de dimension p* de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a, un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 et un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tel que

$$\phi(\mathcal{U} \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

Remarque 2.2. L'ensemble vide n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (et ne sera pas non plus une variété abstraite au sens du chapitre suivant).

Exemples 2.3. Les sous-variétés de dimension 0 sont exactement les sous-ensembles de points isolés de $\mathbb{R}^n$, les sous-variétés de dimension n sont exactement les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.4. *Soit M une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.*
2. *Pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a et une submersion $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que*

$$M \cap \mathcal{U} = g^{-1}(0) \; .$$

3. *Pour tout $a \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et une immersion $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui induit un homéomorphisme*

$$h : \Omega \xrightarrow{\simeq} M \cap \mathcal{U}.$$

4. *Pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de a, un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a_1, \dots, a_p)$ et application lisse $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que, après permutation éventuelle des coordonnées :*

$$M \cap \mathcal{U} = \mathrm{Graphe}(f).$$

Définition 2.5. Une application h comme dans la condition *3.* du théorème précédent s'appelle une *paramétrisation de M* autour de a, une application g comme dans la condition *2.* est une *équation de M* autour de a.

Exemple 2.6. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application lisse telle que pour tout $a \in \mathcal{U}$ le vecteur gradient

$$\mathrm{grad} f_a := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

est non nul, alors pour tout $b \in \mathrm{Im} f$, l'ensemble de niveau $f^{-1}(b)$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

En particulier, la sphère euclidienne unité $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ , \ ||x|| = 1\}$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.7. Si N est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^m$ et M est une sous-variété de dimension q de $\mathbb{R}^m$ alors $N \times M$ est une sous-variété de dimension $p+q$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

En particulier, le tore $T^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ , \ |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{C}^n$.

Exemple 2.8. Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.9. L'image de l'application lisse

$$\begin{array}{cccc} \gamma : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{2}{\pi}\arctan(t)\exp(it) \end{array}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1. (Cette sous-variété est une "spirale qui s'enroule le long du cercle unité", et on remarquera en particulier que ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^n$).

2.2 Espace tangent

Définition 2.10. Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Une *courbe lisse de* M est une application lisse $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ dont l'image est contenue dans M. Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent à* M *en* a s'il existe une courbe lisse $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Proposition 2.11. *L'ensemble des vecteurs tangents en a à M forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, noté T_aM.*

Proposition 2.12. *Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$, et $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de a.*

(1) Si $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une submersion telle que $M \cap \mathcal{U} = g^{-1}(0)$, alors

$$T_aM = \mathrm{Ker}\, D_a g.$$

(2) Si $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une immersion qui induit un homéomorphisme $\Omega \simeq M \cap \mathcal{U}$, alors

$$T_aM = \mathrm{Im}\, D_{h^{-1}(a)} h.$$

Exemple 2.13. Soit $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dont le gradient ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, et soit M la sous-variété de niveau de f passant par a (c'est-à-dire $M = f^{-1}(f(a))$). Alors T_aM est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathrm{grad} f_a$ (pour le produit scalaire canonique).

Exemple 2.14. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors

$$T_{(a_1,a_2)}M \times N = T_{a_1}M \times T_{a_2}N.$$

Exemple 2.15. Pour toute matrice orthogonale A on a

$$T_AO_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ , \ {}^tAM + {}^tMA = 0\}.$$

2.3 Fonctions différentiables entre sous-variétés

Définition 2.16. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : M \to N$ est dite *lisse* sur M lorsque pour tout $a \in M$ il existe un ouvert $\mathcal{U}_a$ de $\mathbb{R}^m$ contenant a, et une application lisse[4] $\widetilde{f_a} : \mathcal{U}_a \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\widetilde{f_a}(x) = f(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{U}_a \cap M$. L'application $f : M \to N$ est un *difféomorphisme* si c'est une bijection lisse d'inverse lisse.

Remarques 2.17. 1. Si $M = \mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $N = \mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est lisse au sens de la définition précédente si et seulement si elle est lisse au sens du calcul différentiel usuel (section 1).

2. Si $M = \mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ alors $f : \mathcal{U} \to N$ est lisse au sens de la définition précédente si et seulement si l'application $\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto f(x)$ est lisse. En particulier la définition précédente est en accord avec la définition de courbe lisse (voir la définition 2.10.)
3. Si M est une sous-variété de dimension 0, alors toute fonction $f : M \to N$ est lisse. En particulier, les difféomorphismes entre entre sous-variétés de dimension 0 sont exactement les bijections.

Proposition 2.18. *Si $f : M \to N$ est lisse, alors pour toute courbe lisse $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, l'application $f \circ \gamma$ est une courbe lisse de N. L'application suivante est bien définie et linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} T_af : & T_aM & \to & T_{f(a)}N \\ & \gamma'(0) & \mapsto & (f \circ \gamma)'(0) \end{array}.$$

Exemple 2.19. Si $f : M \to N$ est la restriction d'une application lisse $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, alors f est lisse et pour tout $a \in M$, $D_a\overline{f}$ se restreint en une application $D_a\overline{f} : T_aM \to T_{f(a)}N$ qui n'est autre que T_af.

4. au sens du calcul différentiel usuel !

Proposition 2.20. *La composée d'applications lisses est lisse, et*

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_a f \ .$$

Le théorème d'inversion globale s'étend aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.21. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Une application $f : M \to N$ est un difféomorphisme si et seulement si c'est une bijection lisse, telle que $T_a f$ inversible pour tout $a \in M$.*

Exemple 2.22. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Alors $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation de M si et seulement si $h : \Omega \to \mathcal{U} \cap M$ est un difféomorphisme.

2.4 Cartes d'une sous-variété

Si M est une sous-variété de dimension n, une *carte de M de domaine $\mathcal{U}$* est un difféomorphisme $\phi : \mathcal{U} \to \Omega$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les inverses des paramétrisations de M sont des cartes de M, dont les domaines recouvrent M. Cet ensemble de cartes est appelé *l'atlas canonique de M*. On peut utiliser les cartes de l'atlas canonique pour caractériser les applications lisses entre variétés en termes d'applications lisses entre sous-variétés de $\mathbb{R}^n$:

Proposition 2.23. *Soit $f : M \to N$ une fonction entre sous-variétés. La fonction f est lisse si et seulement si pour tout $a \in M$ on peut trouver une carte ϕ_1 de M dont le domaine $\mathcal{U}$ contient a, et une carte ϕ_2 de N dont le domaine $\mathcal{V}$ contient $f(a)$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et telles que $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ soit lisse.*

2.5 Exercices du chapitre 2

Exercice 7. Courbes.

1. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une application continue injective. On suppose que γ est lisse de dérivée non nulle sur $]a,b[$. Montrez que $\gamma(]a,b[)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\gamma :]-1,2[\to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $\gamma(t) = (t^2, t - t^3)$. Montrez que γ est injective, lisse de dérivée non nulle, mais que $\gamma(]-1,2[)$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Intersection de sous-variétés.

1. Montrez que la demi-droite $]-\infty,0] \times \{0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.
2. En déduire que pour $n \geq 2$ l'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

   [Indication : considérer les sous-variétés $M_1 = \mathrm{Graphe}(f)$ et $M_2 = \mathrm{Graphe}(-f)$ où f est une application lisse bien choisie.]
3. Que se passe-t-il pour l'intersection de deux sous-variétés de $\mathbb{R}^1$?

Exercice 9. Transversalité. Soit M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives p et q. On suppose que $M \cap N \neq \emptyset$, et que pour tout $a \in M \cap N$ on a [5] $T_aM + T_aN = \mathbb{R}^n$. Montrez que $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p + q - n$.

[Indication : montrez que si $g_M : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une équation de M autour de a, et $g_N : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-q}$ est une équation de N autour de a, alors $(g_M, g_N) : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{n-q}$ est une equation de $M \cap N$ autour de a.]

Exercice 10. Groupe unitaire. Vérifiez que le groupe unitaire $U_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{C})$. Précisez sa dimension et l'espace tangent en I.

Exercice 11. Fibré tangent. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrez que l'ensemble TM des couples (x,v) où $x \in M$ et v est un vecteur tangent à x forme une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dont on donnera la dimension. Montrez que l'application $p : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ est une submersion lisse.
2. Montrez que l'ensemble TUM des couples (x,v) où $x \in M$ et v est un vecteur tangent à x et de norme 1 forme une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dont on donnera la dimension. Montrez que l'application $p_u : TUM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ est une submersion lisse.

5. Si deux variétés satisfont cette condition sur les espaces tangents, on dit qu'elles sont en "position transverse".

3. Montrez que si M est compacte alors TUM est compacte, mais que TM n'est jamais compacte.

(L'application $p : TM \to M$ s'appelle le "fibré tangent" de M, et l'application $p_u : TUM \to M$ s'appelle "fibré tangent unitaire".)

Exercice 12. Solutions d'équations de rang constant. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une fonction lisse telle que le rang de $D_x g$ ne dépend pas de $x \in \mathcal{U}$.

Montrez que si $S := g^{-1}(b) \neq \emptyset$, alors S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Donnez la dimension de S et décrivez l'espace tangent $T_a S$ pour $a \in S$ en fonction de g.

[Indication : utilisez le théorème du rang constant !]

Exercice 13. Le théorème des extremas liés. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ des applications lisses. On suppose $Z := g^{-1}(0) \neq \emptyset$, et on cherche les extremas locaux de f sur l'ensemble Z.

On suppose que $D_z g$ est de rang p pour tout $z \in Z$.

1. Montrez que Z est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit a un point de Z en lequel f présente un extremum local.
   (a) Soit $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$ une courbe lisse de Z telle que $\gamma(0) = a$. Montrez que $(f \circ \gamma)'(0) = 0$.
   (b) En déduire que $D_a f$ s'annule sur $T_a Z$.
   (c) En déduire que $\ker D_a g \subset \ker D_a f$.

