Université Paris 13

Mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme :

Habilitation à Diriger des Recherches

Foncteurs strictement polynomiaux et applications

Antoine Touzé

Rapporteurs : M. Michel BRION
M. Eric M. FRIEDLANDER
M. Henning KRAUSE
M. Lionel SCHWARTZ

Habilitation soutenue le 11 décembre 2014

Jury : M. Christian AUSONI
M. Wilberd VAN DER KALLEN
M. Henning KRAUSE
M. Patrick POLO
M. Lionel SCHWARTZ

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier tous ceux qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de mon mémoire ou membre de mon jury. Merci donc à Lionel d'avoir accepté de porter cette double casquette, et de m'avoir guidé pour les procédures administratives. Merci à Michel Brion, Eric Friedlander et Henning Krause d'avoir accepté d'être les rapporteurs externes de ce mémoire plus long que prévu. Merci à Christian Ausoni et Patrick Polo d'avoir accepté de faire partie de mon Jury. Enfin, je remercie chaleureusement Wilberd van der Kallen pour avoir accepté de faire partie de mon jury, pour ses remarques sur une version préliminaire du mémoire, et plus généralement pour son intérêt constant pour mes recherches.

J'ai la chance de travailler au quotidien dans une athmosphère agréable, et je tiens à remercier mes collègues pour cela. C'est un plaisir de travailler sur des sujets mathématiques variés avec tous les membres de l'équipe de topologie algébrique du LAGA. Plus généralement, je tiens à remercier tous les collègues (chercheurs ou administratifs) du LAGA pour la bonne ambiance qui règne dans le laboratoire. Cette bonne ambiance est un élément essentiel pour ma productivité mathématique. Pour cette même raison, je tiens à remercier l'équipe passée et actuelle des toits du DMA.

Je tiens à remercier tous les chercheurs dont les discussions m'ont été utiles pour comprendre et progresser. En plus de tous ceux déjà cités, je tiens à remercier mes collaborateurs Jiuzu Hong, Oded Yacobi, Larry Breen, Roman Mikhailov, mes collègues Christine Vespa, Aurélien Djament, et Vincent Franjou qui m'a mis le pied à l'étrier. Merci également à tous les collègues que j'aurais injustement oubliés dans la rédaction précipitée de ces remerciements.

Enfin, merci à ma famille pour son soutien toutes ces années, et particulièrement à Catherine pour avoir supporté les mois de rédaction de ce mémoire.

Sommaire

1 Presentation of the memoir

My field of research is on the crossroads of homological algebra, algebraic topology and representation theory. This memoir presents a significant part of my work during the period 2008-2014.

My work fits into the context of the current development of « functor homology ». The idea is to interpret some classical invariants as Ext or Tor-groups in functor categories. This idea is illustrated by the work of Jibladze, Pirashvili and Waldhausen [JP, PW], which gives a functorial interpretation of the Topological Hochschild Homology of a ring R :

$$\mathrm{THH}_*(R) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{F}_R}(I^\vee, I) \; . \tag{1.1}$$

The Tor-groups which appear on the right hand side of the isomorphism are computed in the category $\mathcal{F}_R$ of functors $\mathrm{P}_R \to R$-Mod, where P_R denotes the category of finitely generated projective R-modules. This category is not directly related to the context where $\mathrm{THH}_*(R)$ is usually defined (i.e. as a Hochschild complex in the category of S-algebras), so that the isomorphism (1.1) is a real change of viewpoint.

One can expect several benefits from a functorial interpretation of a classical homological invariant. Firstly, functor homology (that is, Ext and Tor groups in functor categories) is usually equipped with a rich algebraic structure : products, coproduct and cohomological operations, many of them derived from the operation of composition of functors. A functorial interpretation can thus be used to obtain new structure results about the homological invariant.

Secondly, functor homology can also be used to obtain explicit computations. For example, Tor groups in $\mathcal{F}_R$ are reasonably computable. The right hand side of the isomorphism (1.1) can be computed if $\Bbbk$ is a finite field [FLS], or if $\Bbbk$ is the ring of integers [FP].

Finally, various classical homological invariants may be interpreted as Torgroups in the same category. For example, the work of Suslin [FFSS, Appendix] and Scorichenko [Sco] gives interpretations of Tor-groups in $\mathcal{F}_R$ as some stable homology of $GL_n(R)$. In such a situation, functor homology appears as an intermediate concept, useful to formulate links between various non related homological invariants (hence to give links between various mathematical problems which are a priori unrelated).

The work presented in this memoir deals with the study of representations and cohomology of linear algebraic groups by the methods of functor homology. It also deals with direct connections between the cohomology of algebraic groups and classical questions from algebraic topology. The functor category which play a central role in this context is the category $\mathcal{P}_\Bbbk$ of strict polynomial functors (over a commutative ring $\Bbbk$) introduced by Friedlander and Suslin in their founder article [FS]. Variants of this category, that is strict polynomial functors with several variables, such as Franjou and Friedlander's category $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ of strict polynomial bifunctors [FF] are also useful.

The category $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ is an algebro-geometric version of the category $\mathcal{F}_{\Bbbk}$. There is a forgetful functor (exact and faithful) $\mathcal{P}_{\Bbbk} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}$, so that one can think as a strict polynomial functor as an ordinary functor $\mathcal{P}_{\Bbbk} \to \Bbbk$-Mod equipped with a « strict polynomial structure »[1]. Strict polynomial functors are classical mathematical objects. Indeed, they are ubiquitous in the theory of representation theory of the general linear groups and the Schur algebras, whose study goes back to the beginning of the XXth century. For example, the symmetric powers S^d, the exterior powers Λ^d and more generally the Schur functors are strict polynomial functors (in a canonical way). However, the use of the functorial viewpoint in cohomological computations is more recent, initiated by Friedlander and Suslin [FS]. The functorial interpretation of the cohomology or of the extensions in the category of rational representations of GL_n [Jan, I.2] corresponds to the following isomorphism, valid if n is big enough :

$$\mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) \ . \tag{1.2}$$

More generally, we can consider strict polynomial bifunctors (contravariant with respect to the first variable et covariant with respect to the second one), for example the bifunctor $(V, W) \mapsto S^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W))$. The cohomology $H^*_{\mathrm{gl}}(B)$ of a strict polynomial bifunctor B is defined in terms of extensions in the category $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ of bifunctors, and if n is big enough there is an isomorphism (where the cohomology appearing on the left hand side of the isomorphism is the rational cohomology in the sense of [Jan]) :

$$H^*(GL_n, B(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B) \ . \tag{1.3}$$

The isomorphisms (1.2) and (1.3) can be used to import the point of view and the methods of functor categories in the classical subject of representations of general linear groups.

The scientific contribution of the work presented in this memoir is twofold. Firstly, my work has contributed to significant advances on the study of algebraic group cohomology, by functorial methods. These advances include the construction of the universal classes which are used in the solution of the conjecture van der Kallen on the finite generation of the cohomology algebras of reductive groups. They also include some advances on the study of the effect of Frobenius twists on the cohomology of the general linear group. Secondly, my work has showed new links between the theory of strict polynomial functors and other mathematical theories : classical invariant theory,

[1] The forgetful functor forgets the strict polynomial structure. The situation is completely analogous to the one of the forgetful functor from algebraic varieties (or schemes) to topological spaces.

representations of finite dimensional algebras, and algebraic topology. These new links produce unexpected results. For example, we find in the homology of Eilenberg Mac Lane spaces (an object which belongs to algebraic topology) some obstructions to the existence of good filtrations (a concept which belongs to representation theory) on the $GL_n(\mathbb{Z})$-modules $S^d(S^k(\mathbb{Z}^n))$, for $d \geq 1$, $k \geq 3$ and $n \geq kd$.

Main results

We now review the main results presented in this memoir.

A. My work has contributed to the solution [3] of a conjecture of van der Kallen. Let G be an algebraic group (scheme) over a field $\mathbb{k}$, acting on a commutative $\mathbb{k}$-algebra A by algebra automorphisms. The following problem is a problem of classical invariant theory (Hilbert's XIVth problem)

Problem. Assume that the $\mathbb{k}$-algebra A is finitely generated. Is the subalgebra of fixed points $A^G \subset A$ also finitely generated ?

The answer to this problem is positive when the group G is reductive, for example $G = GL_n(\mathbb{k}), SL_n(\mathbb{k}), SO_n(\mathbb{k}), Sp_{2n}(\mathbb{k})$. This result is essentially due to Hilbert [Hil2] if $\mathbb{k}$ is a characteristic zero field, and Haboush has proved the case of a positive characteristic field $\mathbb{k}$ (Haboush's results solved positively a conjecture of Mumford). Waterhouse [Wat2] has generalized this positive answer to the case where G is reductive but not necessarily smooth. A result of Popov [Pop] proves a converse to this answer. To be more specific, a group G satisfies the finite generation (FG) property if for all finitely generated commutative $\mathbb{k}$-algebra, A^G is finitely generated. The following statement summarizes all the results mentioned above.

Theorem. The group (scheme) G satisfies the (FG) property if and only if G is reductive.

If G acts on a commutative $\mathbb{k}$-algebra A, we can more generally consider the cohomology algebra $H^*(G, A)$ in the sense of [Jan]. It is a graded commutative $\mathbb{k}$-algebra, whose subalgebra of homogeneous elements of degree zero identifies with the invariant algebra A^G. We say that G satisfies the cohomological finite generation (CFG) property if for all finitely generated $\mathbb{k}$-algebra A, the cohomology algebra $H^*(G, A)$ is finitely generated. The preceding theorem suggest the following question.

Problem. Which G do satisfy the (CFG) property ?

Since the (CFG) property implies (FG) property, we find the candidates for the (FG) property among the reductive groups (schemes). Finite groups satisfy the (CFG) property by a theorem of Evens [Eve]. This result was extended to finite group schemes by Friedlander et Suslin [FS]. Van der Kallen conjectured a much more general statement, which is now a theorem :

Theorem A. [3] Let$G$ be an affine algebraic group scheme over a field $\Bbbk$. Then G satisfies the (FG) property if and only if G satisfies the (CFG) property.

The first investigations of van der Kallen [vdK1] had reduced the proof of this theorem to the construction of certain universal classes in the cohomology of the general linear group. My contribution to the theorem is the construction of these universal classes, using the cohomology of strict polynomial bifunctors.

Theorem A opens a new perspectives of investigations on the cohomology of algebraic groups. For example, one can wonder to what extent finer algebraic properties of invariant algebras transfer to cohomology algebras. On can also ask for geometric interpretations of these cohomology algebras (in the spirit of geometric invariant theory) or an interpretation in terms of representation theory (a role in the theory of support varieties). Finally, one can ask for quantitative informations, for example bounds on the degree or on the number of generators, as well as explicit computations (keeping in mind that explicit computations are already hard to obtain in invariant theory). All these problems are open.

In section 9.4, we give two results which give a slightly more precise idea on the cohomology algebras. First, we extract from the proof of [3] some information about the Krull dimension of these cohomology algebras. We also present the explicit computation of a cohomology algebra of GL_n obtained in [5], in the spirit of the fundamental theorem of invariant theory of [Wey, DCP].

B. My articles [5, 7] have contributed to the study of the effect of Frobenius twist on the cohomology of algebraic groups over a field of positive characteristic p. To be more specific, if M is a representation of an algebraic group scheme G, we denote by $M^{(r)}$ the representation of G obtained by base change along the Frobenius map $\Bbbk \to \Bbbk$, $x \mapsto x^{p^r}$. The following problem is natural.

Problem. Study the extensions of the form $\mathrm{Ext}^*_G(M^{(r)}, N^{(r)})$. In particular, how are they related to the extensions $\mathrm{Ext}^*_G(M, N)$?

There are many motivations to study this problem. First the representations of the form $M^{(r)}$ are ubiquitous in the representation theory of algebraic groups in positive characteristic. These representations are also related to the cohomology of finite groups of Lie type. Indeed, if G is a Chevalley group scheme over $\mathbb{F}_p$ (e.g. $G = GL_n$) a result of Cline, Parshall, Scott and van der Kallen says that the $\mathbb{F}_p$-vector space $\mathrm{Ext}^i_G(M^{(r)}, N^{(r)})$ has the same dimension as the $\mathbb{F}_q$-vector space $\mathrm{Ext}^i_{G(\mathbb{F}_q)}(M \otimes \mathbb{F}_q, N \otimes \mathbb{F}_q)$ provided r and q are big enough.

In the case where $G = GL_n$, the problem can be reformulated with strict polynomial functors. We denote by $I^{(r)}$ the Frobenius twist functor, and by $F^{(r)}$ the composite functor $F \circ I^{(r)}$.

Problem. Study the extensions of the form $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$. In particular, how are they related to the extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G)$?

The latter problem is central in the cumulative works [FS], [FFSS] and [Cha1]. Besides the motivations from algebraic group theory mentioned above, there are topological motivations to study the extensions of the form $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$. Indeed, thanks to the fundamental results of [FFSS, Sections 2 et 3], these extensions give access to the computation of extensions in the category $\mathcal{F}_\Bbbk$ when $\Bbbk$ is a finite field. The category $\mathcal{F}_\Bbbk$ is related to the category $\mathcal{U}$ of unstable modules over the Steenrod algebra by a functor $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}$. The computations of extensions of the form $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$ can then be used to compute some values of the adjoint of the functor f.

In the article [5], we introduced a new method to compute extensions, based on Troesch complexes [Tr]. This method can be used to give short proof of the computations of [FS, FFSS, Cha1], and to obtain new computations as well. Our computations led us to a general conjecture.

If V is a finite dimensional vector space and F is a strict polynomial functor, we denote by F_V the functor $W \mapsto F(V \otimes W)$. When V is graded, the functor F_V inherits a grading. Let us denote by E_r the vector space which equals $\Bbbk$ in degrees $0, 2, \dots, 2p^r - 2$ and zero in the other degrees.

Conjecture. [5] For all F, G, there is a graded isomorphism, where the degree on the right hand side of the isomorphism is the total degree (i.e. the sum of the cohomological degree and of the degree of G_{E_r})

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)}) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G_{E_r}) \; .$$

The solution to this conjecture was announced in a preprint of M. Chałupnik [Cha3]. In the article [7], we use the results of [5], an idea of [Cha3] and the injectivity of Frobenius twists in the cohomology of algebraic groups to prove this conjecture and generalize the result to the framework of strict polynomial bifunctors. If B is a strict polynomial bifunctor, we denote by $B^{(r)}$ the bifunctor $(V, W) \mapsto B(V^{(r)}, W^{(r)})$ and B_{E_r} the graded bifunctor $(V, W) \mapsto B(V, W \otimes E_r)$. We obtained the following result.

Theorem B. [7] For all bifunctors B, there is a graded isomorphism, where the degree on the right hand side of the isomorphism is the total degree (i.e. the sum of the cohomological degree and of the degree of B_{E_r})

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) \; .$$

The naturality with respect to B of the isomorphism of theorem B is only proved up to filtration in [7]. Van der Kallen a observed [vdK4] that this filtration splits naturally with respect to B, so that the isomorphism of theorem B is natural with respect to B.

Theorem B offers a good understanding of the cohomology vector spaces $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$. For example, we recover the strong stability result of [FFSS]. Much better : theorem B gives a quantitative information about how the dimension of $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ grows when r grows (as a polynomial of exponential functions, whose coefficients are explicitly computed in terms of functor cohomology of functors related to B). Theorem B also gives access to explicit computations for many bifunctors B. We present some applications of this kind in sections 8.3 and 10.4.2. As a fundamental application of theorem B, we have obtained in [7] of the existence of the universal classes (on which theorem A relies).

C. The article [4] studies the links between strict polynomial functors and the cohomology of classical algebraic groups in the sense of Weyl [Wey], for example the groups $GL_n(\Bbbk)$, $Sp_{2n}(\Bbbk)$ or $SO_n(\Bbbk)$. We show that the cohomology of these classical algebraic groups can be interpreted in terms of extensions in the category of strict polynomial functors. Our approach relies on the fundamental theorems of classical invariant theory [Wey] and cohomological vanishing results coming from the theory of good filtrations on the representations of reductive algebraic groups.

In the case of GL_n, our approach gives a new proof of the isomorphisms (1.2) and (1.3) over an arbitrary ground ring $\Bbbk$ (these isomorphisms were previously established over a field $\Bbbk$ in [FS, FF]). Our approach produces similar isomorphisms for other classical groups. The case of the symplectic group corresponds to the following theorem.

Theorem C. Let $\Bbbk$ be a commutative ring and let F be a homogeneous functor of weight $2d$. For all $n \geq d$ there is an isomorphism (where Γ^d denotes the d-th divided power functor, dual to S^d) :

$$H^*(Sp_{2n}(\Bbbk), F(\Bbbk^{2n})) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^d \circ \Lambda^2, F) \;.$$

As a remarkable feature of theorem C (and of the other theorems established in [4] for other classical algebraic groups), we observe that the cohomology of the symplectic group (in type C) is expressed in terms of extensions in the category $\mathcal{P}_\Bbbk$, which is also related to the cohomology of the general linear group (of type A). In other terms, the combinatorics of GL_n plays a fundamental role in all types. We can already see this on the level of the fundamental theorems of invariant theory striking when [Wey, DCP], and the category of strict polynomial functors is the good framework to capture this phenomenon on the level of cohomology.

The isomorphism of theorem C opens the way to the study of the cohomology of classical algebraic groups by functorial methods. We give in [4] some direct applications, such as the injectivity of cup products in stable cohomology, or a few explicit cohomological computations. However, we could also apply theorem C and the analogous theorems to other more complicated problems, for example to the study of the effect of Frobenius twists on the cohomology of classical algebraic groups.

Finally, we mention that theorem C has an analogue in the framework of finite classical groups $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ or $O_n(\mathbb{F}_q)$, due to Djament and Vespa [DV] (and generalized later to all discrete classical groups in [Dja]). In spite of the strong similarity of the statements obtained, the methods of [DV] are very different from ours.

D. The article [6] gives a new link between representation theory (Ringel duality for Schur algebras) and algebraic topology (derived functors in the sens of Dold and Puppe) by the means of strict polynomial functors.

Let$A$ be a ring and let T be an A-module of finite projective dimension. For all A-modules N, the group of morphisms $\mathrm{Hom}_A(T,N)$ is naturally endowed with the structure of a right module over the endomorphism algebra $A' = \mathrm{End}_A(T)$. This induces a functor on the level of the derived categories :

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathbf{D}(\text{Mod-}A) \to \mathbf{D}(\text{Mod-}A') \; . \tag{1.4}$$

If A is a quasi-hereditary algebra, Ringel showed [Rin] that there exists a characteristic tilting module T, for which this functor is an equivalence of triangulated categories. Moreover, the algebra A' (called the Ringel dual of A) is also quasi-hereditary, ans A and A'' are isomorphic. This Ringel duality applies to strict polynomial functors. Indeed, the subcategory $\mathcal{P}_{d,\Bbbk} \subset \mathcal{P}_{\Bbbk}$ of homogeneous strict polynomial functors of weight d is equivalent to a module category, to be more specific to the category of modules over a Schur algebra which is quasi-hereditary. Donkin computed [Don4] that these Schur algebras are self-dual, so that Ringel duality can be expressed in the framework of strict polynomial functors as an equivalence of triangulated categories :

$$\Theta : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \; .$$

This equivalence of categories has been used in explicit Ext computations by Chałupnik in [Cha2].

Let $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ be a functor. If F is additive, there is a classical notion of derived functors of F. The suitable theory for deriving non necessarily additive functors is due to Dold et Puppe [DP] (and later generalized by Quillen in the framework of model categories). We denote by

$$L_iF(-,n) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$$

the i-th derived functor of F with height n (the height is a nonnegative integer). These derived functors are used in algebraic topology, for example they provide the first page of the Curtis spectral sequence [Cur] (An unstable version of the Adams spectral sequence) which converges to the homotopy groups of the sphere $\mathbb{S}^{n+1}$. In the article [6], we observe that if F is a strict polynomial functor, then its derived functors are also strict polynomial functors. We extend the operation of derivation to the level of derived categories :

$$\begin{array}{rccc} L(-,n): & \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) & \to & \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \\ & C & \mapsto & LC(-,n) \end{array} .$$

We then prove the following theorem.

Theorem D. [6] The triangulated functors $L(-,n)$ et $\Theta^n[-nd]$ (where $[-nd]$ denotes the iterated suspension operator of the derived category) are isomorphic.