Remarques :

1) Si on note $(g_1, \dots, g_p)$ les fonctions coordonnées de g la dernière question est équivalente à montrer que la forme linéaire $D_a f$ est combinaison linéaire des formes linéaires $D_a g_i$. Les coefficients de cette combinaison linéaire s'appellent les "multiplicateurs de Lagrange".

2) En utilisant l'exercice sur le rang constant, on voit qu'on peut remplacer l'hypothèse sur les $D_z g$ par l'hypothèse plus faible : "on suppose qu'il existe $p \geq r \geq 0$ tel que $D_z g$ est de rang r pour tout z sur un voisinage de Z".

Exercice 14. Projections stéréographiques. Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la norme euclidienne. Notons $N = (1, 0, \dots, 0)$ son pôle nord, $S = (-1, 0, \dots, 0)$ son pôle sud. La projection stéréographique de pôle nord p_N et la projection stéréographique de pôle sud p_S sont les applications (prendre $X = N$ ou S, et $\epsilon_X = -1$ si $X = N$ et $+1$ si $X = S$) :

$$p_X : \begin{array}{ccc} S^n \setminus \{X\} & \to & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x_0, \dots, x_n) & \mapsto & \dfrac{1}{1 + \epsilon_X x_0}(x_1, \dots, x_n) \end{array} .$$

Montrez que ces projections stéréographiques sont des cartes de S^n.

3 Variétés différentielles "abstraites"

3.1 Variétés topologiques

Définition 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *variété topologique de dimension n* est un espace topologique séparé et σ-compact [6], localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarques 3.2. 1. La séparation évite les aberrations du type "droite à deux origines".

En détail, la droite à deux origines est l'espace topologique D_2 obtenu comme quotient de la réunion disjointe $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ de deux copies de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qui identifie un élément non nul $x \in \mathbb{R}^*$ dans la première copie de $\mathbb{R}$ au même élément $x \in \mathbb{R}^*$, dans la seconde copie. Ensemblistement, $D_2 = \mathbb{R}^* \cup \{0\} \cup \{0\}$. Par définition de la topologie quotient, les sous-ensembles $D_2 \setminus \{0\}$ et $D_2 \setminus \{0\}$ sont des ouverts de D_2 et la projection quotient : $p : \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \to D_2$ induit des homéomorphismes : $\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} D_2 \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} D_2 \setminus \{0\}$. Ainsi D_2 est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$, mais n'est pas séparée (tout voisinage ouvert de 0 rencontre un voisinage ouvert de 0).

2. La σ-compacité éviter les aberrations du type "longue droite".

En détail, on peut munir le produit $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$ de l'ordre lexicographique et de la topologie associée [7]. Alors $L = [0, +\infty[\times[0, +\infty[\setminus \{(0, 0)\}$ est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à $\mathbb{R}$, mais il n'est pas σ-compact. Il faut l'imaginer comme une mise bout-à-bout d'un ensemble non dénombrable de copies de $]0, +\infty[$. Il n'existe pas d'application continue surjective $f : \mathbb{R} \to L$.

Exemples 3.3. 1. Les variétés topologiques de dimension 0 sont exactement les ensembles finis ou dénombrables, munis de la topologie discrète.

2. Une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ est une variété topologique.
3. Le graphe d'une fonction continue : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une variété topologique (par exemple le graphe de $x \mapsto |x| \dots$)

Les variétés topologiques possèdent des propriétés topologiques remarquables, par exemple des propriétés de connexité sympathiques.

Proposition 3.4. *Soit M une variété topologique de dimension n.*

1. *$\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de M $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs.*
2. *Si $n \geq 2$ et $x \in M$ alors M connexe $\Leftrightarrow$ $M \setminus \{x\}$ connexe.*
3. *Les composantes connexes de M sont ouvertes et fermées dans M.*
4. *Si M est compacte, elle a un nombre fini de composantes connexes.*

6. Un espace σ-compact est un espace qui est réunion dénombrable de compacts.
7. La topologie associée à un ensemble ordonné est celle dont les ouverts sont des réunions d'intervalles.

3.2 Variétés différentielles et fonctions lisses

Définition 3.5. Soit M une variété topologique de dimension n. Une *carte de M* est un homéomorphisme ϕ d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M vers un ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$. L'ouvert $\mathcal{U}$ est le *domaine* de la carte, et la carte est souvent notée $(\mathcal{U}, \phi)$. Un *atlas de M* est un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M. Un *atlas lisse* est un atlas de M tel que pour toutes cartes $(\mathcal{U}_1, \phi_1)$ et $(\mathcal{U}_2, \phi_2)$ dont les domaines sont d'intersection non vide, la composée :

$$\phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \xrightarrow[\simeq]{\phi_1^{-1}} \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \xrightarrow[\simeq]{\phi_2} \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$$

est un difféomorphisme lisse entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.6. Si $\mathcal{A}$ est un atlas lisse de M, une carte ϕ de M est dite *compatible avec l'atlas $\mathcal{A}$* lorsque $\mathcal{A} \cup \{\phi\}$ est encore un atlas lisse. Un atlas lisse est dit *maximal* lorsque pour toute carte ϕ compatible avec $\mathcal{A}$, on a $\phi \in \mathcal{A}$.

Remarque 3.7. Soit $\mathcal{A}$ un atlas lisse, et $\phi : \mathcal{U} \to \Omega$ une carte de $\mathcal{A}$. Alors, pour tout ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, la restriction $\phi : \mathcal{V} \to \phi(\mathcal{V})$ est une carte compatible avec $\mathcal{A}$, et pour tout difféomorphisme $\psi : \Omega \to \Omega'$ entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ la composée $\psi \circ \phi$ est une carte compatible de $\mathcal{A}$. En particulier, les atlas maximaux son stable par restriction de domaine de carte ou par composition des cartes au but par un difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.8. *Soit M une variété topologique de dimension n. Tout atlas lisse $\mathcal{A}$ de M est contenu dans un unique atlas lisse maximal $\mathcal{A}_{\max}$.*

Définition 3.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *variété différentielle de dimension n* est une variété topologique M de dimension n, munie d'un atlas lisse maximal $\mathcal{A}$.

Exemple 3.10. Une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, munie de son atlas canonique (l'ensemble des homéomorphismes obtenus comme les inverses de paramétrisations lisses de la sous-variété M – c'est un atlas lisse maximal) est une variété différentielle.

Exemple 3.11. On note $P^n(\mathbb{R})$ l'espace topologique quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$. Cet espace topologique est séparé et compact. Notons $[x_0 : \cdots : x_n] \in P^n(\mathbb{R})$ la classe de $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Alors les sous-ensembles

$$\mathcal{U}_i = \{[x_0 : \cdots : x_n]\,,\, x_i \neq 0\}$$

pour $0 \leq i \leq n$ sont des ouverts de $P^n(\mathbb{R})$ qui recouvrent $P^n(\mathbb{R})$. L'ensemble des applications

$$\begin{array}{cccc} \phi_i : & \mathcal{U}_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x_0 : \cdots : x_n] & \mapsto & \dfrac{1}{x_i}(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{array}$$

forme un atlas lisse $\mathcal{A}$ de $P^n(\mathbb{R})$. La variété différentielle $(P^n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_{\max})$ s'appelle l'espace projectif réel de dimension n.

Exemple 3.12. Une variété topologique de dimension 0 possède un unique atlas. On convient que l'unique application $\mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^0$ est un difféomorphisme (c'est en accord avec le dernier point de la remarque 2.17), de sorte que cet atlas est un atlas lisse. Vu que c'est le seul atlas disponible, il est automatiquement maximal. Ainsi, toute variété topologique de dimension 0 peut être vue (d'une unique manière) comme une variété différentielle.

Exemple 3.13. Si $(M, \mathcal{A})$ est une variété différentielle de dimension n alors on considère les ouverts $\mathcal{U}$ de M comme des variétés différentielles de dimension n en les munissant de l'atlas lisse maximal $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ constitué des cartes de $\mathcal{A}$ dont le domaine est contenu dans $\mathcal{U}$.

Exemple 3.14. Si $(M_1, \mathcal{A}_1)$ est une variété différentielle de dimension n_1 et $(M_2, \mathcal{A}_2)$ est une variété différentielle de dimension n_2, alors on considère $M_1 \times M_2$ comme une variété différentielle de dimension $n_1 + n_2$ en la munissant de l'atlas lisse maximal contenant toutes les cartes de la forme

$$\phi_1 \times \phi_2 : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \to \phi_1(\mathcal{U}_1) \times \phi_2(\mathcal{U}_2) ,$$

où $\phi_1 \in \mathcal{A}_1$ et $\phi_2 \in \mathcal{A}_2$.

En pratique, pour définir une variété différentielle, on procédera comme dans l'exemple 3.11 : on spécifiera une variété topologique M et un atlas lisse $\mathcal{A}$, et la variété différentielle sera le couple $(M, \mathcal{A}_{\max})$.

L'atlas $\mathcal{A}$ sera généralement omis quand on fera référence à une variété différentielle. Ainsi on dira "soit M une variété différentielle, et soit $(\mathcal{U}, \phi)$ une carte de M" plutôt que "soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentielle et soit $(\mathcal{U}, \phi)$ une carte de l'atlas $\mathcal{A}$".

Définition 3.15. Soient M et N deux variétés différentielles. Une application $f : M \to N$ est *lisse* si pour tout $a \in M$ on peut trouver une carte ϕ_1 de M dont le domaine $\mathcal{U}$ contient a, et une carte ϕ_2 de N dont le domaine $\mathcal{V}$ contient $f(a)$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et telles que la composée suivante soit lisse [8] :

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(\mathcal{U}) \to \phi_2(\mathcal{V}) .$$

Un *difféomorphisme* entre variétés différentielles est une bijection lisse dont l'inverse est lisse.

Remarque 3.16. Les notions d'applications lisses et de difféomorphismes données dans la définition précédente généralisent aux variétés différentielles quelconques les notions d'applications lisses et de difféomorphismes entre sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (voir la prop. 2.23).

8. au sens usuel du calcul différentiel entre ouverts de $\mathbb{R}^n$!

Exemple 3.17. L'application quotient $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to P^n(\mathbb{R})$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \cdots : x_n]$ est lisse.

Exemple 3.18. Une application $f : M \to N_1 \times N_2$ est lisse si et seulement si ses applications coordonnées sont lisses.

Exemple 3.19. Toute carte $(\mathcal{U}, \phi)$ d'une variété différentielle M est un difféomorphisme de l'ouvert $\mathcal{U}$ sur l'ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.20. *La composée d'applications lisses est lisse.*

3.3 Espace tangent et application tangente

Soit M une variété différentielle et $a \in M$. On note $\mathcal{C}_a(M)$ l'ensemble des courbes lisses $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ telles que $\gamma(0) = a$.

Définition 3.21. On dit que deux courbes γ et μ de $\mathcal{C}_a(M)$ sont *tangentes en a* s'il existe une carte ϕ de M dont le domaine contient a, telle que

$$(\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0)\ .$$

La règle de la chaîne assure que cette définition ne dépend pas du choix de la carte ϕ. La relation de tangence en a est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{C}_a(M)$, et on note T_aM l'ensemble quotient.

On remarque que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M contenant a on a une identification canonique $T_a\mathcal{U} = T_aM$ qui envoie la classe de $\gamma \in \mathcal{C}_a(\mathcal{U})$ sur la classe de $\gamma \in \mathcal{C}_a(M)$.

Proposition 3.22. *L'ensemble T_aM possède une unique structure d'espace vectoriel, telle que pour toute carte ϕ de domaine $\mathcal{U}$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} T_aM = T_a\mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^n \\ [\gamma] & \mapsto & (\phi \circ \gamma)'(0) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel T_aM s'appelle l'espace tangent de M en a.

Proposition 3.23. *Si $f : M \to N$ est une application lisse, alors pour tout $a \in M$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_a(M) & \to & \mathcal{C}_{f(a)}(N) \\ \gamma & \mapsto & f \circ \gamma \end{array}$$

passe au quotient en une application linéaire $T_af : T_aM \to T_aN$ qui est appelée l'application tangente de f en a.

Proposition 3.24. *L'application tangente de la composée d'applications lisses suit la règle de la chaîne :*

$$T_a(g \circ f) = (T_{f(a)}g) \circ (T_af)\ .$$

Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_a(M) & \to & \mathbb{R}^N \\ \gamma & \to & \gamma'(0) \end{array}$$

induit un isomorphisme canonique entre l'espace tangent au sens des variétés différentielles et l'espace tangent au sens des sous-variétés. Si $f : M \to N$ est une fonction lisse entre sous-variétés, l'application tangente T_af au sens des sous-variétés coïncide avec l'application tangente T_af au sens des variétés différentielles.

Les notions d'espace tangent et d'application tangente développées pour les variétés différentielles généralisent donc les notions développées pour les sous-variétés à la section 2. Toutefois, le cadre abstrait a un parfum un peu différent. En effet, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, on peut "calculer concrètement" T_aM, en donnant une base ou des équations qui l'identifient en tant que sous-espace de $\mathbb{R}^N$. Dans le cadre abstrait, on ne peut pas "calculer concrètement" T_aM (ce n'est pas naturellement un sous-espace d'un R^k).

Dans le cadre abstrait on peut toutefois "calculer concrètement" T_af : $T_aM \to T_{f(a)}N$ de la manière suivante. Si ϕ est une carte explicite de M dont le domaine contient a et ψ une carte explicite de N dont le domaine contient $f(a)$, et si $f : M \to N$ est donnée par une formule explicite, alors on peut calculer par une formule explicite $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$, qui est une fonction entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et on peut donc calculer explicitement sa différentielle en $\phi(a)$. On a un diagramme commutatif qui exprime comment la formule explicite obtenue est reliée à l'application tangente abstraite T_af.

$$\begin{tikzcd} T_aM \arrow[r, "T_a\phi", "\simeq"'] \arrow[d, "T_af"] & T_a\phi(U) = \mathbb{R}^n \arrow[d, "T_{\phi(a)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1}) = D_{\phi(a)}(\psi\circ f\circ\phi^{-1})"] \\ T_{f(a)}N \arrow[r, "T_{f(a)}\psi", "\simeq"'] & T_a\psi(U) = \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Le théorème d'inversion globale du calcul différentiel se généralise sans difficulté aux variétés différentielles abstraites.

Théorème 3.25. *Soit $f : M \to N$ une bijection lisse entre variétés différentielles. L'application f est un difféomorphisme $\Leftrightarrow$ pour tout $a \in M$, l'application tangente T_af est inversible.*

3.4 Actions de groupes et variétés quotients

Soit G un groupe agissant sur une variété M. Dans cette section nous allons montrer que sous certaines hypothèses sur l'action, l'espace topologique des orbites M/G possède une structure de variété canonique. La difficulté de l'énoncé est essentiellement topologique.

A. Préliminaires topologiques

Définition 3.26. On dit qu'un groupe G agit *de façon continue* sur un espace topologique X si pour tout $g \in G$ l'application $g \cdot - : X \to X$ est continue. On dit que G agit *proprement* s'il agit de façon continue et si pour tous les compacts K, L de X, l'ensemble suivant est fini :

$$\{g \in G\ ,\ g(K) \cap L \neq \emptyset\}\ .$$

Exemples 3.27.

1. Les actions continues des groupes finis sont propres.
2. L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translations est propre.
3. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $n \cdot (x, y) = (2^{-n}x, 2^n y)$ n'est pas propre.

Proposition 3.28. *Si G agit proprement sur un espace X séparé et localement compact, alors le quotient X/G est séparé et localement compact, et la projection $p : X \to X/G$ est ouverte.*

Sous une hypothèse supplémentaire sur l'action, la projection quotient $X \to X/G$ va se comporter encore plus joliment : ce sera un revêtement topologique au sens de la définition suivante.

Définition 3.29. Un *revêtement topologique* est une application continue $p : X \to B$ telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_b$ de b tel que l'image réciproque de $\mathcal{U}_b$ est une réunion disjointe d'ouverts de X

$$p^{-1}(\mathcal{U}_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$$

et telle que les restrictions $p : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_b$ soient des homéomorphismes.

Exemples 3.30.

1. Si F est un espace topologique discret, la projection $F \times B \to B$ est un revêtement topologique, appelé *revêtement trivial.*
2. L'application exponentielle induit un revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$.
3. L'application exponentielle induit un revêtement $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$.
4. L'application puissance n-ème induit un revêtement $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$.
5. Un produit fini de revêtements est un revêtements. Ainsi l'application $\mathbb{R}^n \to (S^1)^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \ldots, e^{2i\pi t_n})$ est un revêtement.

Définition 3.31. On dit qu'un groupe G agit *librement* sur X si tous les stabilisateurs de l'action sont triviaux, c'est-à-dire si pour tout $x \in X$ et pour tout $g \in G$ on a :

$$(gx = x) \ \Rightarrow\ (g = 1)\ .$$

La proposition suivante complémente la proposition 3.28 lorsque l'action est libre.

Proposition 3.32. *Soit G un groupe agissant proprement et librement sur un espace X localement compact. Alors la projection $p : X \to X/G$ est un revêtement.*

B. Actions de groupes lisses et quotients

Définition 3.33. Un groupe G agit *de façon lisse* sur une variété différentielle M si pour tout $g \in G$ l'application $g \cdot - : M \to M$ est lisse.

Définition 3.34. Un *revêtement lisse* est une application lisse $p : M \to B$ telle que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_b$ de b tel que l'image réciproque de $\mathcal{U}_b$ est une réunion disjointe d'ouverts de M

$$p^{-1}(\mathcal{U}_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$$

et telle que les restrictions $p : \mathcal{V}_\alpha \to \mathcal{U}_b$ soient des difféomorphismes.

Exemples 3.35. Les exemples 3.30 sont en fait des exemples de revêtements lisses (dans le premier il faut bien sûr supposer B une variété différentielle.

Remarque 3.36. Si $p : M \to B$ est un revêtement topologique entre variétés lisses, et si p est lisse, alors p n'est pas nécessairement un revêtement lisse. Le problème vient du fait qu'il existe des homéomorphismes lisses qui ne sont pas des difféomorphismes (par exemple l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$).

Le théorème suivant assure l'existence des variétés différentielles quotient.

Théorème 3.37. *Soit M une variété lisse, et soit G un groupe agissant de façon lisse, propre et libre. Alors il existe un unique atlas lisse maximal sur M/G tel que la projection $p : M \to M/G$ soit un revêtement lisse.*

Corollaire 3.38. *Une fonction $f : M/G \to N$ est lisse si et seulement si la composée $f \circ p$ est lisse.*

Les variétés quotient permettent de revisiter certains exemples de variétés différentielles, et d'en donner de nouveaux.

Exemple 3.39 (Tores)**.** Le groupe additif $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations. Le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ possède une structure de variété différentielle, difféomorphe au tore $T^n = (S^1)^n$.

Exemple 3.40 (Espaces projectifs)**.** Le groupe cyclique C_2 à deux éléments agit sur S^n par antipodie (c'est-à-dire que le générateur σ de C_2 agit comme l'application antipode $x \mapsto -x$ sur S^n). Le quotient S^n/C_2 possède une structure de variété différentielle, difféomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.41 (Ruban de Moebius)**.** Le groupe cyclique C_2 à deux éléments agit par antipodie sur la "bande équatoriale" BE de S^2 :

$$\mathrm{BE} = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2, |x_1| < \frac{1}{2} \right\} .$$

Le quotient a une structure de variété différentielle, on l'appelle le ruban de Moebius. Le ruban de Moebius est difféomorphe à un ouvert du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Exemple 3.42 (Variétés lenticulaires)**.** Soient p et q deux entiers premiers entre eux, soit $\zeta = e^{2i\pi/p}$, et soit C_p le groupe cyclique à p éléments et σ un générateur. Alors C_p agit sur

$$S^3 = \{(z_1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \;, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

par la formule

$$\sigma \cdot (z_1, z_2) = (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

Le quotient S^3/C_p possède une structure de variété différentielle, cette variété est notée $L(p,q)$ et appelée la variété lenticulaire (de paramètres (p,q)). Notons que $L(p,q_1) = L(p,q_2)$ si $q_1 = q_2 \mod p$, et que $L(2,1) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Voir l'exercice 23 pour des identifications supplémentaires entre variétés lenticulaire.