The main theorem of [6] is actually more precise than theorem D. Ringel duality and derivation of functors are strict monoidal functors (with respect to the tensor product of functors) and the isomorphism of theorem D is an isomorphism of monoidal functors. The article [6] states the theorem over a PID $\Bbbk$, which is the framework needed for our applications, but the statement is actually valid over an arbitrary commutative ring [11]. Let us spell out some concrete consequences of theorem D. If F is a homogeneous strict polynomial functor of weight d, we have an isomorphism :

$$L_iF(-,n) \simeq H^{nd-i}(\Theta^n F) .$$

The right hand side of this isomorphism can be reformulated in terms of concrete extensions in $\mathcal{P}_\Bbbk$. For example if $n=1$ or 2, we obtain the following isomorphisms, where F_V denotes the functors « with parameter » $F_V(W) := F(V\otimes W)$ (in particular $F_\Bbbk = F$) :

$$L_iF(V,1) \simeq \mathrm{Ext}^{d-i}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Lambda^d, F_V) , \quad L_iF(V,2) \simeq \mathrm{Ext}^{2d-i}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^d, F_V) . \tag{1.5}$$

The interest of theorem D and of the formulas (1.5) comes from the fact that the theorems and the methods of computations available on each side of the isomorphism are very different. For example, representation theory has the theory of highest weight categories or block theory at disposal, whereas algebraic topology uses simplicial methods. In [6], we obtain a series of applications by transferring results from algebraic topology on the representation theory side and vice-versa.

E. Eilenberg Mac Lane spaces and the computation of their singular homology by Cartan [Car] are a cornerstone of algebraic topology. In the article [8] we show that Cartan's computations also have a fundamental importance in the representation theory of the general linear groups. For example we establish the isomorphisms :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*,\Lambda^*) \simeq H_*(K(\mathbb{Z},3),\Bbbk) , \quad \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*,\Gamma^*) \simeq H_*(K(\mathbb{Z},4),\Bbbk) . \tag{1.6}$$

Thanks to these isomorphisms, it is theoretically possible to retrieve the Ext-groups from Cartan's computations. However, these computations do not contain all the information we need (for example, the right hand sides of the isomorphisms (1.6) are simply graded while the left hand sides are trigraded). So we have to elaborate on these results to obtain the additional information. If $\Bbbk$ is a field of positive characteristic p, our computations give the following result (we only give the $p = 2$ version here, whose statement is simpler).

Theorem E.1. Let $\Bbbk$ be a field of characteristic 2, and $n \geq 1$. let V be $\Bbbk$-vector space and let $S(V)$ be the symmetric algebra on V. The homology algebra of the iterated bar construction $\overline{B}^{n+2}S(V)$ is naturally isomorphic with respect to V to the following tensor product of free divided power algebras, where $V^{(r)}\langle i\rangle$ denotes a copy of the r-th Frobenius twist of V, placed in degree i :

$$\bigotimes_{r_1,\dots,r_n\geq 0} \Gamma(V^{(r_1+\cdots+r_n)}\langle 2p^{r_1+\cdots+r_n} + 2^{r_2+\cdots+r_n} + \cdots + 2^{r_n} + 1\rangle)\ .$$

We then use theorem E.1 (and similar statements in odd characteristic), together with techniques to compute the effect of Frobenius twists in cohomology (theorem B and additional techniques) to obtain [8] a unified approach to compute all the extensions of the form

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})\ ,$$

where X and Y are « classical exponential functors » , i.e. the symmetric algebra S, the exterior algebra Λ or the divided power algebra Γ. We also obtain significant computations for $\Bbbk = \mathbb{Z}$. The computations obtained by our method include all the previous computations of extensions between classical exponential functors [Akin, FFSS, Cha3], and provide new results as well. For example we obtain the following result (Ext groups between classical exponential functors are equipped with a convolution product, which allows to organize the computations and to present the results under a compact form).

Theorem E.2. Let $\Bbbk$ be a field of odd characteristic p and let s, t be non-negative integers. The trigraded algebra $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{*\,(t+s)}, \Gamma^{*\,(s)})$ is isomorphic to the tensor product

$$\Gamma\left(\bigoplus_{0\leq i<p^s, k\geq 0} V_{i,k}\right) \otimes \Lambda\left(\bigoplus_{0\leq i<p^s, k\geq 0, \ell\geq 0} V'_{i,k,\ell}\right) \otimes \Gamma\left(\bigoplus_{0\leq i<p^s, k\geq 0, \ell\geq 0} V''_{i,k,\ell}\right)$$

where $V_{i,k}$, $V'_{i,k,\ell}$ and $V''_{i,k,\ell}$ are distinct vector spaces of dimension one, Whose gradings are determined by the inclusions :

1. $V_{i,k} \subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+t}-2}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^{p^k\,(s+t)}, \Gamma^{p^{k+s}\,(t)})$,
2. $V'_{i,k,\ell} \subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+\ell+t+1}-2p^k-1}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^{p^{k+\ell+1}\,(s+t)}, \Gamma^{p^{k+\ell+1+s}\,(t)})$,
3. $V''_{i,k,\ell} \subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+\ell+t+2}-2p^{k+1}-2}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^{p^{k+\ell+2}\,(s+t)}, \Gamma^{p^{k+\ell+2+s}\,(t)})$.

Our results over $\mathbb{Z}$ improve the previously known computations [Akin]. However, if $\Bbbk = \mathbb{Z}$, we are not able to compute completely the homology of the iterated bar constructions $\overline{B}^{n+2}S(A)$ (where A denotes a free finitely generated abelian group) as a strict polynomial functor for the moment. This explains why our Ext computations for $\Bbbk = \mathbb{Z}$ are less complete than the ones obtained over a field $\Bbbk$. We partially investigate this problem in collaboration with L. Breen and R. Mikhailov in [9], but the problem of computing completely these strict polynomial functors remains open.

Content of the memoir, new results and perspectives

In this memoir, we have tried to make the subject of strict polynomial functors accessible. Section 4 is independent from the rest of the text. It is intended as an elementary introduction to strict polynomial functors of the theory of representations of the general group, in the simpler case when the ground ring $\Bbbk$ is an infinite field.

The next sections 5 and 6 present categories of strict polynomial functors and representations of affine algebraic group schemes in full generality. They provide all the basic material needed for the remainder of the memoir. To be more specific, section 5 recalls the main definitions and properties of affine algebraic group schemes and their representations. In section 6, we present the categories of strict polynomial functors in a general context. This presentation is motivated by the absence of sufficient reference on strict polynomial functors in the current literature.

Most of our articles follow the original framework of Friedlander et Suslin [FS, SFB], that is they are written in the framework of the category of strict polynomial functors of bounded weights with $\Bbbk$-projective finitely generated values (this category is denoted by $\mathcal{P}^f_{\Bbbk,<\infty}$ later in this memoir). One of the contributions of this memoir is the generalization of our results to the category $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ of all strict polynomial functors - this generalization is usually easy with the material of section 6 at disposal.

In sections 7 to 11 we present the main results, in particular theorems A to E.2 mentioned above. We have taken the opportunity of writing this memoir to improve some of these results or their proofs (in addition to the extension to the category of all strict polynomial functors mentioned above). We have also added a few new results. We now give a list of the main improvements.

- In section 7.2.2, we study the homological dimension of $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. The results obtained extend the previously known results to an arbitrary commutative base ring $\Bbbk$. In particular, we remove the noetherian hypotheses needed in [Kra].

- In sections 7.4 and 7.3, we have significantly improved the proof and the results of the article [4] on the relations between strict polynomial functors and the cohomology of classical groups.
  - Our proof does not use the results of [DCP] anymore. This improvement enables us to treat the case of orthogonal groups in characteristic 2.
  - We have added new statements for the cohomology of special orthogonal and special linear groups.
  - We indicate in section 7.3.3 how to use strict polynomial functors to prove the first fundamental theorem of invariant theory for GL_nin arbitrary characteristic.
- In section 8 we have done a work of reorganization and simplification. In particular, section 8.1, the presentation of the elementary properties of the precomposition by the Frobenius twist functor $I^{(r)}$ is organized around the notion of r-negligible functor. Section 8.4 gives a simplified version of the original arguments of [5, Sections 3 and 4].
- We have made explicit a method to find bounds of the Krull dimension of cohomology algebras of GL_n in section 9.4.1.
- In section 11, the results of [6] are stated in the unbounded derived category. The statement of theorem 11.16 is new (although its proof only uses techniques from [6]). We apply this theorem to recover in corollary 11.19 connectivity results which are useful to prove the convergence of the Curtis spectral sequence.

The memoir also presents about fifteen open problems. These problems give a (non exhaustive) list of perspectives of research on the subject of strict polynomial functors and related topics.

Author's Bibliography

In this memoir, the references to my articles are indicated by numbers. The memoir presents the articles [1] to [10] of the following bibliography. The memoir does not present the article [11] (which is a survey of functor homology), neither does it present [12] (which does not deal with functor homology, as the other articles do).

[1] A. Touzé, Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007)

[2] A. Touzé, Universal classes for algebraic groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 219–249.

[3] A. Touzé, W. van der Kallen, Bifunctor cohomology and Cohomological finite generation for reductive groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 251–278.

[4] A. Touzé, Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint, Adv. Math. 225 (2010) 33–68.

[5] A. Touzé, Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors, Ann. Sci. E.N.S. 45 (2012), no. 1, 53–99.

[6] A. Touzé, Ringel duality and derivatives of non-additive functors. J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 9, 1642–1673.

[7] A. Touzé, A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. Transform. Groups 18 (2013), no. 2, 539–556.

[8] A. Touzé, Bar complexes and extensions of classical exponential functors, to appear in the annales de l'institut Fourier (2014). (arXiv :1012.2724)

[9] L. Breen, R. Mikhailov, A. Touzé, Derived functors of the divided powers, submitted. (arXiv :1312.5676)

[10] A. Touzé, A functorial control of integral torsion in homology, submitted. (arXiv :1310.2877)

[11] A. Touzé, Applications of functor (co)homology, in An Alpine Expedition through Algebraic Topology, Contemp. Math. 617, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[12] J. Hong, A. Touzé, O. Yacobi, Polynomial functors and categorifications of Fock space, submitted (arXiv :1111.5317).

The other references are indicated by letters. A full bibliography is available at the end of the memoir.

2 Présentation du mémoire

Mon domaine de recherche se situe au carrefour de l'algèbre homologique, de la topologie algébrique et de la théorie des représentations. Ce mémoire présente une partie significative de mes travaux sur la période 2008-2014.

Mes travaux se placent dans le contexte du développement actuel de l'« homologie des foncteurs ». L'idée est d'interpréter certains invariants homologiques classiques, comme l'homologie des groupes ou la K-théorie, en termes de groupes d'extensions ou de torsion dans des catégories de foncteurs. Une illustration de cette idée est fournie par des travaux de Jibladze, Pirashvili et Waldhausen [JP, PW], qui fournissent une interprétation fonctorielle de l'Homologie de Hochschild Topologique d'un anneau R :

$$\mathrm{THH}_*(R) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{F}_R}(I^\vee, I)\ . \tag{2.1}$$

Les groupes de torsion qui apparaissent à droite de l'isomorphisme sont calculés dans la catégorie $\mathcal{F}_R$ des foncteurs $\mathrm{P}_R \to R$-Mod où P_R désigne la catégorie des R-modules projectifs de type fini. Cette catégorie est relativement éloignée du contexte dans lequel on définit habituellement $\mathrm{THH}_*(R)$ (i.e. comme un complexe de Hochschild dans la catégorie des S-algèbres), si bien que l'isomorphisme (2.1) constitue un réel changement de point de vue.

On peut attendre plusieurs bénéfices d'une interprétation fonctorielle d'un invariant homologique classique. Tout d'abord, l'homologie des foncteurs (i.e les groupes Ext ou Tor dans des catégories de foncteurs) possède souvent une structure riche : produits, coproduits ou opérations cohomologiques, qui dérivent dans bien des cas de l'opération de composition des foncteurs. Une interprétation fonctorielle peut donc permettre d'obtenir de nouveaux résultats de structure sur l'invariant en question.

On peut également utiliser l'homologie des foncteurs pour obtenir des calculs explicites. Par exemple, les groupes de torsion dans $\mathcal{F}_R$ sont accessibles au calcul, et le terme de droite de l'isomorphisme (2.1) peut être calculé lorsque R est un corps fini [FLS] ou lorsque $R = \mathbb{Z}$ [FP].

Enfin, il arrive que plusieurs invariants homologiques classiques différents admettent des interprétations fonctorielles relatives à la même catégorie de foncteurs. Par exemple, les travaux de Suslin [FFSS, Appendix] et Scorichenko [Sco] permettent d'interpréter les groupes de torsion dans $\mathcal{F}_R$ en termes d'homologie stable du groupe $GL_n(R)$. L'homologie des foncteurs apparaît alors comme un concept intermédiaire qui permet de relier des invariants homologiques classiques (et donc des problèmes mathématiques) qui n'ont à priori rien à voir les uns avec les autres.

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent l'étude des représentations et la cohomologie des groupes algébriques linéaires, par des méthodes d'homologie des foncteurs. Ils font également apparaître des liens directs entre la cohomologie des groupes algébriques et certaines questions classiques de topologie algébrique. La catégorie de foncteurs qui joue un rôle central dans ce contexte est la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des foncteurs strictement polynomiaux (sur un anneau commutatif $\Bbbk$), introduite par Friedlander et Suslin dans leur article fondateur [FS]. Des variantes à plusieurs variables de cette catégorie, comme la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ des bifoncteurs de Franjou et Friedlander [FF] sont également utiles.

La catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ est un analogue algébro-géométrique de la catégorie $\mathcal{F}_{\Bbbk}$. On dispose d'un foncteur d'oubli (exact et fidèle) $\mathcal{P}_{\Bbbk} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}$, si bien que l'on peut penser aux foncteurs strictement polynomiaux comme à des foncteurs usuels $\mathrm{P}_{\Bbbk} \to \Bbbk\text{-Mod}$ munis d'une « structure strictement polynomiale »[2]. Les foncteurs strictement polynomiaux sont des objets mathématiques classiques. Ils sont en effet omniprésents dans la théorie des représentations des groupes linéaires et des algèbres de Schur, étudiées depuis le début du XXème siècle. Par exemple les puissances symétriques S^d, extérieures Λ^d ou plus généralement les foncteurs de Schur sont des foncteurs strictement polynomiaux (d'une manière canonique). Cependant, l'utilisation du point de vue fonctoriel dans des calculs de cohomologie est plus récente, initiée par Friedlander et Suslin [FS]. L'interprétation fonctorielle de la cohomologie ou des extensions calculées dans la catégorie des représentations rationnelles de GL_n [Jan, I.2] est donnée par l'isomorphisme suivant, valable pour n assez grand :

$$\mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F,G) \; . \tag{2.2}$$

Plus généralement on peut considérer les bifoncteurs strictement polynomiaux (contravariants en la première variable et covariants en la seconde), comme le bifoncteur $(V,W) \mapsto S^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W))$. La cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}(B)$ d'un bifoncteur strictement polynomial est définie en termes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ des bifoncteurs, et si n est assez grand on a un isomorphisme (où la cohomologie à gauche de l'isomorphisme désigne la cohomologie du groupe algébrique GL_n au sens de [Jan]) :

$$H^*(GL_n, B(\Bbbk^n,\Bbbk^n)) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B) \; . \tag{2.3}$$

Les isomorphismes (2.2) et (2.3) permettent d'importer le point de vue et des méthodes des catégories de foncteurs dans le sujet classique des représentations du groupe linéaire.

L'apport scientifique des travaux présentés dans ce mémoire est double. D'une part, mes travaux ont contribué à des avancées significatives sur l'étude de la cohomologie des groupes algébriques, au moyen de méthodes fonctorielles. Ces avancées comprennent la construction des classes universelles qui

[2] Le foncteur d'oubli consiste précisément à oublier cette structure additionnelle. La situation est tout à fait analogue à celle du foncteur d'oubli des variétés algébriques (ou des schémas) vers les espaces topologiques.

permettent de résoudre positivement la conjecture de van der Kallen sur l'engendrement fini de la cohomologie des schémas en groupes réductifs, ainsi que l'étude de l'effet de la torsion de Frobenius dans la cohomologie du groupe linéaire. D'autre part, mes travaux ont tissé des liens nouveaux entre la théorie des foncteurs strictement polynomiaux et d'autres théories mathématiques : théorie classique des invariants, représentations des algèbres de dimension finie, topologie algébrique. Ce décloisonnement donne des résultats inattendus. On peut par exemple trouver dans l'homologie des espaces d'Eilenberg et Mac Lane (un objet de la topologie algébrique) des obstructions à l'existence de bonnes filtrations (un concept de la théorie des représentations) sur les représentations $S^d(S^k(\mathbb{Z}^n))$ de $GL_n(\mathbb{Z})$, pour $d \geq 1$, $k \geq 3$ et $n \geq kd$.

Principaux résultats présentés

Nous passons maintenant en revue les résultats les plus importants présentés dans ce mémoire.

A. Mes travaux ont tout d'abord contribué à la résolution [3] de la conjecture de van der Kallen. Soit G un groupe algébrique (ou un schéma en groupes) sur un corps $\mathbb{k}$, agissant par automorphismes d'algèbres sur une $\mathbb{k}$-algèbre commutative A. Un problème de la théorie classique des invariants (XIVème problème de Hilbert) est le suivant :

Problème. Si A est une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini, la sous-algèbre des points fixes $A^G \subset A$ est-elle également de type fini ?

La réponse à ce problème est positive si G est un groupe réductif par exemple $G = GL_n(\mathbb{k}), SL_n(\mathbb{k}), SO_n(\mathbb{k})$, $Sp_{2n}(\mathbb{k})$. Ce résultat est essentiellement dû à Hilbert [Hil2] si $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique nulle, et Haboush a démontré le cas où $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique non nulle (le résultat de Haboush correspond à la résolution d'une conjecture de Mumford). Waterhouse [Wat2] a ensuite étendu cette réponse positive au cas des schémas en groupes réductifs non lisses.

En utilisant un résultat de Popov [Pop] on peut formuler une réciproque. Plus précisément, on dit que G a la propriété d'engendrement fini (EF) si pour toute algèbre A de type fini, A^G est également de type fini. Les résultats évoqués sont alors résumés par l'énoncé suivant.

Théorème. G a la propriété (EF) si et seulement si G est réductif.

Si G agit par automorphismes d'algèbres sur une algèbre commutative A, on peut considérer plus généralement l'algèbre de cohomologie $H^*(G, A)$ au sens de [Jan]. C'est une algèbre graduée commutative, dont la sous-algèbre des éléments de degré nul s'identifie à l'algèbre des invariants A^G. On dit que G a la propriété d'engendrement cohomologique fini (ECF) si pour toute algèbre A de type fini, $H^*(G, A)$ est également de type fini. Le problème suivant est naturel en vue du théorème précédent

Problème. Quels G ont la propriété (ECF) ?

La propriété (ECF) est implique la propriété (EF), les candidats sont donc à chercher parmi les groupes réductifs. Les groupes finis ont la propriété (ECF) par un théorème de Evens [Eve]. Ce résultat a été étendu aux schémas en groupes finis par Friedlander et Suslin [FS]. Van der Kallen a conjecturé un résultat beaucoup plus général, qui est maintenant un théorème (publié dans un article commun avec W. van der Kallen).

Théorème A. [3] Soit G un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$. Alors G a la propriété (EF) si et seulement si G a la propriété (ECF).

Les premières investigations de van der Kallen [vdK1] avaient réduit la démonstration ce théorème à la construction de certaines classes universelles dans la cohomologie du groupe linéaire. Ma contribution au théorème est la construction des classes universelles désirées, via la cohomologie des bifoncteurs strictement polynomiaux.

Le théorème A ouvre un nouveau champ d'investigations sur la cohomologie des groupes algébriques. Il est par exemple naturel de demander se demander dans quelle mesure les propriétés algébriques plus fines connues pour les algèbres d'invariants des groupes réductifs se transportent aux algèbres de cohomologie. On peut également demander des interprétations de ces algèbres de cohomologie en termes géométriques (à l'instar de la théorie géométrique des invariants), ou de théorie des représentations (un rôle dans une théorie de variétés support). Enfin on demander des informations quantitatives, par exemple des bornes sur le degré ou le nombre de générateurs,ou des calculs explicites (en gardant à l'esprit que les calculs explicites sont déjà difficiles en théorie des invariants). Toutes ces questions sont ouvertes.