3.5 Complément : π_1 des variétés quotients

Nous rappelons maintenant quelques morceaux du cours de topologie algébrique sur le groupe fondamental et les revêtements (module de M1). Les résultats de cette section sont importants et permettent de mieux comprendre la topologie des variétés quotient. Toutefois, nous les donnons ici à titre de "complément culturel" : nous en ferons une utilisation relativement anecdotique. Ces résultats ne seront pas démontrés dans le cours, on renvoie à [FT, Chap 1, 3, 4] ou à [Bre, Chap III] pour les détails des démonstrations et pour des informations complémentaires.

A. Définition du groupe fondamental. Soit X un espace topologique et $x \in X$. Un *lacet de X de point de base x* est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. On note $\Omega_x(X)$ l'ensemble des lacets de X de point de base x.

Deux lacets γ_0 et γ_1 dans $\Omega_x(X)$ sont dits *homotopes par une homotopie pointée* s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que

(i) $H(0,t) = \gamma_0(t)$ pour tout $t \in [0,1]$,

(ii) $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$,

(iii) $H(s,0) = H(s,1) = x$ pour tout $s \in [0,1]$.

L'application H s'appelle une *homotopie pointée*[9]. En d'autres termes, H est une déformation de paramètre s, qui permet de passer de manière continue de γ_0 à γ_1. La dernière condition assure que tout au long de la déformation, l'application $\gamma_s : [0,1] \to X$, $t \mapsto H(s,t)$ reste bien un élément de $\Omega_x(X)$.

La relation d'homotopie pointée est une relation d'équivalence sur $\Omega_x(X)$. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble quotient :

$$\pi_1(X,x) = \Omega_x(X)/\sim$$

9. Le terme "pointée" est là pour rappeler la condition (iii) : le point de base ne bouge pas au cours de la déformation.

Notons $[\gamma] \in \pi_(X,x)$ la classe d'un lacet $\gamma \in \Omega_x(X)$. L'ensemble $\pi_1(X,x)$ est muni d'une structure de groupe par l'opération $[\gamma][\mu] := [\gamma\mu]$, où $\gamma\mu$ est le lacet obtenu en parcourant à la suite les lacets γ et μ, plus précisément :

$$(\gamma\mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \le t \le 1/2, \\ \mu(2t-1) & \text{si } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

L'élément neutre est le lacet constant en x : $\epsilon_x : [0,1] \to X$, $t \mapsto x$, l'inverse γ^{-1} d'un lacet γ est le même lacet, mais parcouru à l'envers $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

L'ensemble $\pi_1(X,x)$, muni de cette structure de groupe, s'appelle le groupe fondamental de X (au point x).

B. Propriétés de base du groupe fondamental.

1. **(In)dépendance du point de base.** [FT, Prop 1.14] S'il existe un chemin de X reliant x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, alors les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.

   En particulier, si X est connexe par arcs, le groupe fondamental ne dépend pas du choix du point de base, à isomorphisme près. Dans ce cas, on dit souvent "le groupe fondamental de X" sans préciser le point de base.

2. **Simple connexité.** Un espace X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si son groupe fondamental est trivial (= si c'est un groupe à un élément).

   Ex n°1 : si X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à un point x, alors X est simplement connexe. En effet, il est connexe par arcs, et si γ est un lacet de X basé en x alors on obtient une homotopie pointée H entre γ et le lacet constant en x en posant $H(s,t) = sx + (1-s)\gamma(t)$.

   Ex n°2 : les sphères S^n, $n \ge 2$, sont simplement connexes. Voir [FT, Thm 1.36] pour une démonstration topologico-algébrique, ou l'exercice **??** pour une démonstration de géométrie différentielle.

3. **Fonctorialité.** Si $f : X \to Y$ est une application continue, elle induit pour tout $x \in X$ un morphisme de groupes :

$$f_\# : \begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(Y, f(x)) \\ [\gamma] & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array} .$$

   En particulier, si f est un homéomorphisme [10], alors $f_\#$ est un isomorphisme d'inverse $(f^{-1})_\#$.

10. Plus généralement, et un peu plus subtilement, si f est une équivalence d'homotopie alors $f_\#$ est un isomorphisme, [FT, Thm 1.17].

C. Groupe fondamental et variétés quotients. Rappelons le théorème 3.37 : si G est un groupe agissant de façon lisse, propre et libre sur une variété différentielle M, alors M/G est une variété et $p : M \to M/G$ est un revêtement lisse.

La théorie des revêtements topologiques est intimement liée au groupe fondamental. Nous énonçons ici deux résultats importants reliant ces notions, que nous formulons dans le cadre des variétés différentielles. Le premier théorème suit de [FT, Thm 4.29 et Prop 4.30].

Théorème 3.43. *si G est un groupe agissant de façon lisse, propre et libre sur une variété différentielle M* **simplement connexe***, alors M/G est connexe par arcs et son groupe fondamental est isomorphe à G.*

Exemples 3.44. S^1 a pour groupe fondamental $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a pour groupe fondamental le groupe cyclique C_2 à deux éléments, $L(p,q)$ a pour groupe fondamental le groupe cyclique C_p à p éléments ...

Le deuxième théorème généralise la construction du logarithme complexe [11]. Plus précisément, on suppose qu'on dispose d'un revêtement lisse $p : M \to B$ et d'une application lisse $f : N \to B$. On prend un point $n \in N$, et un point $m \in M$ tel que $p(m) = f(n) =: b$, et on se demande s'il existe une application lisse $\overline{f} : N \to M$ telle que $\overline{f}(n) = m$. La situation peut être représentée par le diagramme suivant, et $\overline{f}$ est appelé un *relèvement de f*.

$$\begin{tikzcd} & (M,m) \arrow[d, "p"] \\ (N,n) \arrow[ur, dashed, "\exists ?\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & (B,b) \end{tikzcd}$$

D'après l'exercice 21 si on trouve une application $\overline{f}$ continue répondant à ce problème, alors elle est automatiquement lisse. Le théorème suivant est donc une conséquence du théorème [FT, Thm 4.10] sur les revêtements topologiques.

Théorème 3.45. *L'application lisse $\overline{f}$ existe si et seulement si l'image du morphisme de groupes $f_\sharp : \pi_1(N,n) \to \pi_1(B,b)$ est contenue dans l'image du morphisme de groupes $p_\sharp : \pi_1(M,m) \to \pi_1(B,b)$. De plus, si $\overline{f}$ existe, elle est unique.*

le revêtement lisse $p : M \to M/G$ associé à une action de groupe lisse, propre et libre sur une variété simplement connexe M, alors il l'application lisse $\overline{f}$ existe si et seulement si le morphisme de groupes $f_\sharp : \pi_1(N,n) \to \pi_1(B,b)$ est trivial. Cette situation généralise

11. Si on considère le revêtement lisse $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ donné par l'exponentielle, si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ est l'inclusion, alors l'application $\overline{f}$ est une détermination du logarithme sur $\mathcal{U}$.

3.6 Sous-variétés, plongements, submersions

La définition suivante étend la notion de sous-variété de $\mathbb{R}^n$ au cadre des variétés différentielles abstraites.

Définition 3.46. Soit M une variété différentielle de dimension n, et N un sous-ensemble non vide de M. On dit que N est *une sous-variété de M de dimension p* lorsque pour tout $x \in N$, il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ dont le domaine contient x telle que

$$\phi(N \cap \mathcal{U}) = \phi(\mathcal{U}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p) .$$

Si N est une sous-variété de M, alors pour chaque carte $(\mathcal{U}, \phi)$ comme dans la définition, la restriction $\phi : N \cap \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ est un homéomorphisme de $N \cap \mathcal{U}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. L'ensemble de ces restrictions forme un atlas lisse sur N, qui fait de N une variété différentielle abstraite de dimension p.

Définition 3.47. Une application lisse $f : N \to M$ est une *immersion* si pour tout $a \in N$, l'application tangente $T_a f$ est injective. Un *plongement* est une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image.

Exemple 3.48. Si N est une sous-variété de M, alors l'inclusion $N \hookrightarrow M$ est un plongement.

La proposition suivante montre que l'exemple 3.48 est, à difféomorphisme près, l'unique exemple de plongement.

Proposition 3.49. *Soit $f : N \to M$ un plongement. Alors l'image $f(N)$ est une sous-variété de M, et f induit un difféomorphisme de N sur $f(N)$.*

Les submersions sont un moyen commode de produire des sous-variétés.

Définition 3.50. Une application lisse $f : M \to L$ est une *submersion* si pour tout $a \in M$, l'application tangente $T_a f$ est surjective (injective).

Proposition 3.51. *Soit $f : M \to L$ une submersion. Alors pour tout $b \in L$, l'ensemble de niveau $M_b := f^{-1}(b)$ est une sous-variété de M de dimension* $\dim M - \dim L$*, et pour tout $a \in M_b$ l'espace tangent $T_a M_b$ est égal au noyau de $T_a f$.*

Théorème 3.52 (Whitney)**.** *Toute variété différentielle se plonge dans un espace vectoriel.*

De manière équivalente, toute variété différentielle est isomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Les variétés différentielles abstraites n'apportent finalement pas de nouveaux exemples par rapport aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, mais remarquons que la théorie abstraite est plus souple d'utilisation : par exemple il aurait été bien pénible d'exposer la construction des quotients dans le cadre des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$!

3.7 Partitions de l'unité

Soit $\mathbb{U} = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de M. Un *raffinement* de $\mathbb{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathbb{V} = (\mathcal{V}_\beta)_{\beta \in B}$ tel que pour tout $\beta \in B$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{U}_\alpha$. Un recouvrement ouvert $\mathbb{U}$ est dit *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage B qui n'intersecte non trivialement $\mathcal{U}_\alpha$ pour un nombre fini d'indices α seulement.