Dans la section 9.4, nous donnons deux résultats qui donnent une idée un peu plus précise de ces algèbres de cohomologie. Tout d'abord, on peut extraire de la démonstration de [3] des informations sur leur dimension de Krull. Nous donnons également un calcul explicite de cohomologie de GL_n effectué dans [5], analogue aux calculs explicites des théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants [Wey, DCP].

B. Mes travaux [5, 7] ont apporté une contribution à l'étude de l'influence de la torsion de Frobenius sur la cohomologie des groupes algébriques sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique p non nulle. Si M est une représentation d'un schéma en groupes G, on note $M^{(r)}$ la représentation de G obtenue par changement de base le long du morphisme de Frobenius $\Bbbk \to \Bbbk$, $x \mapsto x^{p^r}$. Le problème suivant se pose naturellement.

Problème. Étudier les extensions de la forme $\mathrm{Ext}^*_G(M^{(r)}, N^{(r)})$. En particulier, comment peut-on relier leur calcul à celui de $\mathrm{Ext}^*_G(M, N)$?

Les motivations pour étudier ce problème sont multiples car les représentations du type $M^{(r)}$ sont omniprésentes en théorie des représentations en caractéristique p. Ces représentations interviennent également en lien avec la cohomologie des groupes de Lie finis. En effet si G est un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{F}_p$ (e.g. $G = GL_n$) un résultat de Cline, Parshall, Scott et van der Kallen affirme que le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i_G(M^{(r)}, N^{(r)})$ a même dimension que le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i_{G(\mathbb{F}_q)}(M \otimes \mathbb{F}_q, N \otimes \mathbb{F}_q)$ si r et q sont assez grands.

Dans le cas $G = GL_n$ le problème peut se reformuler en termes de foncteurs strictement polynomiaux de la façon suivante. On note $I^{(r)}$ le foncteur de torsion de Frobenius, et $F^{(r)}$ le foncteur composé $F \circ I^{(r)}$.

Problème. Étudier les extensions de la forme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$. En particulier, comment peut-on relier leur calcul à celui de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G)$?

Ce problème est central dans les travaux cumulatifs [FS], [FFSS] et [Cha1]. Outre les motivations issues de la théorie des groupes algébriques évoquées plus haut, il y a des motivations topologiques pour calculer les extensions de la forme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$. En effet, les résultats fondamentaux de [FFSS, Sections 2 et 3] montrent que ces extensions permettent de calculer les extensions dans la catégorie $\mathcal{F}_\Bbbk$ lorsque $\Bbbk$ est un corps fini. Cette dernière est reliée à la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod par un foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}$. Les calculs d'extension du type $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)})$ permettent par exemple de calculer certaines valeurs de l'adjoint à droite de f.

Dans l'article [5], nous introduisons une méthode de calcul d'extensions reposant sur les complexes de Troesch [Tr]. Cette méthode permet de redémontrer rapidement les calculs de [FS, FFSS, Cha1], et d'en obtenir de nouveaux. Nos calculs ont conduit à formuler une conjecture générale.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie et F un foncteur strictement polynomial, on note F_V le foncteur $W \mapsto F(V \otimes W)$. Si V est gradué alors le foncteur F_V hérite d'une graduation. Notons E_r l'espace vectoriel gradué égal à $\Bbbk$ en degrés $0, 2, \ldots, 2p^r - 2$ et à zéro dans les autres degrés.

Conjecture. [5] Pour tout couple F, G, on a un isomorphisme gradué, en prenant le degré total à droite de l'isomorphisme (i.e. la somme du degré cohomologique et du degré de G_{E_r})

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)}) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G_{E_r}) .$$

La résolution de cette conjecture a été annoncée par Chałupnik dans la prépublication [Cha3]. Dans l'article [7], nous utilisons les résultats de [5], une idée de [Cha3] et la propriété d'injectivité de la torsion de Frobenius en cohomologie des groupes algébriques pour démontrer la conjecture, et généraliser le résultat au cadre des bifoncteurs. Si B est un bifoncteur strictement polynomial, on note $B^{(r)}$ le bifoncteur $(V, W) \mapsto B(V^{(r)}, W^{(r)})$ et

B_{E_r} le bifoncteur gradué $(V,W) \mapsto B(V, W \otimes E_r)$. Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème B. [7] Pour tout bifoncteur B, on a un isomorphisme gradué, en prenant le degré total à droite de l'isomorphisme (i.e. la somme du degré cohomologique et du degré de B_{E_r})

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) \ .$$

La naturalité en B de l'isomorphisme du théorème B est établie à une filtration près dans [7]. Van der Kallen a observé [vdK4] que cette filtration scinde naturellement en B, si bien que l'isomorphisme du théorème B est naturel en B.

Le théorème B offre une bonne compréhension de la cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$. Par exemple, on retrouve le résultat de stabilisation forte de [FFSS]. Mieux : le théorème B permet de quantifier comment croît la dimension de $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ lorsque r grandit (comme un polynôme d'exponentielles, dont les coefficients sont explicités en termes de cohomologie de foncteurs). Le théorème donne également accès à des calculs explicites pour tout une gamme de bifoncteurs B. Nous présentons des applications de ce type dans les sections 8.3 et 10.4.2. Comme application fondamentale du théorème B, nous avons également obtenu [7] une nouvelle démonstration de l'existence des classes universelles (sur lesquelles repose le théorème A).

C. L'article [4] porte sur les liens entre les foncteurs strictement polynomiaux et la cohomologie des groupes classiques au sens de Weyl [Wey], par exemple les groupes $GL_n(\Bbbk)$, $Sp_{2n}(\Bbbk)$ ou $SO_n(\Bbbk)$. Nous y montrons que la cohomologie de ces groupes classiques peut se calculer en termes d'extensions dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux. Notre approche repose sur les théorèmes fondamentaux de la théorie classique des invariants [Wey] et des arguments d'annulation cohomologique provenant de la théorie des bonnes filtrations pour les représentations des groupes réductifs.

Dans le cas de GL_n, cette approche permet d'établir les isomorphismes (2.2) et (2.3) sur un anneau de base $\Bbbk$ quelconque (ces isomorphismes étaient auparavant établis sur un corps dans [FS, FF]). Elle permet également d'obtenir des isomorphismes similaires pour les autres groupes classiques. Le cas du groupe symplectique correspond au théorème suivant.

Théorème C. Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, soit F un foncteur homogène de poids $2d$. Pour tout $n \geq d$ on a un isomorphisme (où Γ^d désigne le foncteur de d-ième puissance divisée, dual du foncteur S^d) :

$$H^*(Sp_{2n}(\Bbbk), F(\Bbbk^{2n})) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^d \circ \Lambda^2, F) \ .$$

Une des caractéristiques remarquables de l'isomorphisme du théorème C (et des autres isomorphismes démontrés dans [4]) est qu'il exprime la cohomologie du groupe symplectique (de type C) en termes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$, qui est la catégorie qui intervient également pour calculer la cohomologie du groupe linéaire (de type A). En d'autre termes, la combinatoire de GL_n intervient pour les groupes classiques des autres types. Ceci se voit de manière frappante au niveau des théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants [Wey, DCP], et la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux est le bon cadre pour capturer ce phénomène au niveau cohomologique.

Ce type d'isomorphisme ouvre la voie à l'étude de la cohomologie des groupes classiques par des méthodes fonctorielles. On donne dans [4] quelques applications directes, comme l'injectivité des cup produits en cohomologie stable, ou quelques calculs explicites de cohomologie. Mais on peut envisager d'appliquer le théorème C et ses analogues à d'autres problèmes, par exemple l'étude de la torsion de Frobenius dans la cohomologie des groupes classiques.

Mentionnons enfin que le théorème C possède un analogue pour les groupes classiques finis $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$ ou $O_n(\mathbb{F}_q)$ dû à Djament et Vespa [DV] (et généralisé aux groupes classiques discrets dans [Dja]). En dépit des similitudes sur la formulation des théorèmes, les méthodes de [DV] sont très différentes des nôtres.

D. L'article [6] met à jour un lien entre la théorie des représentations (dualité de Ringel des algèbres de Schur) et la topologie algébrique (foncteurs dérivés à la Dold et Puppe) par l'intermédiaire des foncteurs strictement polynomiaux.

Soit A un anneau et T un A-module (à droite) de dimension projective finie. Pour tout A-module N, l'espace des morphismes $\mathrm{Hom}_A(T,N)$ est naturellement un module à droite sur l'algèbre d'endomorphismes $A' = \mathrm{End}_A(T)$. On obtient donc un foncteur au niveau des catégories dérivées :

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(T,-) : \mathbf{D}(\text{Mod-}A) \to \mathbf{D}(\text{Mod-}A') \; . \tag{2.4}$$

Si A est une algèbre quasi-héréditaire, Ringel a montré [Rin] qu'il existe un module basculant caractéristique T (« characteristic tilting module »), pour lequel ce foncteur est une équivalence de catégories triangulées. De plus, l'algèbre A' (appelée dual de Ringel de A) est elle-même quasi-héréditaire, et A et A'' sont isomorphes. Cette dualité de Ringel s'applique aux foncteurs strictement polynomiaux. En effet, la sous-catégorie $\mathcal{P}_{d,\Bbbk} \subset \mathcal{P}_{\Bbbk}$ des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de poids d est équivalente à la catégorie des modules sur une algèbre de Schur, qui est quasi-héréditaire. Donkin a calculé [Don4] que les algèbres de Schur concernées sont autoduales, si bien que la dualité de Ringel se reformule dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux en une équivalence de catégories triangulées :

$$\Theta : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \; .$$

Cette équivalence de catégories a été utilisée par Chałupnik pour effectuer des calculs d'extensions entre foncteurs strictement polynomiaux [Cha2].

Soit $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ un foncteur. Si F est additif, on dispose de la notion classique de foncteur dérivé de F. La théorie pour dériver les foncteur non nécessairement additifs est due à Dold et Puppe [DP] (et généralisée plus tard par Quillen dans le cadre des catégories de modèles). On note

$$L_iF(-,n) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$$

le i-ième foncteur dérivé de F avec hauteur n (la hauteur est un entier positif). Ces foncteurs dérivés interviennent en topologie algébrique, par exemple à la première page de la suite spectrale de Curtis [Cur] (une version instable de la suite spectrale d'Adams) qui converge vers les groupes d'homotopie de la sphère $\mathbb{S}^{n+1}$. Dans l'article [6], nous observons que si F est un foncteur strictement polynomial, alors ses foncteurs dérivés sont également des foncteurs strictement polynomiaux. Mieux : on peut dériver des complexes de foncteurs strictement polynomiaux et l'opération de dérivation se prolonge au niveau des catégories dérivées en un foncteur triangulé :

$$\begin{array}{rccc} L(-,n): & \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) & \to & \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \; . \\ & C & \mapsto & LC(-,n) \end{array}$$

Nous démontrons alors le théorème suivant.

Théorème D. [6] Les foncteurs triangulés $L(-,n)$ et $\Theta^n[-nd]$ (où $[-nd]$ désigne l'opérateur de suspension itéré dans la catégorie dérivée) sont naturellement isomorphes.

Le théorème principal de [6] est en fait plus complet. Les foncteurs de dualité de Ringel et de dérivation de foncteurs sont des foncteurs monoïdaux stricts (pour le produit tensoriel de foncteurs) et l'isomorphisme naturel du théorème D est un isomorphisme de foncteurs monoïdaux. L'article [6] énonce le théorème sur un anneau de base $\Bbbk$ principal car c'est le cadre des applications visées, mais l'énoncé est valable sur un anneau quelconque [11]. Donnons des conséquences concrètes du théorème D. Si F est un foncteur strictement polynomial homogène de poids d, on a :

$$L_iF(-,n) \simeq H^{nd-i}(\Theta^n F) \; .$$

Le membre de droite peut souvent se reformuler en termes d'extensions concrètes dans la catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk$. Par exemple si $n = 1$ ou 2, on obtient des isomorphismes, où F_V désigne le foncteur « à paramètre » $F_V(W) := F(V \otimes W)$ (en particulier $F_\Bbbk = F$) :

$$L_iF(V,1) \simeq \mathrm{Ext}^{d-i}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Lambda^d, F_V) \; , \quad L_iF(V,2) \simeq \mathrm{Ext}^{2d-i}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^d, F_V) \; . \tag{2.5}$$

L'intérêt du théorème D et des formules (2.5) vient du fait que les théorèmes et les méthodes de calculs disponibles des deux cotés de l'isomorphisme sont très différentes. La théorie des représentations dispose par exemple des catégories de plus haut poids et de la théorie des blocs, alors que la topologie algébrique dispose des méthodes simpliciales. Dans l'article [6] nous obtenons ainsi une série d'applications en transportant des résultats de topologie algébrique en théorie des représentations et vice-versa.

E. Les espaces d'Eilenberg Mac Lane et le calcul de leur homologie singulière par Cartan [Car] constituent une pierre angulaire de la topologie algébrique. Dans l'article [8] nous montrons que les calculs de Cartan occupent également une place fondamentale dans la théorie des représentations du groupe linéaire. On y établit par exemple des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*, \Lambda^*) \simeq H_*(K(\mathbb{Z},3),\Bbbk) \ , \quad \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*, \Gamma^*) \simeq H_*(K(\mathbb{Z},4),\Bbbk) \ . \quad (2.6)$$

On peut donc théoriquement récupérer ces extensions à partir des calculs de Cartan. Les calculs de Cartan ne contiennent cependant pas toute l'information dont nous avons besoin (par exemple les membres de gauche des isomorphismes sont trigradués, alors que ceux de droite sont simplement gradués). Il faut donc raffiner ces résultats pour obtenir l'information supplémentaire nécessaire. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique p non nulle, nos calculs s'incarnent dans le résultat fondamental suivant (nous donnons ici la version $p = 2$, plus simple à énoncer).

Théorème E.1. Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 2, et $n \geq 1$. Soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel et $S(V)$ l'algèbre à puissance symétriques sur V. L'algèbre d'homologie de la construction bar itérée de $\overline{B}^{n+2}S(V)$ est isomorphe naturellement en V au produit tensoriel d'algèbres à puissances divisées suivant, où $V^{(r)}\langle i\rangle$ désigne une copie de la r-ième torsion de Frobenius de V, placée en degré i :

$$\bigotimes_{r_1,\dots,r_n\geq 0} \Gamma(V^{(r_1+\cdots+r_n)}\langle 2p^{r_1+\cdots+r_n} + 2^{r_2+\cdots+r_n} + \cdots + 2^{r_n} + 1\rangle) \ .$$

En utilisant le théorème E.1 (et les énoncés analogues en caractéristique impaire), et les techniques de gestion de la torsion de Frobenius (le théorème B et quelques techniques complémentaires) nous décrivons dans [8] une approche unifiée de tous les calculs d'extensions de la forme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)}) \ ,$$

où X et Y sont des « foncteurs exponentiels classiques » , i.e. les foncteurs algèbre symétrique S, algèbre extérieure Λ ou algèbre à puissances divisées Γ. Nous obtenons également des calculs significatifs d'extensions pour $\Bbbk = \mathbb{Z}$. Les calculs obtenus par notre méthode englobent tous les résultats connus sur les extensions entre foncteurs exponentiels classiques [Akin, FFSS, Cha3], et en donnent de nouveaux. Nous obtenons par exemple le résultat suivant (on dispose d'un produit de convolution sur les Ext entre foncteurs exponentiels classiques, qui permet d'organiser efficacement les calculs et de présenter les résultats sous une forme compacte).

Théorème E.2. Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique p impaire et s,t des entiers positifs. L'algèbre trigraduée $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{*\,(t+s)},\Gamma^{*\,(s)})$ est isomorphe au produit tensoriel

$$\Gamma\left(\bigoplus_{0\le i<p^s,k\ge 0} V_{i,k}\right)\otimes\Lambda\left(\bigoplus_{0\le i<p^s,k\ge 0,\ell\ge 0} V'_{i,k,\ell}\right)\otimes\Gamma\left(\bigoplus_{0\le i<p^s,k\ge 0,\ell\ge 0} V''_{i,k,\ell}\right)$$

où les $V_{i,k}$, $V'_{i,k,\ell}$ et $V''_{i,k,\ell}$ sont des espaces vectoriels unidimensionnels distincts, dont les trigraduations sont déterminées par les inclusions :

1. $V_{i,k}\subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+t}-2}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{p^k\,(s+t)},\Gamma^{p^{k+s}\,(t)})$,
2. $V'_{i,k,\ell}\subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+\ell+t+1}-2p^k-1}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{p^{k+\ell+1}\,(s+t)},\Gamma^{p^{k+\ell+1+s}\,(t)})$,
3. $V''_{i,k,\ell}\subset \mathrm{Ext}^{(2i+2)p^{k+\ell+t+2}-2p^{k+1}-2}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{p^{k+\ell+2}\,(s+t)},\Gamma^{p^{k+\ell+2+s}\,(t)})$.

Nos résultats sur $\mathbb{Z}$ dépassent les résultats préalablement connus [Akin]. Cependant nous ne sommes pas capables à l'heure actuelle de calculer de manière complète l'homologie des constructions bar itérées $\overline{B}^{n+2}S(A)$ (où A désigne un groupe abélien libre de rang fini) comme foncteur strictement polynomial si $\Bbbk=\mathbb{Z}$, ce qui explique pouquoi nos calculs d'Exts pour $\Bbbk=\mathbb{Z}$ sont moins complets que ceux pour un corps $\Bbbk$. Une investigation partielle de ce problème a été effectuée en collaboration avec L. Breen et R. Mikhailov dans [9], mais le problème de calculer complètement ces foncteurs strictement polynomiaux reste ouverte.

Contenu du mémoire, nouveaux résultats et perspectives

Nous avons tenté dans ce mémoire de rendre accessible le sujet des foncteurs strictement polynomiaux. La section 4 est autonome par rapport au reste du texte. Elle constitue une introduction élémentaire aux foncteurs strictement polynomiaux, dans le contexte simplifié de la théorie des représentations du groupe linéaire sur un corps infini.

Les sections 5 et 6 reprennent ensuite les catégories de foncteurs strictement polynomiaux et les représentations des groupes algébriques dans un contexte plus général. Elle fournissent tout le matériel de base nécessaire pour la suite du mémoire. La section 5 rappelle les principales définitions et propriétés relatives aux schémas en groupes algébriques affines et à leurs représentations. Dans la section 6, nous présentons les catégories de foncteurs strictement polynomiaux dans un cadre général. Cette présentation est motivée par l'absence de référence suffisante sur les foncteurs strictement polynomiaux dans la littérature.

La plupart de nos travaux suivent le cadre original de Friedlander et Suslin [FS, SFB] et considèrent la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux de poids bornés et à valeurs dans les $\Bbbk$-modules projectifs de type fini (notée $\mathcal{P}^f_{\Bbbk,<\infty}$ dans ce mémoire). Un apport de ce mémoire est la généralisation de nos résultats à la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ de tous les foncteurs strictement polynomiaux - cette généralisation est généralement facile une fois que l'on dispose du matériel de la section 6.

Les sections 7 à 11 contiennent une présentation des principaux résultats, en particulier des théorèmes A à E.2 évoqués ci-dessus. Nous avons profité de la rédaction de ce mémoire pour améliorer certains de ces résultats ou de leurs démonstrations (en plus de l'extension à la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ de tous les foncteurs strictement polynomiaux mentionnée ci-dessus). Nous avons également ajouté quelques résultats nouveaux. Nous dressons maintenant une liste des principales améliorations.

- Dans la section 7.2.2, nous étudions la dimension homologique de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. Les résultats obtenus étendent les résultats connus à un anneau de base $\Bbbk$ quelconque. En particulier, nous retirons les hypothèses noethériennes nécessaires dans [Kra].
- Dans les sections 7.4 et 7.3, nous avons substantiellement amélioré la démonstration et les résultats de l'article [4] sur les relations entre les foncteurs strictement polynomiaux et la cohomologie des groupes classiques.
  - Notre démonstration n'utilise plus les résultats de [DCP]. Cette amélioration nous permet de traiter le cas des groupes orthogonaux en caractéristique 2.
  - Nous avons ajouté des énoncés nouveaux pour la cohomologie des groupes spéciaux orthogonaux et spéciaux linéaires.
  - Nous indiquons dans la section 7.3.3 comment utiliser les foncteurs strictement polynomiaux pour démontrer le premier théorème fondamental de la théorie des invariants de GL_n en caractéristique quelconque.
- La rédaction de la section 8 a été l'occasion d'un travail de réorganisation et de simplification. En particulier, la section 8.1 présente les propriétés élémentaires de la précomposition par les foncteurs de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ autour de la notion de foncteur r-négligeable. La section 8.4 donne une version simplifiée des arguments originaux de [5, Sections 3 et 4].
- Nous avons explicité une manière de borner la dimension de Krull des algèbres de cohomologie de GL_n dans la section 9.4.1.
- Dans la section 11, les résultats de [6] sont formulés pour la catégorie dérivée non bornée. L'énoncé du théorème 11.16 est nouveau (bien que sa démonstration n'utilise que les techniques de [6]). Nous appliquons ce théorème pour retrouver dans le corollaire 11.19 certains résultats de connexité utiles pour la convergence de la suite spectrale de Curtis.