Rappelons que le *support* d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est le sous ensemble fermé $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in M \ , \ f(x) \neq 0\}}$.

Théorème 3.53. *Soit M une variété différentielle.*

1. *Tout recouvrement ouvert de M admet un raffinement qui est localement fini.*
2. *Si $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert localement fini de M alors il existe une famille de fonctions lisses $g_\alpha : M \to [0,1]$ telle que :*
   - *(i) Pour tout $\alpha \in A$, $\mathrm{supp}(g_\alpha) \subset \mathcal{U}_\alpha$,*
   - *(ii) $\sum_{\alpha \in A} g_\alpha = 1$.*

Remarque 3.54. Pour tout $x \in M$ la finitude locale du recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ et la condition (i) impliquent que la somme $\sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. C'est donc une somme "algébrique".

Les partitions de l'unité sont un outil puissant pour construire des objets globaux à partir d'objets locaux. La proposition suivante est un exemple type de ce genre de situation. Nous donnons la démonstration car c'est un raisonnement standard.

Proposition 3.55. *Soit N une sous-variété de M. Pour toute fonction lisse $f : N \to \mathbb{R}$ il existe une fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$ dont la restriction à N est égale à f.*

Démonstration. 1. On démontre d'abord le résultat localement : pour tout $x \in N$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_x$ de M et une fonction lisse $F_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $N \cap \mathcal{U}_x$ coïncide avec f.

   Pour montrer ce résultat local, on utilise une carte $(\mathcal{U}_x, \phi_x)$ autour de x, qui redresse la sous-variété N : $\phi_x(N \cap \mathcal{U}_x) = \phi_x(\mathcal{U}_x) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^p)$. Quitte à rétrécir $\mathcal{U}_x$ on peut supposer que $\phi_x(\mathcal{U}_x)$ est de la forme $V \times W$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$ et W un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Trouver une fonction lisse F_x qui étende f à $\mathcal{U}_x$ est alors équivalent à trouver une fonction lisse qui étende $f \circ \phi_x^{-1} : \{0\} \times W \to \mathbb{R}$ à $V \times W$, ce qui est facile à faire (on prend la fonction $(x, y) \mapsto f(\phi_x^{-1}(0, y))$).

2. On utilise alors le théorème des partitions de l'unité pour "recoller les fonctions définies localement".

Plus précisément, si $x \in M \setminus N$, on choisit un ouvert $\mathcal{U}_x$ contenant x et ne rencontrant pas N, et on pose $F_x := 0 : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$. Avec les ouverts de la première étape, on obtient donc un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_x)_{x\in M}$ de M, qui admet un raffinement $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha\in A}$ localement fini. Pour chaque indice α, on choisit un x tel que $\mathcal{V}_\alpha \subset \mathcal{U}_x$ et on note $F_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to \mathbb{R}$ la restriction de F_x à $\mathcal{V}_\alpha$.

Les F_α ont été définies indépendamment les unes des autres, elles n'ont aucune raison de se recoller convenablement pour former une fonction lisse F. Mais on contourne ce problème à l'aide d'une partition de l'unité $g_\alpha : \mathcal{V}_\alpha \to [0,1]$ associée au recouvrement $(\mathcal{V}_\alpha)_{\alpha\in A}$. On définit d'abord des fonctions lisses :

$$\begin{array}{rccl} \overline{F}_\alpha : & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} g_\alpha(x)F_\alpha(x) & \text{si } x \in \mathcal{V}_\alpha, \\ 0 & \text{si } x \in M \setminus \operatorname{supp}(g_\alpha). \end{cases} \end{array}$$

(Les $\overline{F}_\alpha$ sont bien lisses car définies comme la réunion de deux fonctions lisses qui coïncident sur l'intersection de leurs ensembles de définition.) On peut maintenant définir la fonction globale F comme la somme :

$$F := \sum_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha \;.$$

Cette somme est finie au voisinage de chaque $x \in M$ (car le recouvrement formé par les $\mathcal{V}_\alpha$ est localement fini et $\operatorname{supp}(\overline{F}_\alpha) \subset \mathcal{V}_\alpha$) et elle est lisse car localement une somme finie de fonctions lisses. De plus si $x \in N$ alors on a

$$F(x) = \sum_{\alpha\in A} \overline{F}_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in A\,,\, x\in\mathcal{V}_\alpha} \overline{F}_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in A\,,\, x\in\mathcal{V}_\alpha} g_\alpha(x)F_\alpha(x) \;.$$

Comme $x \in N \cap \mathcal{V}_\alpha$ on a $F_\alpha(x) = f(x)$, et comme les g_α sont une partition de l'unité on a :

$$F(x) = \sum_{\alpha\in A\,,\, x\in\mathcal{V}_\alpha} g_\alpha(x)f(x) = \sum_{\alpha\in A} g_\alpha(x)f(x) = f(x) \;.$$

□

3.8 Autour du lemme de Sard

Une partie X d'une variété différentielle M est dite *négligeable* si pour toute carte $(\mathcal{U},\phi)$ de M, la partie $\phi(\mathcal{U} \cap X)$ est négligeable dans $\mathbb{R}^{\dim M}$. Les sous-ensembles d'une partie négligeable sont négligeables, et les parties négligeables sont stables par réunion dénombrable.

Proposition 3.56. *Soit $f : N \to M$ une fonction lisse. Si $\dim N < \dim M$, alors l'image de f est négligeable dans M.*

La proposition précédente est un un point clé pour faire fonctionner des arguments de position générale. L'exemple suivant est un modèle élémentaire de ce genre d'argument.

Exemple 3.57. Soit M et N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ telles que $\dim M + \dim N < n$. Alors pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que $||b|| < \epsilon$ et tel que la variété translatée $b + M = \{b + m\ ,\ m \in M\}$ ne rencontre pas N. En effet la l'image de la fonction $f : M \times N \to \mathbb{R}^n$, $(m, n) \mapsto m - n$ est de mesure nulle, et le complémentaire de l'image est précisément l'ensemble des vecteurs b tels que $(b+M) \cap N = \emptyset$. Remarquons que la condition sur les dimensions est absolument nécessaire : deux cercles de $\mathbb{R}^2$ ayant une corde commune ne peuvent pas être séparés si on translate l'un des deux par un vecteur trop petit.

Un raisonnement du même type, mais un peu plus sophistiqué, permet de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 3.58. *Pour tout vecteur $v \in S^{n-1}$, on note $p_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur l'hyperplan $v^\perp$. Si $f : M \to \mathbb{R}^n$ est un plongement, on note :*

$$I_f = \{v \in S^{n-1}\ , p_v \circ f \text{ est une immersion }\}\ ,$$
$$P_f = \{v \in S^{n-1}\ , p_v \circ f \text{ est un plongement }\}\ ,$$

Alors I_f est dense dans S^{n-1} dès que $2\dim M < n$, et P_f est dense dans S^{n-1} dès que $2\dim M + 1 < n$.

Corollaire 3.59. *Toute variété différentielle de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ et s'immerge dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Proposition 3.60. *Soit $f : M \to \mathbb{R}^n$ un plongement. Soit $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\mathrm{pr}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$.*

Si $2\dim M + 1 < n$ alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe une application linéaire $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $|||a - \mathrm{pr}||| < \epsilon$ et $a \circ f$ est un plongement.

Si $2\dim M < n$ alors pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe une application linéaire $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ telle que $|||a - \mathrm{pr}||| < \epsilon$ et $a \circ f$ est une immersion.

Corollaire 3.61. *Soit M une variété compacte, et considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ muni de la norme infinie (norme de la convergence uniforme). Si $2\dim M \le k$ alors les immersions sont denses dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, et si $2\dim M + 1 \le k$ alors les plongements sont denses dans $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^k)$.*

3.9 Complément : classification des variétés

Une question "naïve" est de classifier les variétés différentielles à difféomorphisme près. Ceci peut être réalisé en dimension 1, où l'on peut montrer que toute variété de dimension 1 est difféomorphe au cercle S^1 ou à la droite réelle $\mathbb{R}$, voir par exemple [Laf, Chap III, thm 55].

Le monde des variétés de dimension 2 est plus riche, mais encore classifiable (au moins en ce qui concerne les variétés compactes). On peut montrer que les surfaces lisses compactes sont caractérisées à difféomorphisme près par deux notions : leur orientabilité (une surface est orientable si et seulement si elle ne contient pas de ruban de Moebius, nous reviendrons sur cette notion un peu plus tard dans le cours), et leur genre g (le genre de M est l'entier $\frac{1}{2}\dim H^1(M)$, nous y reviendrons également plus tard dans le cours). Pour produire des modèles explicites des surfaces, on peut utiliser l'opération de somme connexe $\#$, voir par exemple [Laf, Chap II, ex 28]. Plus précisément, toute surface orientable compacte est difféomorphe à une surface :

$$S_g := S^2 \# \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ copies de } T^2}$$

pour un unique $g \geq 0$, et toute surface non orientable compacte est difféomorphe à la surface

$$S'_g := \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \underbrace{\# T^2 \# \cdots \# T^2}_{g \text{ copies de } T^2}$$

pour un unique $g \geq 0$. Une démonstration classique de la classification passe par la théorie de Morse, voir par exemple l'article d'exposition :

[CKK] A. Champanerkar, A. Kumar et S. Kumaresan, Classification of surfaces via Morse theory, Expositiones Mathemathicae, 18 (2000) no. 1, 37–73.

A partir de la dimension 3 la situation devient beaucoup plus compliquée, et la classification est hors de portée. Ainsi, le simple fait de montrer qu'à difféomorphisme près, la seule variété compacte simplement connexe de dimension 3 est la sphère S^3, est l'objet de la célèbre conjecture de Poincaré (résolue en 2002 par G. Perelman).

3.10 Exercices du chapitre 3

Exercice 15. Propriétés des variétés topologiques. Soit M une variété topologique de dimension n.