Le texte du mémoire présente également une quinzaine de problèmes ouverts. Ces problèmes donnent une liste (non exhaustive) de perspectives de recherche sur le sujet.

Bibliographie de l'auteur

Dans ce mémoire, les références à mes travaux sont indiquées par des chiffres. Les travaux présentés dans ce mémoire correspondent aux articles [1] à [10] de la bibliographie ci-dessous. L'article [11] (qui est un article de présentation de l'homologie des foncteurs) en est exclu, de même que l'article [12] dont les thématiques sont différentes des résultats exposés dans le mémoire.

[1] A. Touzé, Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007)

[2] A. Touzé, Universal classes for algebraic groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 219–249.

[3] A. Touzé, W. van der Kallen, Bifunctor cohomology and Cohomological finite generation for reductive groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 251–278.

[4] A. Touzé, Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint, Adv. Math. 225 (2010) 33–68.

[5] A. Touzé, Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors, Ann. Sci. E.N.S. 45 (2012), no. 1, 53–99.

[6] A. Touzé, Ringel duality and derivatives of non-additive functors. J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 9, 1642–1673.

[7] A. Touzé, A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. Transform. Groups 18 (2013), no. 2, 539–556.

[8] A. Touzé, Bar complexes and extensions of classical exponential functors, accepté aux annales de l'institut Fourier (2014). (arXiv :1012.2724)

[9] L. Breen, R. Mikhailov, A. Touzé, Derived functors of the divided powers, soumis. (arXiv :1312.5676)

[10] A. Touzé, A functorial control of integral torsion in homology, soumis. (arXiv :1310.2877)

[11] A. Touzé, Applications of functor (co)homology, in An Alpine Expedition through Algebraic Topology, Contemp. Math. 617, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[12] J. Hong, A. Touzé, O. Yacobi, Polynomial functors and categorifications of Fock space, soumis (arXiv :1111.5317).

Les autres références bibliographiques sont indiquées par des lettres. Une bibliographie complète est disponible à la fin du mémoire.

3 Conventions et notations

- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, nous écrirons souvent abusivement $X \in \mathcal{C}$ pour signifier que X est un objet de $\mathcal{C}$.
- $\Bbbk$ désigne un anneau commutatif, $\Bbbk$-Mod la catégorie des $\Bbbk$-modules et $\mathrm{P}_\Bbbk$ la sous-catégorie pleine des $\Bbbk$-modules projectifs de type fini. Les $\Bbbk$-modules projectifs de type fini seront souvent désignés par les lettres U, V, W (comme des espaces vectoriels). Si $\Bbbk$ est un corps, on notera plutôt $\mathcal{V}_\Bbbk = \Bbbk$-Mod la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels et $\mathcal{V}_\Bbbk^f = \mathrm{P}_\Bbbk$ celle des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Toutes les $\Bbbk$-algèbres sont, sauf mention du contraire, unitaires. Si A est une $\Bbbk$-algèbre, A-Mod désigne la catégorie des A-modules à gauche et A-mod la sous-catégorie pleine des A-modules qui sont projectifs de type fini sur $\Bbbk$.
- $\Bbbk G$ désigne la $\Bbbk$-algèbre d'un groupe discret G.
- $\Bbbk[X]$ désigne la $\Bbbk$-algèbre des fonctions régulières d'un schéma algébrique affine X sur $\Bbbk$. En particulier, si V est un $\Bbbk$-module libre de type fini, $\Bbbk[V]$ désigne les polynômes sur V et si G est un schéma en groupes algébriques affines, $\Bbbk[G]$ désigne l'algèbre de Hopf des coordonnées de G.
- $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe symétrique d'un ensemble à n éléments.
- On utilise indifféremment les notations homologiques ou cohomologiques pour les complexes. Si C est un complexe, on peut passer d'une convention à l'autre par $C^{-i} = C_i$. On note $C[k]$ le complexe tel que $C[k]_i = C_{i+k}$ (ou $C[k]^i = C^{i-k}$) et dont la différentielle est égale à celle de C à un signe $(-1)^k$ près.

4 Introduction aux foncteurs et aux représentations

Cette section est une introduction élémentaire aux représentations rationnelles du groupe linéaire et aux foncteurs strictement polynomiaux. Nous définissons ces notions, puis nous donnons quelques grandes lignes de la théorie des représentations rationnelles du groupe linéaire. Notre but est de donner accès au non-spécialiste à un certain nombre de résultats classiques mais non triviaux des représentations des groupes algébriques dans le cadre le plus simple possible. C'est dans cette optique que nous nous sommes restreints au groupe linéaire (les systèmes de racines sont transparents dans ce cas). C'est aussi dans cette optique que nous supposons que l'anneau de base est un corps infini : cela permet d'alléger la présentation car les notions de polynôme et de fonction polynomiale coïncident dans ce cas.

On fixe donc **un corps infini** $\Bbbk$. Tous les produits tensoriels sont (sauf mention du contraire) pris sur $\Bbbk$.

4.1 Définitions

4.1.1 Représentations génériques du groupe linéaire

On note $\mathcal{V}_\Bbbk$ la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels, $\mathcal{V}_\Bbbk^f$ la sous-catégorie pleine des espaces vectoriels de dimension finie, et $\mathcal{F}_\Bbbk$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{V}_\Bbbk^f$ dans $\mathcal{V}_\Bbbk$. En d'autres termes :

- les objets de $\mathcal{F}_\Bbbk$ sont les foncteurs $F : \mathcal{V}_\Bbbk^f \to \mathcal{V}_\Bbbk$,
- les morphismes de $\mathcal{F}_\Bbbk$ sont les transformations naturelles entre foncteurs, et la loi de composition est donnée par la composition des transformations naturelles.

C'est une catégorie abélienne, les opérations de somme, produit, noyau, conoyau etc. sont définies dans la catégorie but, par exemple $(F \oplus G)(V) := F(V) \oplus G(V)$.

On remarque que si F est un objet de $\mathcal{F}_\Bbbk$, et V un espace vectoriel de dimension finie, alors l'espace vectoriel $F(V)$ est naturellement muni d'une action du groupe linéaire $GL(V)$, définie par le morphisme de monoïdes :

$$\rho_V : GL(V) \hookrightarrow \mathrm{End}_\Bbbk(V) \xrightarrow{u \mapsto F(u)} \mathrm{End}_\Bbbk(F(V)) . \tag{4.1}$$

L'évaluation sur un espace vectoriel V induit donc un foncteur exact :

$$\mathrm{ev}_V : \mathcal{F}_\Bbbk \to \Bbbk GL(V)\text{-Mod}$$

Pour une somme directe d'espace vectoriels $W = U \oplus V$, on a une inclusion canonique de groupes $GL(U) \times GL(V) \hookrightarrow GL(W)$ et un diagramme commutatif, dans lequel le foncteur vertical est obtenu en restreignant l'action à

$GL(U) \times GL(V)$ puis en prenant les point fixes sous l'action de $GL(U)$:

$$\begin{tikzcd} & \Bbbk GL(W)\text{-Mod} \arrow[dd] \\ \mathcal{F}_\Bbbk \arrow[ur, "\mathrm{ev}_W"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_V"'] & \\ & \Bbbk GL(V)\text{-Mod} \end{tikzcd}$$

Chaque foncteur fournit donc une famille infinie de représentations des groupes linéaires, et pour cette raison la catégorie $\mathcal{F}_\Bbbk$ est parfois appelée la catégorie des *représentations génériques* du groupe linéaire.

4.1.2 Représentations rationnelles du groupe linéaire

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Parmi les représentations du groupe linéaire $GL(V)$, les *représentations rationnelles* sont celles qui proviennent de la géométrie algébrique.

Une représentation (W, ρ) de dimension finie est dite rationnelle si le morphisme de groupes $\rho : GL(V) \to GL(W)$ est un morphisme de groupes algébriques. Concrètement, si l'on identifie $GL(V)$ avec $GL_n(\Bbbk)$ et $GL(W)$ avec $GL_m(\Bbbk)$, cela signifie que les coordonnées du morphisme $\rho : GL_n(\Bbbk) \to GL_m(\Bbbk)$ sont des fonctions de la forme :

$$[a_{i,j}] \mapsto \frac{P(a_{i,j})}{\det[a_{i,j}]^k} \;, \tag{4.2}$$

où $P(a_{i,j})$ est une expression polynomiale des coefficients de la matrice $[a_{i,j}]$ et le numérateur est une puissance positive de son déterminant. La représentation rationnelle est (W, ρ) est dite polynomiale si en outre les applications coordonnées de ρ ne font pas intervenir de déterminant au dénominateur (i.e. si $k = 0$). Il revient au même de dire que le morphisme ρ peut s'étendre en un morphisme de monoïdes $\mathrm{End}_\Bbbk(V) \to \mathrm{End}_\Bbbk(W)$.

Exemple 4.1. L'action naturelle de $GL(V)$ sur V est une représentation polynomiale (que nous appellerons représentation standard de $GL(V)$), de même que l'action naturelle sur les puissances extérieures $\Lambda^d(V)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, le $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension 1 muni de l'action $[a_{i,j}] \cdot x := (\det[a_{i,j}])^k x$ est une représentation rationnelle de $GL(V)$, notée $\mathbf{det}^k$. Elle est polynomiale si et seulement si $k \geq 0$.

Une représentation (W, ρ) de dimension infinie est dite rationnelle (resp. polynomiale) si c'est une réunion croissante de représentations rationnelles (resp. polynomiales) de dimension finie.

Exemple 4.2. Si $GL(V)$ agit à droite sur une variété algébrique affine X, alors $GL(V)$ agit rationnellement sur l'anneau des coordonnées $\Bbbk[X]$.

On note $\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL(V)}$, resp. $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{GL(V)}$, la sous-catégorie pleine des $\Bbbk GL(V)$-modules dont les objets sont les représentations rationnelles, resp. polynomiales de $GL(V)$. Ce sont des sous-catégories abéliennes de $\Bbbk GL(V)$-Mod, stables par sous-quotients.

4.1.3 Représentations homogènes et algèbres de Schur

Une des propriétés fondamentales du groupe $\mathbb{G}_m = GL_1(\Bbbk)$ est la semi-simplicité de ses représentations rationnelles[3]. De façon plus précise, si W est une représentation rationnelle de $\mathbb{G}_m$, alors W se décompose en une somme directe $W = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} W_d$, où l'action sur W_d est donnée par $\lambda \cdot w = \lambda^d w$. Les espaces vectoriels W_d s'appellent les sous-espaces de poids total d de W, ou plus simplement les sous-espaces de poids d.

Soit (W, ρ) une représentation rationnelle de $GL_n(\Bbbk)$. On restreint l'action au sous-groupe $\mathbb{G}_m$ des homothéties, et on obtient ainsi une décomposition $W = \bigoplus W_d$. Comme les homothéties forment le centre de $GL_n(\Bbbk)$, les W_d sont stables par l'action de $GL_n(\Bbbk)$. La représentation (W, ρ) est dite *homogène de poids* d si $W = W_d$.

Exemple 4.3. La représentation standard V de $GL(V)$ est homogène de poids 1, sa d-ième puissance extérieure $\Lambda^d(V)$ est homogène de poids d. La représentation $\mathbf{det}^k$ est homogène de poids $k \dim V$.

Toutes les représentations rationnelles s'écrivent comme somme directe de représentations homogènes, et les morphismes de représentations préservent les poids. Si on note $\mathcal{R}\mathrm{at}_{d,GL_n(\Bbbk)}$, resp. $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\Bbbk)}$, la sous-catégorie pleine des représentations homogènes, resp. polynomiales, de poidstotal d, on a donc des décompositions :

$$\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)} \simeq \prod_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}\mathrm{at}_{d,GL_n(\Bbbk)}\ , \qquad \mathcal{P}\mathrm{ol}_{GL_n(\Bbbk)} \simeq \prod_{d\geq 0} \mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\Bbbk)}\ . \tag{4.3}$$

De manière concrète, une représentation polynomiale (W, ρ) de dimension finie est homogène de poids d si les coordonnées de ρ sont des polynômes homogènes de degré d. Pour cette raison, ce que nous appelons ici poids est appelé 'degré' dans [FS].

Bien que l'algèbre de groupe $\Bbbk GL_n(\Bbbk)$ soit de dimension infinie, les représentations polynomiales homogènes de poids d peuvent être décrites en termes de modules sur des algèbres de dimension *finie*, appelées *algèbres de Schur*. Ces algèbres apparaissent dans les travaux de Schur [Sch] sur

[3]C'est bien entendu faux pour les représentations quelconques. Par exemple, si $\Bbbk$ est le corps des nombres réels, la représentation $\rho : x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \log|x| \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas semi-simple.

les représentations du groupe linéaire en caractéristique nulle. Précisément, soit V un espace vectoriel de dimension finie. On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs. L'algèbre de Schur $S(V,d) := \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d})$ est l'algèbre des endomorphismes $\mathfrak{S}_d$-équivariants de $V^{\otimes d}$. On a alors une équivalence de catégories [Gre, FS] :

$$\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL(V)} \simeq S(V,d)\text{-Mod}\ .$$

4.1.4 Foncteurs strictement polynomiaux

La catégorie des foncteurs strictement polynomiaux est l'analogue algébro-géométrique de la catégorie $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ des représentations génériques du groupe linéaire. Elle a été introduite par MacDonald [McD] sur les corps de caractéristique nulle, et par Friedlander et Suslin [FS] en général.

Précisément, un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ est dit *strictement polynomial* si pour tout espace vectoriel V de dimension finie, le $\Bbbk GL(V)$-module $F(V)$, pour la structure donnée par le morphisme (4.1), est une représentation polynomiale de $GL(V)$. La catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ des foncteurs strictement polynomiaux est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ dont les objets sont des foncteurs strictement polynomiaux. Par définition, c'est une sous-catégorie abélienne et on a un carré commutatif de catégories et de foncteurs exacts :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{\Bbbk} \arrow[r, "\mathrm{ev_V}"] \arrow[d, hook] & \text{pol-}GL(V)\text{-Mod}\ . \arrow[d, hook] \\ \mathcal{F}_{\Bbbk} \arrow[r, "\mathrm{ev_V}"] & \Bbbk GL(V)\text{-Mod} \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

On peut donner une définition équivalente[4] plus concrète des foncteurs strictement polynomiaux. Un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}^f$ est *strictement polynomial* si pour toute paire (V,W) d'espaces vectoriels de dimensions finies n et m, les coordonnées de l'application $f \mapsto F(f)$:

$$M_{m,n}(\Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(V),F(W)) \simeq M_{\dim F(W),\dim F(V)}(\Bbbk)$$

sont des polynômes en les coefficients de la matrice associée à f. En général, un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ est strictement polynomial s'il peut s'écrire comme réunion croissante de foncteurs strictement polynomiaux à valeurs dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Un foncteur strictement polynomial F est dit *homogène de poids d* si pour tout V, $F(V)$ est une représentation homogène de poids d de $GL(V)$. Un foncteur strictement polynomial quelconque admet une décomposition

[4] L'équivalence des deux définitions dans le cas d'un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}^f$ est directe. Pour un foncteur arbitraire il faut d'abord se réduire au cas d'un foncteur homogène par (4.3), puis utiliser la description équivalente en termes de modules sur une algèbre de Schur (4.5) ci-dessous.

$F = \bigoplus_{d\geq 0} F_d$, où $F_d(V) := F(V)_d$ pour tout V (où $F(V)_d$ est la composante homogène de poids d du $GL(V)$-module $F(V)$). De plus, les transformations naturelles de foncteurs préservent les poids. Si on note $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ la sous-catégorie pleine des foncteurs homogènes de poids d, la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux admet donc une décomposition

$$\mathcal{P}_{\Bbbk} \simeq \prod_{d\geq 0} \mathcal{P}_{d,\Bbbk}\;.$$

Par définition des catégories de foncteurs homogènes, l'évaluation se restreint en un foncteur :

$$\mathrm{ev}_V : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL(V)}\;. \tag{4.5}$$

C'est un foncteur quotient (au sens de [Gab], en particulier il est essentiellement surjectif) et Friedlander et Suslin ont montré [FS, Thm 3.2] que c'est une équivalence de catégories si $\dim V \geq d$. Nous donnons une démonstration de ce fait dans la section 6.4.

4.1.5 Foncteurs polynomiaux stricts et non stricts

Nous présentons maintenant une autre notion polynomialité pour les foncteurs, dûe à Eilenberg et Mac Lane [EML2]. A tout foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$, on associe des effets croisés $\mathrm{cr}_k F$. Plus précisément, on a $\mathrm{cr}_0 F = F(0)$ et pour $k \geq 1$, ces effet croisés sont des foncteurs

$$\mathrm{cr}_k F : (\mathcal{V}_{\Bbbk}^f)^{\times k} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$$

tels que $\mathrm{cr}_k F(V_1, \dots, V_k)$ est le noyau de l'application induite par les projections canoniques de $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ sur $\bigoplus_{i\in I} V_i$ pour tous les sous-ensembles I de $\{1, \dots, k\}$ (avec la convention qu'une somme sur l'ensemble vide est nulle, et la projection canonique est alors l'application nulle)

$$F(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \to \bigoplus_{I\subset\{1,\dots,k\}} F\left(\bigoplus\nolimits_{i\in I} V_i\right)\;.$$

L'utilité des effets croisés pour analyser les foncteurs est révélée par la formule suivante (qui se démontre par récurrence sur k). Si $|I|$ désigne le cardinal de l'ensemble $I = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ et $V_I = (V_{i_1}, \dots, V_{i_\ell})$ (avec la convention $\mathrm{cr}_0 F(V_\emptyset) = F(0)$), on a un isomorphisme naturel :

$$F(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{I\subset\{1,\dots,k\}} \mathrm{cr}_{|I|} F(V_I)\;. \tag{4.6}$$

Cet isomorphisme naturel montre également que les effets croisés sont exacts (i.e. transforment une suite exacte courte de foncteurs en une suite exacte courte de foncteurs à k variables).

Un foncteur $F : \mathcal{V}_{\Bbbk}^f \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$ est dit *polynomial de degré inférieur ou égal à d* si $\mathrm{cr}_{d+1} F = 0$ et il est *polynomial de degré exactement d* si de plus $\mathrm{cr}_d F \neq 0$.

Exemple 4.4. Par définition, les foncteurs de degré ≤ 0 sont les foncteurs constants, et les foncteurs F de degré ≤ 1 tels que $F(0) = 0$ sont les foncteurs additifs. Par exactitude des effets croisés, si F est de degré $\leq d$ alors les sous-foncteurs et les quotients de F sont également de degré $\leq d$. On a un isomorphisme naturel, où la somme est prise sur tous les k-uplets d'entiers positifs $(d_1, \ldots, d_k)$ tels que $\sum d_j = d$:

$$\Lambda^d(V_1 \oplus \cdots \oplus V_k) \simeq \bigoplus_{(d_1,\ldots,d_k)} \Lambda^{d_1}(V_1) \otimes \cdots \otimes \Lambda^{d_k}(V_k) \ ,$$

On en déduit que $\mathrm{cr}_d \Lambda^d(V_1, \ldots, V_d) = V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ et $\mathrm{cr}_{d+1}\Lambda^d = 0$, donc Λ^d est de degré d.

On peut vérifier facilement que si F est strictement polynomial homogène de poids $\leq d$, alors il est polynomial de degré $\leq d$. Cependant, il est nécessaire de distinguer les deux notions de polynomialité (d'où le terme « strict » employé pour la notion de Friedlander et Suslin). En effet, il existe des foncteurs polynomiaux qui ne sont pas strictement polynomiaux, même pour $\Bbbk = \mathbb{C}$. De plus, le poids d'un foncteur strictement polynomial peut être strictement supérieur à son degré.

Exemple 4.5. Soit $\phi : \Bbbk \to \Bbbk$ un automorphisme du corps $\Bbbk$, et notons $\Bbbk_\phi$ le groupe abélien $\Bbbk$ muni de la structure de $\Bbbk$-$\Bbbk$-bimodule donnée par la formule $\lambda \cdot x \cdot \mu = \lambda x \phi(\mu)$. Le *foncteur de torsion par* ϕ, noté $I^\phi : \mathcal{V}_\Bbbk^f \to \mathcal{V}_\Bbbk$ est défini par la formule

$$I^\phi(V) := \Bbbk_\phi \otimes_\Bbbk V \ ,$$

où la structure de $\Bbbk$-module de $I^\phi(V)$ est induite par la structure de $\Bbbk$-module à gauche de $\Bbbk_\phi$. L'additivité de ϕ implique que I^ϕ est additif, i.e. polynomial de degré 1. L'action de I^ϕ sur les morphismes vérifie : $I^\phi(\lambda f) = \phi(\lambda) f$.

1. Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ et ϕ est la conjugaison complexe, ou si $\Bbbk$ est de caractéristique p non nulle et $\phi(x) = x^{-p}$, l'action de I^ϕ sur les morphismes n'est pas un polynôme en λ, donc I^ϕ n'est pas strictement polynomial.
2. Si $\Bbbk$ est de caractéristique p non nulle et $\phi(x) = x^{p^r}$ pour $r > 0$ le foncteur I^ϕ est communément appelé *r-ième foncteur de torsion de Frobenius*, et noté $I^{(r)}$. On peut montrer que c'est un foncteur strictement polynomial (on en donne une autre description à la section 4.2.2). Comme L'action sur les morphismes est un polynôme homogène de poids p^r, $I^{(r)}$ est strictement polynomial homogène de poids p^r, bien qu'il soit polynomial de degré 1.

4.1.6 Multifoncteurs

Tout ce qui a été présenté jusque ici peut se généraliser au cas des foncteurs de plusieurs variables. Notons $\mathcal{F}_\Bbbk(n)$ la catégorie des foncteurs

$F : (\mathcal{V}_{\Bbbk}^f)^{\times n} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$. Si F désigne un foncteur à n-variables, et $(V_1, \dots, V_n)$ est un n-uplet d'espaces vectoriels, l'espace vectoriel $F(V_1, \dots, V_n)$ est canoniquement muni d'une action du groupe $G := \prod_{i=1}^n GL(V_i)$, on a donc un foncteur d'évaluation exact :

$$\mathrm{ev}_{(V_1,\dots,V_n)} : \mathcal{F}_{\Bbbk}(n) \to \Bbbk G\text{-Mod} .$$

Un foncteur F à n variables est strictement polynomial si pour tout n-uplet d'espaces vectoriels $(V_1, \dots, V_n)$ et tout i, le foncteur à une variable :

$$V \mapsto F(V_1, \dots, V_{i-1}, V, V_{i+1}, \dots, V_n)$$

est strictement polynomial. De manière équivalente, F est strictement polynomial si pour tout $(V_1, \dots, V_n)$ l'action canonique de chaque groupe $GL(V_i)$ sur $F(V_1, \dots, V_n)$ est polynomiale. On note $\mathcal{P}_{\Bbbk}(n)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\Bbbk}(n)$, dont les objets sont les multifoncteurs strictement polynomiaux.

Cette généralisation des foncteurs strictement polynomiaux au cas de plusieurs variables n'est pas gratuite. En effet ces multifoncteurs ont plusieurs utilités.

1. Par définition, les multifoncteurs sont reliés aux représentations des produits finis de groupes linéaires.
2. Les bifoncteurs permettent de construire des représentations *rationnelles* de $GL(V)$. En effet, si B est un bifoncteur, on peut restreindre l'action canonique du groupe produit $GL(V) \times GL(V)$ sur $B(V, V)$ au sous-groupe diagonal $\{({}^t g^{-1}, g) \ : \ g \in GL(V)\}$, on obtient une représentation rationnelle de $GL(V)$. Ce procédé peut se formaliser comme un foncteur d'évaluation

   $$\mathrm{ev}_V : \mathcal{P}_{\Bbbk}(2) \to \mathcal{R}\mathrm{at}_{GL(V)} .$$

   Ce foncteur d'évaluation contient toutes les représentations rationnelles de dimension finie dans son image. En effet, si W est une représentation rationnelle de dimension finie de $GL(V)$, alors pour N assez grand, $\mathbf{det}^N \otimes W$ est polynomiale, donc provient d'un foncteur F. On obtient alors W par évaluation sur V du bifoncteur $(U_1, U_2) \mapsto (\Lambda^{\dim V}(U_1))^{\otimes N} \otimes F(U_2)$.
3. Enfin les multifoncteurs apparaissent comme un outil technique essentiel dans certains calculs.

4.2 Théorie des représentations de $GL_n(\Bbbk)$

Nous rappelons maintenant quelques faits classiques et problèmes ouverts concernant les représentations de $GL_n(\Bbbk)$ (et donc également les foncteurs strictement polynomiaux).

4.2.1 Théorie des poids et classification des simples

On note $\mathbb{T}^n = (\mathbb{G}_m)^{\times n}$ le tore maximal de $GL_n(\Bbbk)$ constitué des matrices diagonales. Si (W, ρ) est une représentation rationnelle de $GL_n(\Bbbk)$, on restreint l'action au tore maximal $\mathbb{T}^n$ et par semi-simplicité des représentations de $\mathbb{G}_m$, on obtient une décomposition :

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} W_\lambda$$

dans laquelle pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, W_λ est le sous-espace maximal sur lequel l'action de $\mathbb{T}^n$ est donnée par $(a_1, \dots, a_n) \cdot v = (\prod a_i^{\lambda_i})v$. Les espaces vectoriels W_λ s'appellent les sous-espaces de poids[5] de la représentation (W, ρ). Les n-uplets λ pour lesquels $W_\lambda \neq 0$ s'appellent les poids de la représentation, et la dimension de W_λ s'appelle la multiplicité de λ.

On peut retirer beaucoup d'informations sur une représentation rationnelle à partir de l'analyse de ses poids. Par exemple, une représentation est polynomiale si et seulement si tous ses poids sont des n-uplets d'entiers positifs [FS, Prop 3.5]. Une représentation polynomiale W est homogène de poids total d si pour tout poids λ de W, on a $\sum \lambda_i = d$.

Les poids constituent également un outil crucial pour classifier les représentations simples. Nous expliquons maintenant cette classification lorsque $\Bbbk$ est un corps algébriquement clos[6]. Les poids d'une représentation sont munis d'un ordre partiel, appelé *ordre de dominance*. Pour décrire cet ordre, on note ϵ_i le n-uplet dont tous les éléments sont nuls sauf le i-ième qui vaut 1 : $\epsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, et on note $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$. On dit qu'un n-uplet μ domine λ, et on note $\lambda \trianglelefteq \mu$ si

$$\mu - \lambda = \sum n_i \alpha_i \ , \quad \text{avec } n_i \in \mathbb{N} \ .$$

Les représentations rationnelles simples de $GL_n(\Bbbk)$ sont de dimension finie. Notons B^+, resp. B^-, le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, resp inférieures, de $GL_n(\Bbbk)$. En utilisant le théorème de Lie-Kolchin et la densité de l'ensemble B^-B^+ dans $GL_n(\Bbbk)$, on montre [Hum, 31.3] qu'il existe un unique poids λ maximal pour l'ordre de dominance appelé le *plus haut poids* de (W, ρ). On montre aussi que l'espace de poids W_λ est de dimension 1, et que deux représentations simples de même plus haut poids sont isomorphes. On a donc une application injective :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes isom.} \\ \text{rep. rat. simples} \end{array} \right\} \hookrightarrow \mathbb{Z}^n \ , \tag{4.7}$$

[5] Ce ne sont pas des sous-représentations de $GL_n(\Bbbk)$ en général. Par exemple un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ considéré comme une matrice de permutation envoie l'espace de poids W_λ sur l'espace de poids $W_{\sigma(\lambda)}$.

[6] On peut montrer que les simples sont en fait définis sur le sous-corps premier de $\Bbbk$. Ainsi, la classification énoncée ici est valable pour un corps infini quelconque.

qui à chaque classe d'isomorphisme de représentations simples associe son plus haut poids. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est le plus haut poids d'une représentation simple (W, ρ), alors en considérant l'action des matrices de permutation sur W on voit que $\lambda \trianglerighteq \sigma(\lambda)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, où le groupe symétrique agit sur les n-uplets en permutant leurs coordonnées. En particulier, ceci impose que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Les n-uplets d'entiers satisfaisant cette relation sont appelés les *poids dominants*, et on note $\Lambda^+(n)$ l'ensemble de ces poids dominants (c'est à dire l'ensemble des partitions d'entiers en n parts), de sorte que l'injection (4.7) induise une injection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes isom.} \\ \text{rep. rat. simples} \end{array} \right\} \hookrightarrow \Lambda^+(n) . \tag{4.8}$$

La classification des représentations simples affirme que (4.8) est une bijection. Il reste donc à expliquer pourquoi pour chaque poids dominant λ, on peut trouver une représentation simple de plus haut poids λ. Il suffit en fait de montrer cette existence lorsque tous les coefficients de λ sont positifs, car si W est une représentation simple de plus haut poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors le produit tensoriel $W \otimes \mathbf{det}^k$ est une représentation simple de plus haut poids $(\lambda_1 + k, \dots, \lambda_n + k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Considérons donc un poids dominant λ à coefficients positifs, c'est à dire λ est une partition de l'entier $d := \sum \lambda_i$, et notons $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ la partition duale. Alors λ est un poids maximal pour la représentation

$$\Lambda^{\lambda'_1}(\Bbbk^n) \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda'_k}(\Bbbk^n) . \tag{4.9}$$

Cette représentation admet une série de composition, c'est à dire une filtration finie dont les quotients successifs sont simples. L'un de ces simples contient le poids maximal λ, et nous procure donc une représentation simple de plus haut poids λ. Ainsi, (4.8) est un isomorphisme. De plus, la représentation (4.9) est polynomiale homogène de poids total d. Si on note

$$\Lambda^+(n, d) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ : \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0 \text{ et } \sum \lambda_i = d \right\} ,$$

on obtient donc en bonus que la bijection (4.8) induit des bijections :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Classes isom.} \\ \text{rep. polyn. simples} \\ \text{homogènes poids } d \end{array} \right\} \xrightarrow{\simeq} \Lambda^+(n, d) . \tag{4.10}$$

Rappelons que si $n \geq d$ l'évaluation (4.5) induit une équivalence de catégorie entre les représentations polynomiales homogènes de poids total d et les foncteurs strictement polynomiaux de poids total d. Les bijections (4.10) fournissent donc également une classification des foncteurs strictement polynomiaux simples homogènes de poids d (on remarque que le membre de droite de (4.10) ne dépend pas de n si $n \geq d$).

4.2.2 Modules simples et modules de Schur

La construction des $GL_n(\Bbbk)$-modules simples n'est pas explicite, ce qui soulève le problème élémentaire suivant.

Problème 4.6. *Notons L_λ un simple de plus haut poids λ. Peut-on calculer la dimension de L_λ ? Plus généralement, peut-on déterminer les poids de L_λ et leurs multiplicités (c'est à dire la dimension des espaces de poids) ?*

Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle, on dispose d'un modèle explicite pour les représentations simples donné par les modules de Schur. Pour être plus précis, fixons $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+(n, d)$ une partition de poids d, et $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$ sa transposée. Si V est un $\Bbbk$-espace vectoriel, on note :

$$\Lambda^{\lambda'}(V) = \Lambda^{\lambda'_1}(V) \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda'_k}(V)\ , \quad S^\lambda(V) = S^{\lambda_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_n}(V)\ .$$

Ces deux expressions définissent des foncteurs strictement polynomiaux de la variable V, homogènes de poids d. On note d_λ l'application composée

$$\Lambda^{\lambda'}(V) \hookrightarrow V^{\otimes d} \xrightarrow{\sigma_\lambda} V^{\otimes d} \twoheadrightarrow S^\lambda(V) \tag{4.11}$$

où le premier morphisme est l'inclusion canonique des puissances extérieures comme tenseur invariant du produit tensoriel, le troisième morphisme est l'application quotient du produit tensoriel sur les puissances symétriques. Le morphisme du milieu est l'isomorphisme qui envoie $v_1 \otimes \cdots \otimes v_d$ sur $v_{\sigma_\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma_\lambda(d)}$ où $\sigma_\lambda \in \mathfrak{S}_d$ est la permutation définie de la manière suivante. Soit T_λ un tableau de Young de forme λ rempli de manière standard, c'est à dire avec $1, \dots, \lambda_1$ dans la première ligne, $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$ dans la deuxième ligne, etc. Alors $\sigma_\lambda(k)$ est le k-ième nombre du tableau transposé ${}^tT_\lambda$ lorsqu'on lit ce dernier en ligne (en commençant par le haut). Par exemple, si $\lambda = (3, 1)$, alors $\sigma_\lambda(1) = 1$, $\sigma_\lambda(2) = 4$, $\sigma_\lambda(3) = 2$ et $\sigma_\lambda(4) = 3$. On note

$$S_\lambda(V) := \operatorname{Im} d_\lambda \subset S^\lambda(V)\ . \tag{4.12}$$

Cette formule définit un foncteur S_λ strictement polynomial homogène de poids d, qu'on appelle *foncteur de Schur* associé à la partition λ. Par exemple, $S_{(1,\dots,1)} = \Lambda^d$ et $S_{(d)} = S^d$. Le $GL_n(\Bbbk)$-module polynomial $S_\lambda(\Bbbk^n)$ obtenu par évaluation sur $\Bbbk^n$ est appelé *module de Schur*. C'est un $GL_n(\Bbbk)$-module simple dont on sait parfaitement calculer la dimension et les espaces de poids [FH, Lec. 6].

Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique non nulle, on peut considérer le foncteur de Schur S_λ défini précédemment, et le module de Schur $S_\lambda(\Bbbk^n)$ obtenu par évaluation. La dimension et les espaces de poids de ces modules de Schur sont les mêmes qu'en caractéristique nulle [ABW]. Cependant les modules de Schur ne sont en général pas simples en caractéristique non nulle.

On peut le constater sur la p^r-ième puissance symétrique en caractéristique p, $r \geq 1$. Le sous-espace vectoriel engendré par les puissances p^r-ièmes des éléments de $\Bbbk^n$

$$(\Bbbk^n)^{(r)} = \left\langle v^{p^r} \in S^{p^r}(\Bbbk^n) \ : v \in \Bbbk^n \right\rangle \subset S^{p^r}(\Bbbk^n) = S_{(p^r,0,\dots,0)}(\Bbbk^n)$$

définit une sous-représentation propre de $S^{p^r}(\Bbbk^n)$ appelée r-ième torsion de Frobenius de la représentation standard $\Bbbk^n$ (c'est la valeur sur $\Bbbk^n$ du r-ième foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ introduit à la section 4.1.5). En fait, on ne dispose pas à ce jour de modèles explicites pour les modules simples en caractéristique non nulle, et le problème 4.6 est ouvert.

Le fait que les modules de Schur ne soient pas simples soulève le problème élémentaire suivant.

Problème 4.7. *Quels sont les simples L_λ qui interviennent comme facteurs de composition du module de Schur $S_\mu(\Bbbk^n)$, et avec quelles multiplicités ?*

Les problèmes 4.7 et 4.6 sont en fait équivalents. En effet, notons $a_{\mu,\lambda}$ la multiplicité de L_μ comme facteur de composition de $S_\mu(\Bbbk^n)$, $l_{\lambda,\nu}$ la multiplicité du poids ν dans le simple L_λ, et $s_{\mu,\nu}$ la multiplicité du poids ν dans le module de Schur $S_\mu(\Bbbk^n)$. On ordonne $\Lambda^+(n,d)$ par l'ordre lexicographique. et on considère les matrices carrées :

$$A = [a_{\lambda,\mu}] \ , \quad L = [l_{\lambda,\nu}] \ , \quad S = [s_{\lambda,\nu}] \ .$$

Comme l'ordre lexicographique raffine l'ordre de dominance, ces matrices sont triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale. La matrice S est explicitement connue, le problème 4.6 équivaut à déterminer les coefficients de L et le problème 4.7 équivaut à déterminer les coefficients de A. Par définition de S, A et L on a $S = AL$, si bien que les deux problèmes sont équivalents.

Lusztig a donné [Lus] une formule qui prédit les poids et les multiplicités des représentations simples, en termes des polynômes de Kashdan-Lusztig associés au groupe symétrique (nous renvoyons le lecteur à [Jan2] pour une explication détaillée de cette formule). La conjecture de Lusztig dit que ces formules sont justes si la caractéristique p du corps $\Bbbk$ est suffisamment grande par rapport à n (Lusztig avait initialement conjecturé une borne linéaire par rapport à n). Andersen, Jantzen et Soergel ont montré [AJS] la validité de la conjecture de Lusztig pour p très grand (sans borne précise), mais les travaux récents de Williamson [Wil] ont montré qu'on ne peut pas espérer une borne linéaire en n, ni même polynomiale. On ne dispose pas à ce jour de conjecture donnant les dimensions des espaces de poids des représentations simples en petite caractéristique.

4.2.3 Semi-simplicité, extensions

Une représentation de $GL_n(\Bbbk)$ est dite semi-simple si elle est isomorphe à une somme directe de représentations simples. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle, les représentations rationnelles de $GL_n(\Bbbk)$ sont toutes semi-simples. De manière équivalente, toute sous-représentation V d'une représentation rationnelle W admet un supplémentaire $GL_n(\Bbbk)$-stable. Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, cela découle par exemple du « Weyl's trick » : on restreint l'action au sous-groupe $U_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Grâce à la mesure de Haar du groupe unitaire on peut trouver un supplémentaire $U_n(\mathbb{C})$-stable de V, et comme $U_n(\mathbb{C})$ est Zariski dense dans $GL_n(\mathbb{C})$ ce supplémentaire est de fait stable par $GL_n(\mathbb{C})$[7].

En revanche, si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p > 0$, les représentations de $GL_n(\Bbbk)$ ne sont pas toutes semi-simples. Par exemple si $d = \max\{p, n\}$, la sous-représentation $\Lambda^d(\Bbbk^n) \subset (\Bbbk^n)^{\otimes d}$ n'admet pas de supplémentaire stable. En effet, l'application quotient $(\Bbbk^n)^{\otimes d} \twoheadrightarrow \Lambda^d(\Bbbk^n)$ est l'unique application $GL_n(\Bbbk)$-équivariante et sa restriction à la sous-représentation $\Lambda^d(\Bbbk^n)$ est égale à la multiplication par $d! = 0$. Ce défaut de semi-simplicité équivaut à l'existence d'extensions non triviales entre certaines représentations rationnelles. Il se pose alors naturellement le problème suivant.

Problème 4.8. *Pour deux représentations rationnelles V et W, peut-on calculer* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)}}(V, W)$ *?*

On dispose en réalité de plusieurs catégories dans lesquelles on pourrait vouloir calculer des extensions : catégories de représentations polynomiales (homogènes) ou rationnelles (homogènes). En fait, les extensions ne dépendent pas de la catégorie considérée. De façon plus précise, les inclusions de catégories du diagramme suivant induisent des isomorphismes en Ext :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}\mathrm{at}_{d,GL_n(\Bbbk)} \arrow[r, hook] & \mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)} \\ \mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\Bbbk)} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathcal{P}\mathrm{ol}_{GL_n(\Bbbk)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

Pour les inclusions horizontales, c'est une conséquence formelle des décompositions (4.3). Ces décompositions montrent également qu'il n'y a pas d'extensions entre représentations homogènes de poids distincts. Pour les inclusions verticales, c'est une conséquence des travaux de Donkin [Don2, Don3], voir aussi [FS, Cor 3.12.1]. L'article [4] en donne une autre démonstration, qui a l'avantage de se généraliser facilement à un anneau quelconque. Comme la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de poids d est équivalente à la catégorie $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\Bbbk)}$ pour $n \geq d$, on en déduit par ailleurs que l'application induite par l'évaluation

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G) \to \mathrm{Ext}^*_{GL_n(\Bbbk)}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))$$

[7]On peut ensuite propager ce résultat à tout corps de caractéristique nulle par des considérations cohomologiques.

est un isomorphisme si n est supérieur ou égal au poids de F et de G [FS, Cor 3.13]. L'intérêt de cet isomorphisme est que bon nombre de calculs d'extensions sont plus facile à mener dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux - c'est d'ailleurs dans ce but que les foncteurs strictement polynomiaux ont été introduits par Friedlander et Suslin.