1. Montrez que $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe de M si et seulement si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs.
2. Montrez que si M est connexe et si $n \geq 2$ alors pour tout $x \in M$ $M \setminus \{x\}$ connexe.
3. Montrez que les composantes connexes de M sont ouvertes et fermées dans M.
4. Montrez que si M est compacte, elle a un nombre fini de composantes connexes.

Exercice 16. Atlas dénombrable. Soit M une variété différentielle. Montrez que l'on peut trouver une famille dénombrable de cartes dont les domaines recouvrent M.

Exercice 17. Cartes de l'atlas maximal engendré par $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}$ un atlas lisse sur une variété topologique M, et $\mathcal{A}_{\max}$ l'atlas maximal associé.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de M et $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrez que $\phi \in \mathcal{A}_{\max}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{U}$ on peut trouver une carte $(\mathcal{U}', \phi') \in \mathcal{A}$ dont le domaine contient x, et un difféomorphisme $\psi : \phi'(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \to \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$ telles que les applications ϕ et $\psi \circ \phi'$ sont égales sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$.

Exercice 18. Espaces projectifs complexes. Notons $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ x = \lambda y$. On munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la topologie quotient. On note $[z_0 : \cdots : z_n]$ la classe d'équivalence d'un point

1. Montrez que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est égal au quotient de $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \ , |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in S^1 \ x = \lambda y$.

   En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est séparé, puis que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est compact.
2. Montrez que les sous-ensembles $\mathcal{U}_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] \ , \ z_i \neq 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, et que les fonctions
$$\begin{array}{cccc} \phi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : \cdots : z_n] & \mapsto & \dfrac{1}{z_i}(z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \end{array}$$
   sont des homéomorphismes.
3. Montrez que les ϕ_i, $0 \leq i \leq n$, forment un atlas lisse de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 19. Droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On interprète S^2 comme la sous-variété $\{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ , \ |z|^2 + t^2 = 1\}$.

1. Montrez que l'application $h : S^3 \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ telle que $h(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z_2}, |z_1|^2 - |z_2|^2)$ a pour image S^2.
2. Montrez que h induit une bijection continue $\overline{h} : \mathrm{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$.
3. Montrez que $\overline{h}$ est un difféomorphisme.

Exercice 20. Revêtements vs difféomorphismes locaux.

1. Soit $p : X \to B$ un revêtement, de base B connexe. Montrez que le cardinal de $p^{-1}(b)$ est indépendant de b.
2. Soit $p : X \to B$ un difféomorphisme local, tel que pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(b)$ est de cardinal fini n indépendant de b. Montrez que p est un revêtement lisse.
3. Trouvez un exemple de difféomorphisme local, dont toutes les fibres sont de même cardinal infini dénombrable, et qui n'est pas un revêtement lisse.

   [Indication : "poinçonnez" l'exponentielle.]

Exercice 21. Lissité et revêtements. Soit $p : M \to B$ un revêtement lisse, et $f : N \to M$ une application continue. Montrez que f est lisse si et seulement si $p \circ f$ est lisse.

Exercice 22. Quotients du cercle.

1. On identifie S^1 avec l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère le groupe cyclique $C_n = \{e^{ik\pi/n}, 0 \leq k < n\}$, qui agit sur S^1 par multiplication.

   Montrez que l'on a un difféomorphisme $S^1/C_n \simeq S^1$.
2. En déduire que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est difféomorphe à S^1.

Exercice 23. Variétés lenticulaires. Soient p et q deux nombres premiers entre eux, et $L(p,q)$ la variété lenticulaire associée (voir l'exemple 3.42). On voit S^3 comme la sphère unité de $\mathbb{C}^2$.

1. Montrez que si $L(p,q)$ et $L(p',q')$ sont difféomorphes, alors $p = p'$.

   [Indication : utilisez le groupe fondamental.]
2. On suppose que $q_1 = -q_2 \mod p$. Montrez que l'application $S^3 \to S^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \overline{z_2})$ induit un difféomorphisme entre $L(p;q_1)$ et $L(p;q_2)$.
3. On suppose que $q_1q_2 = 1 \mod p$. Montrez que l'application $S^3 \to S^3$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$ induit un difféomorphisme entre $L(p,q_1)$ et $L(p,q_2)$.
4. En déduire que si $q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \mod p$, alors $L(p,q_1)$ et $L(p,q_2)$ sont difféomorphes.

[Pour la culture : on peut en fait montrer que $L(p,q_1)$ et $L(p,q_2)$ sont difféomorphes si et seulement si $q_1 = \pm q_2^{\pm 1} \mod p$, mais les techniques utilisées pour démontrer la partie "seulement si" dépassent le cadre de ce cours. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article "espaces lenticulaires" de wikipédia, et les références qui y sont mentionnées.]

Exercice 24. Immersions, submersions. Soit M une variété différentielle de dimension m, N une variété différentielle de dimension n et $f : M \to N$ une application lisse.

1. On suppose que f est une submersion. Montrez que pour tout $x \in M$ il existe une carte (U, ϕ) de M dont le domaine contient x et une carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$ et telles que la composée
$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$
est égale à l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_p)$.
2. On suppose que f est une immersion. Montrez que pour tout $x \in M$ il existe une carte (U, ϕ) de M dont le domaine contient x et une carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$ et telles que la composée
$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$
est égale à l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

Exercice 25. Sous-variétés et applications de rang constant. Soit $f : M \to N$ une application lisse telle que pour tout $a \in M$, $T_a f$ est de rang r, pour un entier r indépendant de a. Montrez que pour tout $b \in N$ l'ensemble de niveau $M_b = f^{-1}(b)$ est une sous-variété de M, dont on précisera la dimension.

Exercice 26. Droite de Kronecker du tore. Soit α un nombre réel. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'application telle que $\gamma(t) = (t, \alpha t)$.

1. Montrez que γ est une immersion lisse.
2. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Notons $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action par translation du sous-groupe discret $q\mathbb{Z}$ des entiers multiples de q.
   (a) Montrez que $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ est une variété différentielle difféomorphe à S^1, et que l'application quotient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ est un revêtement lisse.
   (b) Montrez qu'il existe un plongement $\overline{\gamma} : \mathbb{R}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tel que $\gamma = \overline{\gamma} \circ q$.
   (c) Montrez que l'image de γ est un sous-variété du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, difféomorphe à S^1.
3. On suppose maintenant $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dans ce cas, l'image de γ s'appelle la *droite de Kronecker du tore* $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Nous la noterons D_α dans cet exercice.

(a) Montrez que D_α est dense dans le tore.

(b) Déduisez-en que D_α n'est pas une sous-variété du tore, et que γ est une immersion injective lisse qui n'est pas un plongement.

Exercice 27. Connexité du complémentaire. Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ telle que $\dim M \leq n-2$. Soit $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n \setminus M$. Soient x et y deux points distincts de $\mathcal{U}$.

Soit $\lambda : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction lisse telle que $\lambda(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\lambda(t) = 1$ pour $t \geq 1$. On considère la fonction $f_{x,y} : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ telle que $f_{x,y}(m,t) = m - x - \lambda(t)(y-x)$.

1. Justifier que l'image de $f_{x,y}$ est de mesure nulle.
2. Déduisez-en l'existence d'un chemin continu de $\mathcal{U}$ reliant x et y.

4 Champs de vecteurs

4.1 Définitions

A. Champs de vecteurs sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de R^n. Un *champ de vecteurs* sur $\mathcal{U}$ est la donnée pour chaque point $x \in \mathcal{U}$ d'un vecteur X_x de $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteur est dit *lisse* lorsqu'il définit une application lisse :

$$X : \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & X_x \end{array} .$$

On définit les combinaisons linéaires de champs de vecteurs par $(\lambda X + \mu Y)_x := \lambda X_x + \mu Y_x$. Si X et Y sont deux champs de vecteurs lisses sur $\mathcal{U}$, alors leur combinaison linéaire est un champ de vecteurs lisse sur $\mathcal{U}$.

Si $\phi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ est un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, et si v est un champ de vecteurs sur $\mathcal{U}_1$, *l'image de v par ϕ* est le champ de vecteurs $\phi_* X$ sur $\mathcal{U}_2$ défini en tout $\phi(x) \in \mathcal{U}_2$ par :

$$(\phi_* X)_{\phi(x)} = D_x\phi(X_x) .$$

Lemme 4.1. *1. L'opération d'image par un difféomorphisme est compatible avec la composition : $\psi_*(\phi_* X) = (\psi \circ \phi)_* X$.*

2. Le champ de vecteurs $\phi_* X$ est lisse si et seulement si v est lisse.

B. Champs de vecteurs sur les variétés. Soit M une variété différentielle. Un *champ de vecteurs X sur M* est la donnée pour chaque point $x \in M$ d'un vecteur $X_x \in T_x M$. On définit les combinaisons linéaires de champs de vecteurs par la formule évidente : $(\lambda X + \mu Y)_x := \lambda X_x + \mu Y_x$. Si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, *l'image de X par ϕ* est le champ de vecteurs $\phi_* X$ sur N défini en tout point $\phi(x) \in N$ par :

$$(\phi_* X)_{\phi(x)} = T_x\phi(X_x) .$$

Un champ de vecteurs X sur M est *lisse au voisinage de x* s'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ autour de x telle que $\phi_* X_{|\mathcal{U}}$ est lisse comme champ de vecteurs sur l'ouvert $\phi(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$ (ici $X_{|\mathcal{U}}$ désigne la restriction du champ de vecteurs v à l'ouvert $\mathcal{U}$). Cette notion est indépendante du choix de la carte $(\mathcal{U}, \phi)$. Un champ de vecteurs sur M est *lisse* s'il est lisse au voisinage de chacun de ses points.