4.2.4 Catégories de plus haut poids, bonnes filtrations

L'axiomatique des *catégories de plus haut poids* a été introduite par Cline Parshall et Scott dans [CPS2] pour modéliser un ensemble de catégories en théorie des représentations (représentations des algèbres de Schur, des groupes algébriques réductifs, des algèbres de Lie semi-simples, etc.) qui partagent des caractéristiques communes. Une catégorie de plus haut poids est un quadruplet $(\mathcal{C}, \Lambda, (L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\nabla_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ tel que

(a) $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne suffisamment régulière, comme la catégorie des représentations rationnelles de $GL_n(\mathbb{k})$ ou la catégorie des modules sur une $\mathbb{k}$-algèbre de dimension finie[8].

(b) Λ est un ensemble partiellement ordonné, dont tous les intervalles, i.e. les sous-ensembles de la forme $[\mu,\nu] = \{\lambda \;:\; \mu \leq \lambda \leq \nu\}$ sont finis.

(c) $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille complète de représentants des classes d'isomorphismes des simples de $\mathcal{C}$.

(d) $(\nabla_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'« objets costandard », c'est à dire que (i) le socle de chaque ∇_λ est isomorphe à L_λ, (ii) les facteurs de composition de ∇_λ/L_λ sont des L_μ avec $\mu < \lambda$, chacun de ces L_μ n'ayant qu'une multiplicité finie, et (iii) les espaces de morphismes entre objets standard sont de dimension finie.

(e) Tout objet simple L_λ admet une enveloppe injective I_λ. De plus celle-ci admet une filtration croissante $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset \bigcup F_i = I_\lambda$ telle que $F_1 \simeq \nabla_\lambda$, et pour tout $i > 0$, $F_{i+1}/F_i \simeq \nabla_\mu$ avec $\mu > \lambda$, chacun de ces ∇_μ n'ayant qu'une multiplicité finie dans le gradué de I_λ.

Les catégories $\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\mathbb{k})}$ et $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\mathbb{k})}$ (donc les catégories $S(n,d)$-Mod et $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$) fournissent des exemples de catégories de plus haut poids. De façon précise, la structure est donnée par les quadruplets

$$\left(\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\mathbb{k})}, \Lambda^+(n), L_\lambda, \nabla_\lambda\right)\;, \quad \left(\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\mathbb{k})}, \Lambda^+(n,d), L_\lambda, S_\lambda(\mathbb{k}^n)\right)\;,$$

dans lesquels $\Lambda^+(n)$, (resp. $\Lambda^+(n,d)$) désigne l'ensemble des partitions d'entiers (resp. de l'entier d) en n parts muni de l'ordre de dominance, et les L_λ sont des simples de plus haut poids correspondant à la partition λ. Les $S_\lambda(\mathbb{k}^n)$ sont les modules de Schur introduits à la section 4.2.2, et la démonstration de l'axiome (e) repose sur le fait que les algèbres de Schur sont

[8]De façon précise, on suppose que $\mathcal{C}$ est $\mathbb{k}$-linéaire sur un corps $\mathbb{k}$, cocomplète avec des colimites filtrantes exactes, suffisamment d'injectifs, et localement finie, i.e. tout objet est colimite filtrante de ses sous-objets de longueur finie.

quasi-héréditaires. Les représentations rationnelles costandard ∇_λ sont définies par induction :

$$\nabla_\lambda = \mathrm{Ind}_{B^-}^{GL_n(\Bbbk)}\Bbbk_\lambda = (\Bbbk[GL_n(\Bbbk)] \otimes \Bbbk_\lambda)^{B^-} \ ,$$

où B^- désigne l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $GL_n(\Bbbk)$, $\Bbbk_\lambda$ est la représentation unidimensionnelle de B^- donnée par le caractère $\chi_\lambda([b_{i,j}]) = b_{1,1}^{\lambda_1} \cdots b_{n,n}^{\lambda_n}$ et $GL_n(\Bbbk) \times B^-$ agit par translations (chacun des facteurs d'un coté différent) sur $\Bbbk[GL_n]$. La démonstration des axiomes (d) et (e) repose essentiellement sur le théorème de Kempf [Jan, Chap. II.4].

Remarque 4.9. Les deux constructions donnent des objets costandard isomorphes : pour tout $\lambda \in \Lambda(n,d)$ on a un isomorphisme de $GL_n(\Bbbk)$-modules rationnels $\nabla_\lambda \simeq S_\lambda(\Bbbk^n)$. C'est facile à montrer directement pour les partitions de la forme (d) ou $(1,\dots,1)$ [Jan, II.2.16]. Le cas général est dû à James [Jam].

On peut déduire un certain nombre de résultats cohomologiques de première importance à partir des axiomes des catégories de plus haut poids. Nous en listons quelques-uns.

1. La catégorie $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n(\Bbbk)}$ est une catégorie de dimension homologique finie, inférieure ou égale[9] à $2\,\mathrm{card}(\Lambda^+(n,d)) - 2$.
2. Si M et N sont des $GL_n(\Bbbk)$-modules rationnels de dimension finie sur $\Bbbk$, alors pour tout i les $\Bbbk$-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)}}(W,V)$ sont de dimension finie.
3. Notons Δ_λ le dual contragédient de ∇_λ, i.e. $\Delta_\lambda = \mathrm{Hom}_\Bbbk(\nabla_\lambda, \Bbbk)$ muni de l'action de $GL_n(\Bbbk)$ donnée par $g \cdot f(x) := f({}^tg \cdot x)$, où ${}^tg$ est la transposée d'une matrice g. Alors pour tout λ, μ on a

   $$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)}}(\Delta_\lambda, \nabla_\mu) = 0 \quad \text{si } i > 0\ .$$

   Comme le module costandard associé au n-uplet $(0,\dots,0)$ est le module trivial, on obtient en particulier que

   $$H^i(GL_n(\Bbbk), \nabla_\lambda) = 0 \quad \text{si } i > 0\ .$$

Le dernier résultat suggère l'importance des modules costandard en cohomologie de $GL_n(\Bbbk)$ (ou plus généralement des groupes algébriques réductifs). La notion suivante interviendra de façon cruciale à plusieurs reprises dans la suite de ce mémoire. On dit qu'une représentation rationnelle W admet *une bonne filtration* si elle admet une filtration croissante $0 = F_0 \subset F_1 \cdots \subset \bigcup F_i = W$ dont les quotients F_{i+1}/F_i sont des sommes directes de modules costandard.

[9] La finitude de la dimension homologique a été démontrée sans catégories de plus haut poids indépendamment dans [AB2] et [Don3]. La borne donnée ici n'est pas optimale : la dimension homologique exacte est calculée dans [Tot].

Remarque 4.10. Nous avons expliqué dans la section 4.2.2 que déterminer des espaces de poids des représentations simples équivaut à déterminer les multiplicités des L_λ comme facteurs de composition de ∇_μ. Le problème de déterminer les multiplicités des ∇_μ dans le gradué associé à la filtration de l'enveloppe injective I_λ donnée en (e) équivaut aux deux problèmes précédents. En effet le théorème de réciprocité de Brauer-Humphreys [CPS2, Thm 3.11] donne une égalité entre multiplicités $[\nabla_\mu : L_\lambda] = [I_\lambda : \nabla_\mu]$.

4.2.5 Théorie des blocs

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne suffisamment régulière, comme la catégorie $\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)}$ ou la catégorie R-Mod des modules sur une $\Bbbk$-algèbre R de dimension finie (ou plus généralement une catégorie abélienne $\Bbbk$-linéaire cocomplète avec colimites filtrantes exactes, dont les classes d'isomorphismes de simples forment un ensemble, et dont tout objet est colimite de ses sous-objets de longueur finie). Notons $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de simples de $\mathcal{C}$. On dit que deux classes d'isomorphismes de simples $[L]$ et $[L']$ sont équivalentes s'il existe une suite finie de simples

$$L = L_0, L_1, \dots, L_n = L'$$

telle que $\mathrm{Ext}^1(L_i, L_{i+1}) \neq 0$ ou $\mathrm{Ext}^1(L_{i+1}, L_i) \neq 0$ pour tout i. On appelle *blocs de* $\mathcal{C}$ les classes d'équivalences de simples pour cette relation, et on note $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ l'ensemble des blocs.

Pour tout $b \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ on note $\mathcal{C}_b$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont construits uniquement à partir des simples de b. C'est à dire X est un objet de $\mathcal{C}_b$ si ses sous-objets de longueur finie n'ont que des simples de b comme facteurs de composition. On a alors une décomposition[10] :

$$\mathcal{C} = \prod_{b \in \mathcal{B}(\mathcal{C})} \mathcal{C}_b \,.$$

Pour peu que l'on connaisse les blocs, cette décomposition fournit des annulations cohomologiques. En effet, tout objet X se décompose en une somme directe $X = \bigoplus X_b$ où chaque X_b est un objet de $\mathcal{C}_b$. Notons $\mathcal{B}(X)$ l'ensemble des blocs tels que $X_b \neq 0$. Alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0 \quad \text{si} \quad \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{B}(Y) = \emptyset \,.$$

Les blocs des catégories de représentation des groupes algébriques semi-simples simplement connexes ont été déterminés par Donkin [Don1]. Les blocs de la catégorie $\mathcal{R}\mathrm{at}_{GL_n(\Bbbk)}$ s'en déduisent. Les blocs de la catégorie $S(n,d)$-Mod ont aussi été calculés par Donkin [Don3, Don5]. Le cas de $S(n,d)$-Mod avec $n \geq d$ est le plus simple, et aussi le plus important pour

[10] La démonstration de [Jan, II.7.1] est valable pour les catégories que nous considérons.

nous car il correspond aux blocs de $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$. Le résultat est donné par la « règle de Nakayama » : si $\lambda, \mu \in \Lambda^+(n,d)$, les simples associés L_λ, L_μ sont dans le même bloc si et seulement s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que

$$\lambda_i - i = \mu_{\sigma(i)} - \sigma(i) \mod p \qquad \text{pour tout } i.$$

Cette condition équivaut au fait que les partitions λ et μ ont même p-cœur [McD, Ex. 8(f) p.13].

4.2.6 Quelques atouts des foncteurs strictement polynomiaux

Nous mentionnons pour finir quelques atouts dont on dispose lorsque l'on travaille avec les foncteurs strictement polynomiaux (par rapport aux modules sur les algèbres de Schur, ou aux représentations de GL_n).

La nature fonctorielle des objets permet d'effectuer des constructions auxquelles il est difficile de donner un sens dans les catégories de représentations des algèbres de Schur, ou de représentations de GL_n. Ainsi on peut *composer* des foncteurs strictement polynomiaux entre eux.

Une utilisation élémentaire mais très utile de la composition est la définition des « foncteurs à paramètres ». Si F est un foncteur strictement polynomial et V un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, on note F^V, resp. F_V les foncteurs

$$F^V(W) = F(\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V,W)) \ , \ \text{resp.} \quad F_V(W) = F(V \otimes W) \ .$$

Ces foncteurs à paramètres sont très utiles et n'ont pas d'équivalent évident dans la catégorie $S(n,d)$-Mod. Ils apparaissent par exemple dans le calcul de l'effet de la torsion de Frobenius en cohomologie (théorème B de la section 2 ou théorème 8.8 dans la suite du mémoire). Les foncteurs à paramètres sont également utilisés pour définir un Hom interne dans la catégorie $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F,G)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F^V,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(F,G_V) \ .$$

Ce Hom interne joue un rôle important dans de nombreux calculs (cf. sections 10 et 11). Il fait partie d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée sur $\mathcal{P}_{d,\mathbb{k}}$ explicitée dans [Kra]. Comme l'observe H. Krause, une telle structure monoïdale symétrique fermée était complètement inconnue dans la catégorie $S(n,d)$-Mod[11].

Une autre incarnation de la composition des foncteurs est la technique d' « adjonction somme-diagonale » présentée dans la section 6.6. Cette technique classique de catégories de foncteurs se révèle extrêmement efficace pour étudier les extensions entre produits tensoriels de foncteurs, comme le montre par exemple l'énoncé emblématique [FFSS, Thm 1.7]. Cette technique est à

[11] Précisons que les algèbres de Schur n'admettent pas de structure d'algèbre de Hopf. En effet, dans le cas contraire elles seraient autoinjectives, ce qui n'est pas le cas en caractéristique non nulle.

l'origine de phénomènes surprenants, comme l'injectivité des cup produits en cohomologie stable (voir la proposition 6.23 et la section 7.3.1 dans la suite du mémoire), et elle n'a pas d'équivalent dans les catégories de représentations des algèbres de Schur ou de GL_n.

5 Schémas en groupes (algébriques affines, $\Bbbk$-plats)

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notions de base relatives aux schémas en groupes algébriques affines et à leurs représentations. Pour une présentation plus détaillée, nous renvoyons le lecteur à [Wat1, Hum, Spr, Bor1] pour les schémas en groupes sur un corps, et à [Con, Jan, SGA3] en général.

Nous fixons un **anneau commutatif arbitraire** $\Bbbk$. Sauf mention explicite du contraire, les produits tensoriels sont pris sur $\Bbbk$.

5.1 Schémas en groupes (algébriques affines, $\Bbbk$-plats)

Soit $\Bbbk$-Alg la catégorie des $\Bbbk$-algèbres commutatives unitaires et des morphismes de $\Bbbk$-algèbres, et Gps la catégorie des groupes et des morphismes de groupes. Un *schéma en groupes algébriques affines* sur $\Bbbk$ est un foncteur

$$G : \Bbbk\text{-Alg} \to \mathrm{Gps}$$

représentable par une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini. La $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini $\Bbbk[G]$ qui représente G est alors (par le lemme de Yoneda) munie d'une structure d'algèbre de Hopf (avec antipode) sur $\Bbbk[G]$, et morphisme $G \to G'$ (c'est à dire une transformation naturelle) est équivalent à un morphisme d'algèbres de Hopf $\Bbbk[G'] \to \Bbbk[G]$. On dit que G est un sous-schéma en groupes *fermé* de G' si le morphisme $\Bbbk[G'] \to \Bbbk[G]$ est surjectif.

Un schéma en groupes algébriques affines est $\Bbbk$-*plat* si son algèbre de coordonnées est plate comme $\Bbbk$-module. Sans cette hypothèse de platitude, les représentations de G ont des comportements pathologiques [Jan, I.29]. Dans la suite de ce mémoire, nous ne considérons que des schémas en groupes algébriques affines $\Bbbk$-plats, que nous appellerons plus simplement « schémas en groupes sur $\Bbbk$ » ou même « schémas en groupes » s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 5.1 (Groupe linéaire)**.** Le groupe linéaire définit un schéma en groupes $A \mapsto GL_n(A)$, représenté par l'algèbre

$$\Bbbk[GL_n] = \Bbbk[x_{i,j}, t]/ < t \det[x_{i,j}] - 1 >$$

avec n^2 générateurs $x_{i,j}$ et où les crochets représentent l'idéal engendré par le polynôme $t \det[x_{i,j}] - 1$.

Exemple 5.2 (Noyaux de Frobenius)**.** Si $\Bbbk$ est un anneau de caractéristique p non nulle, le morphisme de Frobenius induit pour tout $r \geq 0$ un morphisme :

$$\begin{array}{cccc} F^r : & GL_n(A) & \to & GL_n(A) \\ & [a_{i,j}] & \mapsto & [(a_{i,j})^{p^r}] \end{array} .$$

Le noyau de ce morphisme est un schéma en groupes $GL_{n\,(r)}$, appelé r-ième noyau de Frobenius du groupe linéaire, et représenté par l'algèbre (de dimension finie)

$$\Bbbk[GL_{n,(r)}] := \Bbbk[GL_n]/ < x_{i,j}^{p^r} - \delta_{i,j} > \ .$$

Exemple 5.3 (Groupes multiplicatifs et tores déployés)**.** Le schéma en groupes multiplicatifs est le schéma en groupes $\mathbb{G}_m = GL_1$. Un tore déployé sur $\Bbbk$ est un schéma en groupes sur $\Bbbk$, isomorphe à un produit $\mathbb{G}_m^{\times r}$. L'entier r est le rang du tore.

Soit $\Bbbk$ un corps et $\overline{\Bbbk}$ sa clôture algébrique. Un schéma en groupes G sur $\Bbbk$ est *lisse* si et seulement si l'algèbre $\Bbbk[G] \otimes \overline{\Bbbk}$ est réduite (c'est à dire sans nilpotents) [Wat1, 11.6]. En caractéristique nulle, tous les schémas en groupes sont lisses par un théorème de Cartier [Wat1, 11.6]. En caractéristique non nulle, GL_n est lisse, mais les noyaux de Frobenius $GL_{n\,(r)}$ ne le sont pas.

Si G est un schéma en groupes (lisse ou non) sur un corps infini $\Bbbk$, le choix d'une présentation $\Bbbk[G] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$ induit une identification[12] du groupe des $\Bbbk$-points $G(\Bbbk)$ avec les zéros dans $\Bbbk^n$ de l'idéal I. De plus, pour tout morphisme de schémas $f : G \to G'$, le morphisme $f : G(\Bbbk) \to G'(\Bbbk)$ est régulier, c'est-à-dire coincide avec la restriction d'une fonction polynôme $\Bbbk^n \to \Bbbk^m$. Si $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$, le Nullstellenstatz assure que l'évaluation induit une équivalence de catégories

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Schémas en groupes} \\ \text{lisses sur } \overline{\Bbbk} \end{array} \right\} & \xrightarrow{\simeq} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Groupes algébriques} \\ \text{affines sur } \overline{\Bbbk} \end{array} \right\} \\ G & \mapsto & G(\overline{\Bbbk}) \end{array}$$

5.2 Représentations

Une *représentation* $\Bbbk$*-linéaire* d'un schéma en groupes G est un $\Bbbk$-module M, muni de l'une des données équivalentes suivantes.

(i) Des actions A-linéaires

$$G(A) \times M \otimes A \to M \otimes A$$

pour toutes les $\Bbbk$-algèbres commutatives A, telles que si $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, ces actions s'insèrent dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G(A) \times M \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "G(f)\times M\otimes f"] & M \otimes A \arrow[d, "M\otimes f"] \\ G(B) \times M \otimes B \arrow[r] & M \otimes B \end{tikzcd} .$$

[12] Le groupe des $\Bbbk$-points $G(\Bbbk)$ est donc un groupe algébrique au sens de Chevalley [Che1, II.1]. Cette notion coincide avec la notion moderne d'un groupe algébrique [Bor1, Hum, Spr] si le corps $\Bbbk$ est parfait, mais les deux notions ne sont pas équivalentes en général, voir la discussion détaillée dans [Bor2, VII.2 p.151-152]. Dans ce mémoire, le terme groupe algébrique est toujours pris au sens moderne.

(ii) Une transformation naturelle de foncteurs en monoïdes :

$$G \to \mathrm{End}_M \ ,$$

où End_M désigne le foncteur qui à une $\Bbbk$-algèbre commutative A associe le monoïde $\mathrm{End}_A(M \otimes A)$ des endomorphismes A-linéaires de $M \otimes A$.

(ii') Une transformation naturelle de foncteurs en groupes :

$$G \to GL_M \ ,$$

où le foncteur GL_M est défini par $GL_M(A) = GL_A(M \otimes A)$.

(iii) Une structure de $\Bbbk[G]$-comodule à droite.

Dans la suite, toutes nos représentations seront $\Bbbk$-linéaires, si bien que nous les appellerons plus simplement représentations de G, ou G-modules.

Exemple 5.4. La représentation standard de GL_n est le $\Bbbk$-module $\Bbbk^n$, muni de l'action $GL_n(A) \times A^n \to A^n$ donnée par la multiplication des matrices. Notons (e_i) la base canonique de $\Bbbk^n$. La représentation standard peut être également décrite comme le $\Bbbk[GL_n]$ comodule donné par

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \Bbbk^n & \to & \Bbbk^n \otimes \Bbbk[GL_n] \\ & e_i & \mapsto & \sum_j e_j \otimes x_{j,i} \end{array} .$$

Exemple 5.5. Soit M un $\Bbbk$-module et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$. On dit que M est une représentation de poids λ du tore $\mathbb{G}_m^{\times r}$ si l'action est donnée par la formule $(a_1, \dots, a_r) \cdot m = a_1^{\lambda_1} \cdots a_r^{\lambda_r} m$.

Exemple 5.6. La *représentation régulière* d'un schéma en groupes G est le $\Bbbk$-module $\Bbbk[G]$ muni de l'action à gauche par translations. La structure de $\Bbbk[G]$-comodule correspondante est donnée par la comultiplication de $\Bbbk[G]$.

Si M et N sont deux représentations d'un schéma en groupes G, un morphisme $\Bbbk$-linéaire $f : M \to N$ est dit *G-équivariant* si pour toute $\Bbbk$-algèbre A l'application $f \otimes A : M \otimes A \to N \otimes A$ est $G(A)$-équivariante. De manière équivalente, une application $\Bbbk$-linéaire $f : M \to N$ est G équivariante si c'est un morphisme de $\Bbbk[G]$-comodules.

On note G-Mod la catégorie des représentations de G et des applications $\Bbbk$-linéaires G-équivariantes. La catégorie G-Mod est abélienne, cocomplète et possède des colimites filtrantes exactes. Elle est également muni d'un produit tensoriel (on fait agir G diagonalement sur les facteurs des produits tensoriels). Les opérations de sommes, noyaux, colimites, etc. sont calculées sur les $\Bbbk$-modules sous-jacents, si bien que l'on a un foncteur d'oubli exact, fidèle, commutant aux colimites et aux produits tensoriels :

$$G\text{-Mod} \to \Bbbk\text{-Mod} \ .$$

Enfin, si $\Bbbk$ est un anneau noethérien ou si $\Bbbk[G]$ est un $\Bbbk$-module projectif[13], alors la catégorie G-Mod est localement finie. De façon plus précise, toute représentation M est la colimite filtrante de ses sous-représentations M_i qui sont des $\Bbbk$-modules de type fini.

Exemple 5.7 (Représentations des Tores)**.** Soit T un tore déployé de rang r sur $\Bbbk$. Tout T-module M admet une décomposition [Jan, I.2.11]

$$M \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} M_\lambda$$

où M_λ est un module de poids λ. En particulier, si $\Bbbk$ est un anneau semi-simple (par exemple un corps), la catégorie T-Mod est semi-simple (les objets simples sont les $\Bbbk$-modules simples, munis d'une action de T donnée par un poids λ).

Exemple 5.8. Soit G un schéma en groupes sur un corps infini $\Bbbk$. En oubliant l'action des groupes $G(A)$ pour les algèbres $A \neq \Bbbk$, on obtient un foncteur fidèle et exact :

$$G\text{-Mod} \to \Bbbk G(\Bbbk)\text{-Mod}\ . \tag{5.1}$$

Supposons que la condition (C) suivante est satisfaite :

$$\text{(C) : } G \text{ est lisse et } G(\Bbbk) \text{ est Zariski-dense dans } G(\overline{\Bbbk}).$$

Notons $\Bbbk[G]$ l'algèbre représentant G et $\Bbbk[G(\Bbbk)]$ l'algèbre des fonctions régulières de $G(\Bbbk)$ (c.-à-d. les fonctions obtenues comme restriction de polynômes). Sous la condition (C), le morphisme de $\Bbbk$-algèbres $\Bbbk[G] \to \Bbbk[G(\Bbbk)]$ est un isomorphisme. Ceci implique que le foncteur (5.1) est pleinement fidèle, et on peut en outre caractériser son image. Une représentation $\Bbbk$-linéaire de dimension finie de $G(\Bbbk)$ est rationnelle si morphisme correspondant $\rho : G(\Bbbk) \to GL_{\Bbbk}(V)$ est régulier. Une représentation $\Bbbk$-linéaire quelconque de $G(\Bbbk)$ est rationnelle si c'est la réunion croissante de représentations rationnelles de dimension finie. On note $\mathcal{R}$at-$G(\Bbbk)$-Mod la sous-catégorie pleine de $\Bbbk G(\Bbbk)$-Mod dont les objets sont les représentations rationnelles. Le foncteur (5.1) induit alors une équivalence de catégories :

$$G\text{-Mod} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{R}\text{at-}G(\Bbbk)\text{-Mod}\ .$$

[13] Dans [Jan, I.2.13], il est affirmé que la finitude locale est valable sur tout anneau $\Bbbk$. Je remercie W. van der Kallen de m'avoir expliqué pourquoi la démonstration proposée dans [Jan] ne fonctionne pas en général. En effet, si M est un G-module et S est une sous-partie de M, il n'existe pas forcément de plus petit sous-G-module engendré par S [SGA3, Remarque 11.10.1]. Ce sous-G-module existe si $\Bbbk[G]$ est un $\Bbbk$-module projectif [SGA3, VI.B Lm 11.8], et sous cette hypothèse, la démonstration fonctionne. Ceci s'applique par exemple si G est obtenu par changement de base à partir d'un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$ [vdK3]. Si $\Bbbk$ est un anneau noethérien, une démonstration légèrement différente permet d'obtenir la finitude locale [SGA3, VIB Lm 11.8] pour tout schéma en groupes G.

Le schéma en groupes GL_n satisfait[14] la condition (C), ce qui justifie le point de vue de l'exposition dans la section 4.

5.3 Représentations polynomiales de GL_n et algèbres de Schur.

On note Z le sous-schéma en groupes de GL_n formé des homothéties (qui correspond au centre de GL_n). Si M est un GL_n-module, il se décompose canoniquement en une somme directe de GL_n-modules :

$$M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d \;, \tag{5.2}$$

où chaque M_d est caractérisé comme le $\Bbbk$-module formé des éléments de poids d sous l'action du groupe multiplicatif Z. Le module M est dit homogène de poids d si $M = M_d$. Si $GL_n{-}\mathrm{Mod}_d$ désigne la sous-catégorie abélienne des modules homogènes de poids d, on a donc une décomposition

$$GL_n{-}\mathrm{Mod} = \prod_{d\in\mathbb{Z}} GL_n{-}\mathrm{Mod}_d \;. \tag{5.3}$$

Une représentation M de GL_n est dite *polynomiale* si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite.

(i) Le morphisme $\rho : GL_n \to \mathrm{End}_M$ s'étend en un morphisme de monoïdes $M_n \to \mathrm{End}_M$ (où M_n désigne le schéma en monoïdes des matrices carrées de taille n).

(ii) La structure de comodule $\Delta : M \to M \otimes \Bbbk[GL_n]$ se relève en une structure de $\Bbbk[M_n]$-comodule $\Delta : M \to M \otimes \Bbbk[M_n]$.

On note $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{GL_n}$ désigne la catégorie abélienne des GL_n-modules polynomiaux et $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n}$ la sous-catégorie pleine des GL_n-modules polynomiaux homogène de poids d. Les poids d'une représentation polynomiale sont tous positifs, et la décomposition (5.2) induit donc une décomposition

$$\mathcal{P}\mathrm{ol}_{GL_n} \simeq \prod_{d\geq 0} \mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n} \;. \tag{5.4}$$

Les catégories $\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n}$ admettent une description en termes de modules sur *l'algèbre de Schur* $S(n,d)$. Plus précisément, le $\Bbbk$-module

$$\Bbbk[M_n] \simeq \Bbbk[x_{i,j}, 1 \leq i,j \leq n]$$

est gradué par le degré des polynômes. Si $\Bbbk[M_n]_d$ désigne le $\Bbbk$-module libre de rang fini formé des éléments homogènes de degré d, la comultiplication de

[14] Plus généralement, d'après [Bor1, Cor 18.3] la condition (C) est satisfaite si G est un schéma en groupes lisse connexe sur un corps parfait $\Bbbk$, ou si G est un schéma en groupes de Chevalley (voir la section 5.5 pour les définitions).

$\Bbbk[M_n]$ se restreint en une comultiplication $\Bbbk[M_n]_d \to \Bbbk[M_n]_d \otimes \Bbbk[M_n]_d$. On a donc un morphisme de cogèbres $\Bbbk[M_n]_d \to \Bbbk[M_n]$. Si M est une représentation polynomiale de GL_n, les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Le module M est homogène de poids d.

(b) La structure de comodule $\Delta : M \to M \otimes \Bbbk[M_n]$ se relève en une structure de $\Bbbk[M_n]_d$-comodule $\Delta : M \to M \otimes \Bbbk[M_n]_d$.

Notons $S(n,d) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk[M_n]_d, \Bbbk)$ l'algèbre duale de la cogèbre $\Bbbk[M_n]_d$. C'est une algèbre libre de rang fini sur $\Bbbk$ qu'un calcul élémentaire montre qu'on a un isomorphisme d'algèbres

$$S(n,d) \simeq \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}((\Bbbk^n)^{\otimes d}).$$

L'équivalence des conditions (a) et (b) ci-dessus implique une équivalence de catégories :

$$\mathcal{P}\mathrm{ol}_{d,GL_n} \simeq S(n,d){-}\mathrm{Mod}\ . \qquad (5.5)$$

5.4 Cohomologie

5.4.1 Cohomologie et algèbres de cohomologie

La catégorie G-Mod possède assez d'injectifs [Jan, I.3.9]. Une famille de cogénérateurs injectifs est donné par les représentations $J^{\mathrm{triv}} \otimes \Bbbk[G]$, où J^{triv} désigne un $\Bbbk$-module injectif muni de l'action triviale de G et $\Bbbk[G]$ est la représentation régulière de G. La cohomologie de G cohomologie de G à coefficients dans une représentation M est définie par :

$$H^*(G,M) = \mathrm{Ext}^*_G(\Bbbk^{\mathrm{triv}}, M)\ .$$

Le $\Bbbk$-espace vectoriel des éléments homogènes de degrés zéro, également noté M^G, est appelé espace des points fixes de M sous l'action de G. Le produit tensoriel induit un cup produit (associatif et gradué commutatif) :

$$H^*(G,M) \otimes H^*(G,N) \to H^*(G, M \otimes N)\ .$$

En particulier, si A est une $\Bbbk G$-algèbre commutative (i.e. une $\Bbbk$-algèbre commutative, munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres), le cup produit induit une structure de $\Bbbk$-algèbre graduée commutative sur $H^*(G,A)$.

Remarque 5.9. Si $\Bbbk$ est un corps infini, et G est un schéma en groupes lisse sur $\Bbbk$ tel que $G(\Bbbk)$ est Zariski dense dans $G(\overline{\Bbbk})$, il découle de l'exemple 5.8 que l'espace des points fixes M^G est égal à l'espace $M^{G(\Bbbk)}$ des points fixes sous l'action du groupe discret $G(\Bbbk)$. En général, on a seulement une inclusion $M^G \subset M^{G(\Bbbk)}$.

5.4.2 Complexe de Hochschild et changement de base

On dispose d'un « complexe standard » pour calculer la cohomologie d'un schéma en groupe, appelé complexe de Hochschild. Plus précisément, les modules du type $N^{\mathrm{triv}} \otimes \Bbbk[G]$, où N est un $\Bbbk$-module quelconque et $\Bbbk[G]$ le représentation régulière de G sont $H^*(G,-)$-acycliques [Jan, I.4.7]. Si M est un G-module, ou de manière équivalente un $\Bbbk[G]$-comodule à droite, la construction cobar à deux cotés[15] $\Omega(M, \Bbbk[G], \Bbbk[G])$ fournit donc une résolution $H^*(G,-)$-acyclique de M. On appelle *complexe de Hochschild* le complexe

$$C^*(G,M) := \mathrm{Hom}_G(\Bbbk, \Omega(M, \Bbbk[G], \Bbbk[G])) \simeq \Omega(M, \Bbbk[G], \Bbbk)\ .$$

Par construction, l'homologie du complexe de Hochschild calcule $H^*(G,M)$.

Si $\phi : \Bbbk \to \Bbbk'$ est un morphisme d'anneaux et G est un schéma en groupes algébriques affines sur $\Bbbk$, on note $G_{\Bbbk'}$ le schéma en groupes algébriques sur $\Bbbk'$ représenté par $\Bbbk[G] \otimes \Bbbk'$. On dit que le schéma en groupes $G_{\Bbbk'}$ est obtenu par changement de base (le long de ϕ). Il vérifie pour toute $\Bbbk'$-algèbre A

$$G_{\Bbbk'}(A) = G_{\Bbbk}(A)\ .$$

Le produit tensoriel par $\Bbbk'$ induit un foncteur de changement de base :

$$\begin{array}{ccc} G\text{-Mod} & \to & G_{\Bbbk'}\text{-Mod} \\ M & \mapsto & M \otimes \Bbbk' \end{array}\ .$$

Les deux énoncés suivants seront souvent utilisés dans la suite de ce mémoire. Ils reposent sur le complexe de Hochschild et le foncteur de changement de base.

Lemme 5.10 (Changement de base)**.** *[Jan, I 4.18] Soit G un schéma en groupes sur un anneau principal $\Bbbk$, M un G-module et $\Bbbk'$ une $\Bbbk$-algèbre. Si M libre sur $\Bbbk$, on a une suite exacte courte de $\Bbbk'$-modules (naturelle en M et non naturellement scindée) :*

$$0 \to H^i(G,M) \otimes \Bbbk \to H^i(G'_{\Bbbk}, M \otimes \Bbbk') \to \mathrm{Tor}_1^{\Bbbk}(\Bbbk', H^{i+1}(G,M)) \to 0\ .$$

Démonstration. On a un isomorphisme $C^*(G,M) \otimes \Bbbk' \simeq C^*(G_{\Bbbk'}, M \otimes \Bbbk')$ au niveau des complexes de Hochschild. Comme M est $\Bbbk$-libre, $C^*(G,M)$ est un complexe de $\Bbbk$-modules libres. La suite exacte courte provient alors du théorème des coefficients universels [McL2, V Thm 11.1]. □

[15] On rappelle que si C est un cogèbre sur $\Bbbk$, M (resp. N) un C-comodule à droite (resp. gauche), la construction cobar est un complexe de cochaînes avec $\Omega^i(M, \Bbbk[G], N) = M \otimes C^{\otimes i} \otimes N$ et $d(m \otimes c1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes n = \Delta_M(m) \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes n + \sum (-1)^k m \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes \Delta(c_k) \otimes \cdots \otimes c_i \otimes n + (-1)^{i+1} m \otimes c_1 \otimes \cdots \otimes c_i \otimes \Delta_N(n)$. Voir par exemple [FMT] pour plus de détails sur la construction cobar à deux cotés.

Lemme 5.11 (Groupes produits)**.** *Soit G un schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$, et M un G-module $\mathbb{Z}$-libre tel que $H^{>0}(G,M) = 0$. On note $\overline{M} = M \otimes \Bbbk$ le $G_\Bbbk$-module obtenu par changement de base. Soit H un schéma en groupes sur $\Bbbk$ et N un H-module. Pour tout n on a un isomorphisme :*

$$H^0(G_\Bbbk, \overline{M}) \otimes_\Bbbk H^n(H,N) \xrightarrow{\simeq} H^n(G_\Bbbk \times H, \overline{M} \otimes_\Bbbk N) .$$

Démonstration. Le complexe de Hochschild : $C^*(G_\Bbbk \times H, \overline{M} \otimes_\Bbbk N)$ est isomorphe au produit tensoriel $C^*(G,M) \otimes_\mathbb{Z} C^*(H,N)$. Le complexe $C^*(G,M)$ est un complexe de groupes abéliens libres d'homologie concentrée en degré 0. Son homologie de degré nul est $\mathbb{Z}$-libre, et par changement de base $H^0(G,M) \otimes \Bbbk = H^0(G_\Bbbk, \overline{M})$. Le théorème de Künneth [McL2, V Thm 10.2] donne donc les isomorphismes requis. □

5.4.3 Suite spectrale de Hochschild-Serre

Soit $\Bbbk$ un corps. Un sous-schéma en groupes fermé $H \hookrightarrow G$ est dit *normal* si $H(A)$ est normal dans $G(A)$ pour toute $\Bbbk$-algèbre A. On peut alors construire [Wat1, Chap. 16] le quotient $G \to G/H$ qui vérifie la propriété universelle usuelle des quotients[16]. Les applications quotients sont caractérisées comme les morphismes de schémas en groupes $G \to G'$ tels que $\Bbbk[G'] \to \Bbbk[G]$ est injective.

Exemple 5.12. Soit $r \geq 1$. Le morphisme $F^r : GL_n \to GL_n$ de l'exemple 5.2 est un morphisme quotient. On a donc $GL_n/(GL_n)_r \simeq GL_n$.

Exemple 5.13. [Wat1, 15.2] Soit $f : G \to Q$ un morphisme entre deux schémas en groupes lisses sur un corps $\Bbbk$. Alors f est un morphisme quotient si et seulement si $f : G(\overline{\Bbbk}) \to Q(\overline{\Bbbk})$ un morphisme surjectif. Cependant l'exemple 5.12 montre que le noyau de f n'est pas forcément lisse.

Si $1 \to H \to G \to G/H \to 1$ est une suite exacte courte de schémas en groupes, et M est un G-module, alors on a une action canonique de G/H sur M et une suite spectrale (cohomologique deuxième quadrant) de Hochschild-Serre [Jan, I.6.6]

$$E_2^{i,j}(M) : H^i(G, H^j(H,M)) \Rightarrow H^{i+j}(G,M) .$$

La suite spectrale est naturelle en M et compatible au cup produit. En particulier, si A est une algèbre différentielle graduée, alors la suite spectrale de Hochschild-Serre est une suite spectrale d'algèbres.

[16]Cependant, l'application canonique $G(A)/H(A) \to (G/H)(A)$ n'est pas un isomorphisme en général.

5.5 Schémas en groupes de Chevalley

5.5.1 Groupes algébriques affines réductifs

Soit $\overline{\mathbb{k}}$ un corps algébriquement clos. Un schéma en groupes G sur $\overline{\mathbb{k}}$ est *intègre* si son algèbre de coordonnées $\overline{\mathbb{k}}[G]$ est intègre. D'après [Hum, 7.3], les schémas en groupes intègres G sur $\overline{\mathbb{k}}$ s'identifient aux groupes algébriques affines $G(\overline{\mathbb{k}})$ connexes (pour la topologie de Zariski).

Un groupe algébrique affine connexe $G(\overline{\mathbb{k}})$ est *unipotent* s'il vérifie les conditions équivalentes [Hum, 17.4] suivantes.

i) Tous les éléments de $G(\overline{\mathbb{k}})$ sont unipotents.

ii) La seule représentation simple de G est la représentation triviale de dimension 1.

Un groupe algébrique affine connexe $G(\overline{\mathbb{k}})$ est *résoluble* s'il vérifie les conditions équivalentes [Hum, 19.3] suivantes

i) La série dérivée de $G(\overline{\mathbb{k}})$ finit sur le groupe trivial.

ii) Toutes les représentations simples de G sont de dimension 1.

Le groupe $G(\overline{\mathbb{k}})$ est *réductif* s'il ne contient pas de sous-groupe normal connexe unipotent. Un *tore maximal* de $G(\overline{\mathbb{k}})$ est un sous-groupe de la forme $\mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{k}})^{\times r}$, maximal pour l'inclusion parmi les sous-groupes de cette forme. Un sous-groupe de *Borel* de $G(\overline{\mathbb{k}})$ est un sous-groupe résoluble connexe, maximal parmi les sous-groupes de cette forme.

Exemple 5.14 (Groupes classiques)**.** Un groupe algébrique affine connexe admettant une représentation simple fidèle est réductif. En particulier, les groupes classiques $GL_n(\overline{\mathbb{k}})$, $SL_n(\overline{\mathbb{k}})$, $Sp_{2n}(\overline{\mathbb{k}})$, $SO_n(\overline{\mathbb{k}})$, (avec les précautions d'usage pour définir $SO_n(\overline{\mathbb{k}})$ en caractéristique 2 [Bor1, 23.6]) sont réductifs. Les sous-groupes des matrices diagonales forment dans chacun des cas un tore maximal, et les matrices triangulaires supérieures un sous-groupe de Borel.

Les groupes algébriques affines connexes réductifs sur un corps algébriquement clos ont été classifiés par Chevalley en termes de systèmes de racines, voir par exemple [Che2, Hum, Spr, Bor1]. On observe que les groupes classiques de l'exemple 5.14 peuvent être définis comme zéros de polynômes à coefficients entiers. Chevalley a en fait montré que c'est toujours le cas pour les groupes algébriques réductifs. Cette propriété est l'objet de la section suivante.

5.5.2 Schémas en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$.

Définition 5.15. [17] Un *schéma en groupes de Chevalley sur* $\mathbb{Z}$ un schéma en groupes G (algébriques affines, $\mathbb{Z}$-plat) satisfaisant les conditions suivantes.