Lemme 4.2. *1. Si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, le champ de vecteurs $\phi_* X$ est lisse si et seulement si X est lisse.*

2. Une combinaison linéaire de champs de vecteurs lisses est lisse.

4.2 Flot d'un champ de vecteurs

A. Rappels du cours d'équations différentielles Soit X un champ de vecteurs lisse sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. On considère l'équation différentielle associée :

$$\dot{\gamma} = X_\gamma \qquad (E)$$

Une *solution de* (E) est un couple (I,γ) où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une application lisse, telle que

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \;, \quad \forall t \in I \;.$$

L'existence et l'unicité de solutions est donnée par le théorème de Cauchy et Lipschitz.

Théorème 4.3 (Cauchy Lipschitz)**.** *1. Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une solution (I,γ) telle que (i) $0 \in I$ et (ii) $\gamma(0) = x$.*

2. Si (J,μ) est une autre solution verifiant (i) et (ii), alors $\gamma_{|I\cap J} = \mu_{I\cap J}$.

On dit qu'une solution (J,μ) *prolonge* (I,γ) si $J \supset I$ et $\mu_{|I} = \gamma$. Une solution (I,γ) est *maximale* si son seul prolongement est (I,γ).

Lemme 4.4 (Zornette)**.** *Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale (I_x,γ_x) de (E) vérifiant (i) et (ii).*

Le *flot de l'équation différentielle* (E) est défini de la manière suivante. Posons

$$\Omega := \bigsqcup_{x\in\mathcal{U}} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R}\times\mathcal{U}$$

où chaque I_x est l'intervalle de définition de la solution maximale (I_x,γ_x) telle que $\gamma_x(0) = x$. Le *flot de* (E) est l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi^X : & \Omega & \to & \mathcal{U} \\ & (t,x) & \mapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

Théorème 4.5 (Régularité du flot)**.** *Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathcal{U}$, et ϕ^X est une application lisse.*

Cas des variétés différentielles. Tout ce qui a été rappelé (définitions et théorèmes [12]) dans la section précédente reste valable sans aucun changement si on remplace $\mathcal{U}$ par une variété différentielle M. Dans le cas d'une variété M compacte, on dispose de plus du résultat suivant.

12. La preuve des deux théorèmes (Cauchy-Lipschitz et régularité du flot) s'obtient à partir des théorèmes sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ en regardant dans les cartes. La preuve du lemme d'existence des solutions maximales (une simple application du lemme de Zorn) est identique à celle du cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.6. *Si $\mathcal{U} = M$ est une variété compacte, alors l'ouvert Ω de définition du flot est égale à $\mathbb{R} \times M$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi_t^X : & M & \to & M \\ & x & \mapsto & \phi^X(t,x) \end{array}$$

vérifie $\phi_{s+t}^X = \phi_s^X \circ \phi_t^X$ pour tous les réels s et t, et $\phi_0^X = \mathrm{id}_M$.

Les deux dernières conditions signifient que le flot définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{Diff}(M), \circ)$ des difféomorphismes de M. Les champs de vecteurs constituent donc un moyen de construire des familles de difféomorphismes de M dont on contrôle bien les propriétés. Le résultat suivant est un exemple d'application.

Théorème 4.7. *Soit M une variété différentielle compacte, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose*

$$M^{\leq t} := f^{-1}(]-\infty, t]) \;.$$

Si $a < b$ et si $f^{-1}([a,b])$ ne contient aucun point critique de f, alors il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi(M^{\leq a}) = M^{\leq b}$.

4.3 Le fibré tangent

Le fibré tangent d'un variété différentielle M est un moyen de conceptualiser les espaces tangents et les champs de vecteurs. Pour le définir, on considère l'ensemble :

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M \;.$$

Un vecteur v de l'espace tangent T_xM sera souvent noté (x, v). On considère également l'application ensembliste

$$\begin{array}{rccc} p : & TM & \to & M \\ & (x,v) & \mapsto & x \end{array} \;.$$

Si $(\mathcal{U}, \phi)$ est une carte de M, on note $T\mathcal{U} := p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathcal{U}} T_xM \subset TM$ et on définit une bijection :

$$\begin{array}{rccc} T\phi : & T\mathcal{U} & \to & \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \\ & (x,v) & \mapsto & (\phi(x), T_x\phi(v)) \end{array} \;.$$

Théorème 4.8.
1. *Il existe une unique topologie sur TM telle que les ensembles $T\mathcal{U}$ soient ouverts et les applications $T\phi$ soient des homéomorphismes. Cette topologie est séparée et σ-compacte.*
2. *Les applications $T\phi$, pour toutes les cartes ϕ de M, forment un atlas lisse de TM, qui définit une structure de variété différentielle sur TM. L'application $p : TM \to M$ est une submersion lisse.*

3. *Donner un champ de vecteurs X sur M est équivalent à donner une application $\widetilde{X} : M \to TM$ telle que $p \circ \widetilde{X} = \mathrm{id}_M$. Le champ de vecteurs est lisse si et seulement si cette application est lisse.*
4. *Si $f : M \to N$ est une application lisse, l'application $Tf : TM \to TN$ telle que $(Tf)(x, v) = (f(x), T_x f(v))$ est lisse.*

Remarque 4.9. Le dernier point du théorème généralise à toutes les applications lisses $f : M \to N$ la construction des applications $T\phi$ qui définissent la structure lisse de TM.

Le fibré tangent est un fibré vectoriel au sens de la définition suivante.

Définition 4.10. Un *fibré vectoriel (lisse) de rang* n est une application lisse $p : E \to B$ telle que :

(i) pour tout $b \in B$, la fibre $p^{-1}(b)$ est munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension n,

(ii) pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

et dont les restrictions $\Phi : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ sont des isomorphismes linéaires pour tout $x \in \mathcal{U}$.

L'espace total E d'un fibré vectoriel est donc une variété qui est *localement* le produit d'une variété différentielle et d'un espace vectoriel.

Définition 4.11. Un *isomorphisme de fibrés vectoriels* entre $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ est un difféomorphisme $\Phi : E \to E'$ tel que pour tout $x \in B$, la restriction $\Phi : p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire, et tel que $p = \Phi \circ p'$. Un fibré vectoriel $p : E \to B$ de rang n est dit *trivialisable* s'il est isomorphe au fibré trivial $\mathrm{pr}_B : B \times \mathbb{R}^n \to B$.

Exemple 4.12. Le fibré tangent d'une variété M de dimension n est trivialisable si et seulement s'il existe n champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ sur M qui forment une famille libre en tout point.

Ainsi le fibré tangent de la sphère S^1 est trivialisable, mais pas celui de la sphère S^2 (à cause du théorème de la "boule chevelue").

4.4 Champs de vecteurs sur les groupes de Lie

Définition 4.13. Un *groupe de Lie* est une variété différentielle, munie d'une structure de groupe, telle que la multiplication et l'inverse définissent des applications lisses :

$$m : G \times G \to G \ , \qquad \iota : G \to G \ .$$

Un *sous-groupe de Lie* de G est une sous-groupe H de G qui est une sous-variété. Un *morphisme de groupes de Lie* est un morphisme de groupes lisse $f : G \to H$ entre deux groupes de Lie.

Exemples 4.14. 1. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe de Lie de dimension n^2, de dimension n^2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de dimension $2n^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{K})$, de dimension $n^2 - 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de dimension $2(n^2 - 1)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe de Lie de dimension 1. Les applications $f, g : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ telles que
$$f(t) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \qquad g(t) = \left[\begin{smallmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$$
sont des morphismes de groupes de Lie.

Pour tout $g \in G$ on note $L_g, R_g : G \to G$ les difféomorphismes lisses données par les translations à gauche et à droite par G :
$$L_g(x) = gx , \qquad R_g(x) = xg .$$
Pour tout champ de vecteurs X de G, on dispose des champs de vecteurs translatés $(L_g)_*X$ et $(R_g)_*X$.

Définition 4.15. Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à gauche* si $(L_g)_*X = X$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire si $X_g = T_eL_g(X_e)$ pour tout $g \in G$.

Théorème 4.16. *Tous les champs de vecteurs invariants à gauche sont automatiquement lisses. L'application $X \mapsto X_e$ induit un isomorphisme entre l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche et l'espace vectoriel T_eG.*

Corollaire 4.17. *Les groupes de Lie sont des variétés parallélisables.*

Nous introduisons maintenant un deuxième concept relié à l'espace vectoriel tangent T_eG.

Définition 4.18. Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G est un morphisme de groupes de Lie $h : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Théorème 4.19. *Pour tout $v \in T_eG$, il existe un unique groupe de Lie à un paramètre h^v tel que $h^v(0) = 1_G$ et $(h^v)'(0) = v$.*

Sur une variété différentielle quelconque, les vecteurs tangents sont les dérivées des courbes lisses. Le théorème 4.19 dit que sur les groupes de Lie, on peut remplacer les courbes lisses quelconques par les courbes lisses très particulières que sont les sous-groupes à un paramètre. La démonstration du théorème consiste à montrer que h^v est la solution maximale de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs invariant à gauche X satisfaisant $X_e = v$.

Exemple 4.20. Si G est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, alors $T_eG \subset M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in T_eG$, $h^A(t) = \exp(tA) \in G$ (le fait que l'exponentielle d'un élément de T_eG est dans G se déduit du théorème 4.19).

L'exemple 4.20 motive la définition suivante.

Définition 4.21. On note exp : $T_eG \to G$ l'application qui associe à tout $v \in T_eG$ l'élément $h^v(1) \in G$, où h^v est le groupe à un paramètre déterminé par v.

Proposition 4.22. *L'exponentielle est lisse et* $T_0 \exp = \mathrm{id}$. *En particulier l'exponentielle est un difféomorphisme local en* 0. *Enfin,* $\exp(-v) = \exp(v)^{-1}$ *pour tout* v.

Comme exemple d'application, nous donnons un théorème de structure sur le voisinage d'un sous-groupe de Lie.

Théorème 4.23. *Soit H un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie G. Soit S un supplémentaire de T_eH dans T_eG. Alors il existe une boule ouverte B de S de centre 0 telle que l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & B \times H & \to & G \\ & (b,h) & \mapsto & \exp(b)h \end{array}$$

soit un difféomorphisme de $B \times H$ sur un ouvert $f(B \times H)$ de G.

4.5 Devoir maison

Exercice 28. Une variante du théorème d'inversion globale. Soit $f : N \to P$ une application lisse entre variétés et K un compact de N tel que

(i) pour tout $x \in K$, $T_x f$ est un isomorphisme,

(ii) la restriction $f : K \to P$ est injective.

On suppose que N une sous variété de $\mathbb{R}^q$, on note d la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^q$, et pour tout entier $k > 0$, on définit

$$K^{1/k} = \left\{ x \in N \;\middle|\; d(x, K) < \frac{1}{k} \right\} .$$

1°) Montrez qu'il existe k_0 tel que pour tout $x \in K^{1/k_0}$, $T_x f$ est un isomorphisme.

2°) Montrez qu'il existe k_1 tel que $f : K^{1/k_1} \to P$ est injective.

[Indication : procédez par l'absurde, en supposant que pour chaque k on dispose de deux points a_k et b_k tels que $f(a_k) = f(b_k)$, et extrayez des sous-suites de (a_k) et (b_k) qui convergent vers a et b...]

3°) Déduisez en qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de N contenant K tel que $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est un difféomorphisme.

Exercice 29. Voisinages tubulaires. Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\epsilon > 0$ on pose :

$$M^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \epsilon\} .$$

Le but de cet exercice est de montrer que si ϵ est assez petit, alors il existe une application de projection $\pi_\epsilon : M^\epsilon \to M$ telle que π_ϵ est une submersion, et tel que $\pi_\epsilon(y)$ est l'unique point $z \in M$ tel que $d(z, y) = d(y, M)$.

1°) On pose $\mathcal{N}M = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_x M^\perp\}$ et on note $p : \mathcal{N}M \to M$ l'application $p(x, v) = x$.

(a) Montrez que si $(\mathcal{U}, \phi)$ est une carte de $\mathbb{R}^n$ qui redresse M, alors l'application $D\phi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$ telle que $D\phi(x, v) = (\phi(x), D_x\phi(v))$ est une carte de R^{2n} qui redresse $\mathcal{N}M$.

(b) En déduire que $\mathcal{N}M$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension n, et que p est un fibré vectoriel de rang $n - \dim M$.

***

On appelle $p : \mathcal{N}M \to M$ le fibré normal à la sous-variété M.

***

2°) On note $h : \mathcal{N}M \to \mathbb{R}^n$ l'application $h(x,v) = x + v$.

(a) Montrez que pour tout $x \in M$, $T_{(x,0)}h$ est inversible.

(b) Montrez qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{N}M$ contenant $M \times \{0\}$ et un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant M tel que la restriction de h soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.

[Indication : utilisez l'exercice 1]

(c) En déduire qu'il existe un ϵ_0 tel que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, la restriction $h : h^{-1}(M^\epsilon) \to M^\epsilon$ est un difféomorphisme.

***

On appelle M^ϵ un voisinage tubulaire de M dans $\mathbb{R}^n$.

***

3°) On fixe maintenant ϵ comme à la question 2°) (c), et on note

$$\begin{array}{cccc} \pi_\epsilon : & M^\epsilon & \to & M \\ & x & \mapsto & p(h^{-1}(x)) \end{array} .$$

(a) Justifiez que π_ϵ est une submersion.

(b) Soit $y \in M^\epsilon$. Justifiez qu'il existe $z \in M$ tel que $d(y,z) = d(y,M)$.

(c) On fixe $y \in M^\epsilon$, et $z \in M$ tel que $d(y,z) = d(y,M)$. Montrez que $(y - z) \in T_zM^\perp$, et déduisez-en que $\pi_\epsilon(y) = z$.

[Indication : pour montrer que $z - y \in T_zM^\perp$, utilisez que si γ est une courbe lisse de M telle que $\gamma(0) = z$, alors la fonction $t \mapsto ||\gamma(t) - y||^2$ est lisse, de dérivée nulle en 0.]

Exercice 30. Autour de l'approximation des fonctions continues par des fonctions lisses. Dans tout l'exercice, on se fixe une variété lisse N.

1°) Soit $f : N \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit A un fermé de N (éventuellement vide) tel que f est lisse sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}_A$ de A. On fixe un réel $\epsilon > 0$.

(a) Montrez que pour tout $x \in N \setminus A$ il existe un ouvert $\mathcal{U}_x \subset N \setminus A$ contenant x, et une application $g_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}$ constante telle que pour tout $y \in \mathcal{U}_x$ on a $|g_x(y) - f(y)| < \epsilon/2$

(b) A l'aide d'une partition de l'unité et des applications g_x précédentes, construisez une application lisse

$$g : N \to \mathbb{R}$$

telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, et telle que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in N$.

2°) Soit $f : N \to M$ une fonction continue à valeurs dans une sous-variété compacte M de $\mathbb{R}^k$. Soit A un fermé de N (éventuellement vide) tel que f est lisse sur un voisinage ouvert de A.

(a) On fixe $\epsilon > 0$. Montrez qu'il existe une application lisse $g : N \to M$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \in A$, et telle que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in N$.

[Indication : utilisez la question précédente et l'exercice 2]

(b) Montrez qu'il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que si $g : N \to M$ est une fonction telle que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ pour tout x alors f et g sont homotopes.

[Rappel : une homotopie est une application $H : N \times [0, 1] \to M$ continue telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. Indication : construisez l'homotopie dans un voisinage tubulaire de M et utilisez la projection associée.]

3°) Soit $f : N \to S^k$ une fonction continue. On suppose $k > \dim N$. Montrez que f est homotope à une application constante.

[Indication : On peut se ramener au cas où f est lisse (justifiez !), et dans ce cas on commencera par montrer que l'image de f évite au moins un point, donc est contenue dans un ouvert de S^k homéomorphe à $\mathbb{R}^k$.]

Exercice 31. Une propriété de rigidité des groupes de Lie. Soient G et H deux groupes de Lie, et $f : G \to H$ un morphisme de groupes continu. On souhaite montrer que f est automatiquement lisse.

1°) Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de T_eG. Montrez que l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi_{\mathcal{B}} : & \mathbb{R}^n & \to & G \\ & (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & \exp(t_1 b_1) \dots \exp(t_n b_n) \end{array}$$

induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de l'élément neutre $e \in G$.

2°) Soit $h : (\mathbb{R}, +) \to H$ un morphisme de groupes continu.

(a) Montrez qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $v \in T_eH$ tel que $h(t_0) = \exp(v)$.

(b) Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $h(t_0 t) = \exp(tv)$.

[Indication : on pourra commencer par établir l'égalité pour les nombres dyadiques $t = k/2^p$.]

(c) En déduire que pour chaque indice i, il existe $w_i \in T_eH$ tel que $f(\exp(t_i b_i)) = \exp(t_i w_i)$.

3°) Montrez que $f \circ \phi_{\mathcal{B}}$ est lisse au voisinage de 0, et en déduire que f est lisse.

4.6 Exercices supplémentaires du chapitre 4

Exercice 32. Difféomorphismes d'une variété. Soit M une variété compacte connexe. Montrez que pour toute paire de points (x, y) de M, il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi(x) = y$.

Exercice 33. Redressement des champs de vecteurs. Soit X un champ de vecteurs lisse sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $X_0 \neq 0$.

1. Montrez qu'il existe deux voisinages ouverts $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ de 0 tels que $F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, définie par $F(x_1, \dots, x_n) = \phi^X_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$.
2. Montrez que $(F^{-1})_* X$ est un champ de vecteurs constant égal en tout point à $(1, 0, \dots, 0)$.
3. Soit M une variété lisse, et soit X un champ de vecteurs lisse sur M tel que $X_a \neq 0$. Montrez qu'il existe une carte $(\mathcal{U}, \phi)$ de M contenant a telle que $\phi_* X$ est le champ de vecteurs constant égal en tout point à $(1, 0, \dots, 0)$.

Exercice 34. Produits de fibrés vectoriels. Montrez que si $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ sont deux fibrés vectoriels de rang n et n' respectivement, leur produit $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un fibré vectoriel de rang $n + n'$. Montrez que le fibré tangent de $M \times N$ est isomorphe au produit du fibré tangent de M et du fibré tangent de N.

Exercice 35. Un exemple de variété parallélisable. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une submersion. On suppose que $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Montrez que la variété $S^1 \times M$ est parallélisable.

[Indication : on pourra montrer que l'on obtient un difféomorphisme de fibrés en envoyant $(v, \lambda e^{i(\theta + \pi/2)}) \in T_x M \times T_{e^{i\theta}} S^1$ sur $v + \lambda \mathrm{grad}_x f \in \mathbb{R}^n$.]

Exercice 36. Propriétés des morphismes de groupes de Lie. Dans tout cet exercice, on fixe un morphisme de groupes de Lie $f : G \to H$.

1. Montrez que f est une application de rang constant.
2. Montrez que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe de Lie de G.
3. Montrez que si f est injective, alors f est une immersion.
4. Montrez que si f est surjective, alors f est une submersion.
5. Montrez que si f est bijective, alors f est un difféomorphisme.
6. On suppose G compact. Montrez que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de Lie de H.

   [Indication : on commencera par montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe topologique compact de H, et que f passe au quotient en un isomorphisme de groupes topologiques $\overline{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$. Puis on montrera que si B est une petite boule ouverte autour de 0 d'un supplémentaire S de $T_e \mathrm{Ker}\, f$ dans $T_e G$, alors : (i) la composée

$B \xrightarrow{\exp} G \xrightarrow{f} H$ est un plongement, (ii) la projection $G \to G/\ker f$ envoie $\exp(B)$ sur un voisinage ouvert de e. On déduira de (ii) qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de H tel que $f(\exp(B)) = \mathrm{Im}\, f \cap \mathcal{U}$, et ensuite de (i) qu'il existe une carte (V, ϕ) de H autour de e qui redresse localement $\mathrm{Im}\, f$. Ceci implique que $\mathrm{Im}\, f$ est une sous-variété de H.]

7. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si G n'est pas compact ?