[17] Cette définition correspond à la définition de schéma en groupes réductifs de [SGA3, XIX, 2.7] (compte tenu de [SGA3, XIX, 1.9, 2.1]).

(i) Pour tout corps algébriquement clos $\overline{\Bbbk}$, le schéma en groupes $G_{\overline{\Bbbk}}$ est intègre et réductif.

(ii) Le schéma en groupes G est déployé sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il existe un tore déployé $T \subset G$ tel que pour tout corps algébriquement clos $\overline{\Bbbk}$, $T_{\overline{\Bbbk}}$ est un tore maximal de $G_{\overline{\Bbbk}}$.

Exemple 5.16 (Schémas en groupes classiques)**.** Les schémas en groupes classiques GL_n, SL_n, Sp_{2n}, et SO_n[18] sont des schémas en groupes de Chevalley.

En fait les théorèmes d'existence [SGA3, XXV, 1.2] et d'unicité [SGA3, XXIII, 5.4] assurent que tout groupe algébrique affine $G(\overline{\Bbbk})$ connexe réductif sur un corps algébriquement clos $\overline{\Bbbk}$ est de la forme $G(\overline{\Bbbk})$ pour un unique schéma en groupes de Chevalley G sur $\mathbb{Z}$. Les schémas en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$ sont donc classifiés en termes de systèmes de racines. Dans la suite de cette section, nous rappelons quelques aspects fondamentaux de la théorie des représentations des schémas en groupes de Chevalley.

5.5.3 Groupes de Borel, bonnes filtrations et cohomologie

Soit G un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$, de tore maximal T de rang r. Le groupe de Borel est alors défini sur $\mathbb{Z}$. Il existe donc un schéma en groupes B avec $T \subset B \subset G$ et un morphisme $B \to T$ rétracte de l'inclusion $T \hookrightarrow B$, tel que pour tout corps $\overline{\Bbbk}$ algébriquement clos, $B(\overline{\Bbbk})$ est un sous-groupe de Borel de $G(\overline{\Bbbk})$.

Les *modules costandard* constituent une incarnation fondamentale des relations entre la théorie des représentations de G et celle de B. Pour tout anneau $\Bbbk$ et tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$, on note $\Bbbk_\lambda$ le $\Bbbk$-module libre de rang 1 muni de l'action de $T_\Bbbk$ donnée par $(a_1, \dots, a_r) \cdot x = a_1^{\lambda_1} \dots a_r^{\lambda_r} x$. On utilise la même notation pour le $B_\Bbbk$-module obtenu par restriction le long de $B_\Bbbk \to T_\Bbbk$. Le foncteur de restriction $G_\Bbbk$-Mod $\to B_\Bbbk$-Mod admet un adjoint à droite, le foncteur d'induction $\mathrm{ind}_{B_\Bbbk}^{G_\Bbbk} : B_\Bbbk\text{-Mod} \to G_\Bbbk\text{-Mod}$ [Jan, I.3]. Les modules costandard sont les $G_\Bbbk$-modules définis par

$$\nabla_\Bbbk(\lambda) = \mathrm{ind}_{B_\Bbbk}^{G_\Bbbk}(\Bbbk_\lambda) = \mathrm{ind}_B^G(\mathbb{Z}_\lambda) \otimes_\mathbb{Z} \Bbbk \; .$$

Les modules costandard sont noté $H^0_\Bbbk(\lambda)$ dans [Jan]. Ces modules sont fondamentaux pour la théorie des représentations de G. Nous rappelons quelques-unes de leurs propriétés [Jan, II.2, II.4 et II.B].

[18] Soit q_n la forme quadratique standard sur $\mathbb{Z}^n$, i.e. $q_{1+2m} = x_0^2 + \sum_{i=1}^m x_i x_{i+m}$ et $q_{2m} = \sum_{i=1}^m x_i x_{i+m}$. Soit O_n le sous-schéma en groupes de GL_n préservant q_n. On définit [Con, C.2.9] SO_{1+2m} comme noyau du déterminant $\det : O_{1+2m} \to \mathbb{G}_m$ et SO_{2m} comme noyau de l'invariant de Dickson $D : O_{2m} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le schéma en groupes SO_{2m} est contenu dans le noyau du déterminant, mais il est plus petit. On a $O_{1+2m} = SO_{1+2m} \times \mu_2$ et une suite exacte courte $1 \to SO_{2m} \to O_{2m} \to Z/2\mathbb{Z} \to 1$.

1. Les modules costandard sont libres de rang fini sur $\Bbbk$. Les $\lambda \in \mathbb{Z}^r$ pour lesquels $\nabla_{\Bbbk}(\lambda) \neq 0$ sont les *poids dominants de G*. Le n-uplet nul est toujours un poids dominant, et le module costandard correspondant est la représentation triviale de dimension 1.
2. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle, $G_{\Bbbk}$-Mod est une catégorie semi-simple, et les $\nabla_{\Bbbk}(\lambda)$ indexés par les poids dominants forment une famille de représentants des classes d'isomorphismes de modules simples. Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique $p > 0$, les $\nabla_{\Bbbk}(\lambda)$ ont un socle simple, et font partie d'une structure de catégorie de plus haut poids comme décrite à la section 4.2.4 (en particulier les $L_\lambda := \mathrm{soc}\nabla_{\Bbbk}(\lambda)$ forment une famille de représentants des $G_{\Bbbk}$-modules simples, qui sont donc définis sur le corps premier $\mathbb{F}_p$).
3. Pour tout poids dominant λ on a $H^i(G_{\Bbbk}, \nabla_{\Bbbk}(\lambda)) = 0$ en degré $i > 0$. En particulier $H^{>0}(G_{\Bbbk}, \Bbbk) = 0$.

Un $G_{\Bbbk}$-module M a une *bonne filtration* s'il admet un filtration croissante dont le gradué associé est un somme directe de modules costandard. En particulier, les modules avec bonne filtration n'ont pas de cohomologie en degré supérieur. Un résultat de Mathieu [Mat] donne la propriété fondamentale suivante[19].

4. Si M et N admettent une bonne filtration, le produit tensoriel $M \otimes N$ admet une bonne filtration.

Les liens entre la théorie des représentations de B et de G permettent également de montrer [Jan, II.B.5] que pour tout G-module M libre de type fini sur $\mathbb{Z}$, les groupes de cohomologie $H^i(G, M)$ sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini. Ce résultat permet d'utiliser efficacement les théorèmes de changement de base sous la forme du lemme suivant.

Lemme 5.17. *Soit G un schéma en groupes de Chevalley. Pour tout G-module M libre de type fini sur $\mathbb{Z}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $i > 0$, $H^i(G, M) = 0$.*
2. *Pour tout $i > 0$ et tout nombre premier p, $H^i(G_{\mathbb{F}_p}, M \otimes \mathbb{F}_p) = 0$.*
3. *Pour tout $i > 0$ et tout anneau commutatif $\Bbbk$, $H^i(G_{\Bbbk}, M \otimes \Bbbk) = 0$.*

5.5.4 Théorie des invariants

Soit G est un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$ et $\Bbbk$ un anneau commutatif et A une $\Bbbk G_{\Bbbk}$ algèbre commutative de type fini (c'est à dire une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini, munie d'une action de $G_{\Bbbk}$ par automorphismes d'algèbres). Les invariants de A sous l'action de $G_{\Bbbk}$ forment une sous-algèbre $A^{G_{\Bbbk}} \subset A$. Le théorème suivant est un théorème fondamental de

[19]Le résultat de Mathieu concerne les corps de caractéristique non nulle, mais il s'étend sur un anneau quelconque par changement de base [Jan, II.B].

la théorie des invariants. Sur un corps de caractéristique zéro, il découle des méthodes d'algèbre introduites par Hilbert à la fin du XIXème siècle. Sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique non nulle, c'est une conjecture de Mumford, résolue positivement par Haboush [Hab]. Le résultat a été ensuite étendu à des anneaux $\Bbbk$ de Dedekind par les travaux de Thomason et Seshadri. Le résultat le plus général est un théorème de Franjou et van der Kallen.

Théorème 5.18. *[FvdK] Soit G est un schéma en groupes de Chevalley, $\Bbbk$ un anneau noethérien, et A une $\Bbbk G_\Bbbk$ algèbre commutative de type fini. L'algèbre des invariants $A^{G_\Bbbk}$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.*

Cette propriété d'engendrement fini des invariants est bien sûr fausse si G n'est pas un schéma en groupes de Chevalley (même si $\Bbbk$ est un corps, même en caractéristique nulle) comme le montre le contre-exemple de Nagata [Nag].

5.5.5 Torsion de Frobenius et groupes de Lie finis

Les groupes des $\mathbb{F}_q$-points $G(\mathbb{F}_q)$ des groupes de Chevalley sont souvent appelés groupes de Lie finis. Ces groupes sont essentiels en théorie des groupes finis - ils fournissent notamment des familles de groupes finis simples (voir par exemple [Wils]). Les relations entre la théorie des représentations du schéma en groupes $G_{\mathbb{F}_p}$ et celle des groupes de Lie finis $G(\mathbb{F}_q)$ sont nombreuses (voir par exemple [Hum2]). Nous décrivons maintenant le théorème de Cline Parshall Scott et van der Kallen [CPSvdK] reliant la cohomologie des schémas en groupes de Chevalley et celle des groupes de Lie finis associés, qui motive certains travaux présentés dans ce mémoire.

Soit $G_{\mathbb{F}_p}$ un schéma en groupes sur $\mathbb{F}_p$ et $G_\Bbbk = (G_{\mathbb{F}_p})_\Bbbk$ le schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique p obtenu par changement de base. Si (M, ρ_M) est un $G_\Bbbk$-module, on dispose de deux manières de modifier M à l'aide de la torsion de Frobenius.

1. **Torsion de Frobenius à la source $M^{[r]}$.** On a un morphisme de $\mathbb{F}_p$-algèbres $\mathbb{F}_p[G_{\mathbb{F}_p}] \to \mathbb{F}_p[G_{\mathbb{F}_p}]$, $x \mapsto x^{p^r}$, duquel on déduit un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $\Bbbk[G_\Bbbk] \to \Bbbk[G_\Bbbk]$ en tensorisant par $\Bbbk$. Ce morphisme d'algèbres est équivalent à un morphisme de schéma en groupes :

$$F^r : G_\Bbbk \to G_\Bbbk \ .$$

Si $G_{\mathbb{F}_p}$ est un sous-schéma de $GL_{n,\mathbb{F}_p}$, on peut interpréter les éléments de $G_\Bbbk(A)$ comme des matrices et on a $F^r([a_{ij}]) = [a_{ij}^{p^r}]$. On note $M^{[r]}$ le $\Bbbk$-espace vectoriel M, muni de l'action $\rho_{M^{[r]}} = \rho_M \circ F^r$. Pour tout $r, s \geq 0$ on a $(M^{[r]})^{[s]} = M^{[r+s]}$.

2. **Torsion de Frobenius au but $M^{(r)}$.** Si V est un $\Bbbk$-espace vectoriel, on définit le $\Bbbk$-espace vectoriel $V^{(r)}$ par changement de base le long du morphisme de Frobenius $x \mapsto x^{p^r}$ comme à l'exemple 4.5. Si A

est une $\Bbbk$-algèbre alors $A^{(r)}$ est une $\Bbbk$-algèbre et l'élévation à la puissance p^r-ième induit un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $A^{(r)} \to A$. On a une transformation naturelle de foncteurs en groupes

$$F^r : GL_M \to GL_{M^{(r)}}$$

définie de la manière suivante. Pour toute $\Bbbk$-algèbre A, F^r envoie un élément inversible $f \in \mathrm{End}_A(M \otimes A)$ sur l'élément inversible

$$f^{(r)} \otimes 1 \in \mathrm{End}_A((M \otimes A)^{(r)} \otimes_{A^{(r)}} A) = \mathrm{End}_A(M^{(r)} \otimes A) \; .$$

Le $\Bbbk$-espace vectoriel $M^{(r)}$ est muni de l'action $\rho_{M^{(r)}} = F^r \circ \rho_M$. Pour tout $r, s \geq 0$ on a $(M^{(r)})^{(s)} = M^{(r+s)}$.

Si $\Bbbk = \mathbb{F}_p$, les deux constructions ci-dessus coïncident, i.e. $M^{[r]} = M^{(r)}$ pour tout $r \geq 0$, mais ce n'est pas le cas en général. Le foncteur $M \mapsto M^{[1]}$ est exact, il induit donc pour tout i un morphisme :

$$\mathrm{Ext}^i_{G_\Bbbk}(M^{[r]}, N^{[r]}) \to \mathrm{Ext}^i_{G_\Bbbk}(M^{[r+1]}, N^{[r+1]}) \; . \tag{5.6}$$

Si G est un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$ alors le morphisme 5.6 est injectif [CPS], [Jan, I.9.10], et la valeur limite $\lim_r \mathrm{Ext}^i_{G_\Bbbk}(M^{[r]}, N^{[r]})$ est reliée à la cohomologie des groupes de Lie finis. De façon plus précise, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p le foncteur d'oubli :

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{F}_p}-\mathrm{Mod} & \to & G(\mathbb{F}_q)-\mathrm{Mod} \\ M & \mapsto & M \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \end{array}$$

est exact, et envoie le G-module $M^{[r]}$ sur le $G(\mathbb{F}_q)$-module M si $q|p^r$ (car le morphisme de groupes finis $F^r : G_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q) \to G_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q)$ est égal à l'identité). Si $q|p^r$, le foncteur d'oubli induit donc un morphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire

$$\mathrm{Ext}^i_{G_{\mathbb{F}_p}}(M^{[r]}, N^{[r]}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \to \mathrm{Ext}^i_{G_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_q)}(M \otimes \mathbb{F}_q, N \otimes \mathbb{F}_q) \; . \tag{5.7}$$

Le résultat principal de [CPSvdK] montre que si r et q sont assez grand (par rapport à i et à des constantes explicites qui dépendent du groupe G et des représentations N et M) le morphisme (5.6) est un isomorphisme (phénomène de stabilisation cohomologique) et que dans ce cas le morphisme (5.7) est un isomorphisme.

6 Foncteurs strictement polynomiaux

Des expositions de la théorie des foncteurs strictement polynomiaux sont disponibles par exemple dans [FS, SFB, Pir, Kra]. Le but de la présente section est de présenter la notion de foncteur strictement polynomial dans un cadre plus général et de manière plus exhaustive, en nous appuyant sur la notion de loi polynôme due à Roby [Rob].

Dans les sections 6.1 à 6.4 nous exposons les deux points de vue classiques sur les foncteurs strictement polynomiaux $\mathcal{C} \to \Bbbk\text{-Mod}$: foncteurs avec changement de base à la Friedlander et Suslin, et foncteurs définis sur les puissances divisées d'une catégorie à la Bousfield. La catégorie $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ des foncteurs strictement polynomiaux est introduite à la définition 6.9. Friedlander et Suslin considèrent seulement la sous-catégorie $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$ des foncteurs de poids borné. Le principal écueil pour définir la « bonne » catégorie $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ est mentionné à la remarque 6.11. Dans les sections 6.5 et 6.6, nous rappelons les structures et les techniques de calcul standard pour les catégories de foncteurs, que nous énonçons dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux. Enfin dans la section 6.7, nous introduisons ce que nous appellerons « cohomologie des foncteurs » dans la suite du mémoire.

Nous fixons pour le reste de la section un **anneau commutatif** $\Bbbk$. Sauf mention explicite du contraire, les produits tensoriels sont pris sur $\Bbbk$.

6.1 Définitions et exemples

Rappelons tout d'abord une définition due à Roby [Rob]. Si M et N ont deux $\Bbbk$-modules, une *loi polynôme* $f : M \to N$ est la donnée pour toute $\Bbbk$-algèbre commutative A d'une application d'ensembles $f_A : M \otimes A \to N \otimes A$ telle que pour tout morphisme d'algèbres $u : A \to B$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "M\otimes u"] & N \otimes A \arrow[d, "N\otimes u"] \\ M \otimes B \arrow[r, "f_B"] & N \otimes B \end{tikzcd} .$$

Par exemple, une application $\Bbbk$-linéaire $f : M \to N$ détermine une loi polynôme en posant $f_A = f \otimes A$. La composition de lois polynômes est définie de manière évidente.

Définition 6.1. [FS] Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories $\Bbbk$-linéaires (c'est à dire des catégories dont les ensembles de morphismes sont munis d'une structure de $\Bbbk$-module, telle que la composition est $\Bbbk$-bilinéaire). Un foncteur strictement polynomial $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de :

(1) pour tout objet X de $\mathcal{C}$, un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$,

(2) pour tout couple d'objets X, Y, une loi polynomiale

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \;,$$

telles que les conditions suivantes soient satisfaites.

(i) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $(F_{X,X})_{\Bbbk}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

(ii) Pour tout triplet d'objet X, Y, Z de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant de loi polynômes commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F_{X,Y}\otimes F_{Y,Z}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[d, "F_{X,Z}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(Z)) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Z))
\end{tikzcd} .$$

Un morphisme de foncteurs strictement polynomiaux $f : F \to G$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $f_X : F(X) \to G(X)$, telles que le diagramme suivant de loi polynômes commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "G_{X,Y}"] \arrow[d, "F_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y)) \arrow[d, "-\circ f_X"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \arrow[r, "f_Y\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(Y))
\end{tikzcd} .$$

Une loi polynôme $f : M \to N$ est dite *homogène de poids* d si pour tout $m \in M$ et tout $a \in A$ on a $f(m \otimes a) = a^d f(m \otimes 1)$. Une loi polynôme est *de poids inférieur ou égal à* d si on peut l'exprimer comme la somme de lois polynômes homogènes de poids inférieur ou égal à d. Ces lois polynômes homogènes sont alors uniquement déterminées [Rob, Prop. I.4].

Définition 6.2. Un foncteur strictement polynomial F est homogène de poids d, resp. de poids inférieur ou égal à d si les loi polynômes $F_{X,Y}$ le sont. Il est de poids fini s'il est de poids inférieur ou égal à d pour un certain d.

Par exemple, les foncteurs strictement polynomiaux homogènes de poids 0 s'identifient aux foncteurs constants au sens usuel, et les foncteurs strictement polynomiaux homogènes de poids 1 s'identifient aux foncteurs $\Bbbk$-linéaires au sens usuel[20].

Si F est un foncteur strictement polynomial, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, la composée suivante définit une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $F(X)$:

$$\mathbb{G}_m(A) \xrightarrow{(a)} \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)\otimes A \xrightarrow{(F_{X,X})_A} \mathrm{End}_{\Bbbk}(F(X))\otimes A \xrightarrow{(b)} \mathrm{End}_A(F(X)\otimes A) \;. \tag{6.1}$$

[20]Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit $\Bbbk$-linéaire si son action sur les morphismes $f \mapsto F(f)$ est $\Bbbk$-linéaire. Les lois polynômes du foncteur strictement polynomial qui correspond à F sont alors données par $(F_{X,Y})_A(f \otimes a) = F(f) \otimes a$.

Dans cette composée, la transformation naturelle (a) envoie $\lambda \in \mathbb{G}_m(A) = A^\times$ sur $\mathrm{Id}_X \otimes \lambda$ et la transformation naturelle (b) provient de l'extension des scalaires. Comme les représentations de $\mathbb{G}_m$ sont semi-simples, on a une décomposition en sous-espaces de poids

$$F(X) = \bigoplus_{d \geq 0} F(X)_d \ ,$$

et une projection canonique

$$\pi_d : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X), F(Y)) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X)_d, F(Y)_d) \ .$$

Définition 6.3. On appelle composante homogène de poids d de F le foncteur F_d défini par $F_d(X) := F(X)_d$ et $(F_d)_{X,Y} := \pi_d \circ F_{X,Y}$

Exemple 6.4 (Foncteurs $\otimes^d$, S^d, Λ^d, Γ^d)**.** Prenons pour catégorie $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathrm{P}_{\Bbbk}$ des modules projectifs de type fini sur $\Bbbk$. Si M et N sont des modules projectifs de type fini sur $\Bbbk$ l'extension des scalaires fournit un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N) \otimes A \simeq \mathrm{Hom}_A(M \otimes A, N \otimes A)$. Notons $E^d(M)$ la d-ième puissance tensorielle, ou extérieure, ou symétrique ou divisée de M, c'est à dire l'un des $\Bbbk$-modules $M^{\otimes d}$, $\Lambda^d(M)$, $S^d(M) = (M^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d}$, ou $\Gamma^d(M) = (M^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$. Si M est un $\Bbbk$-module projectif de type fini on a un isomorphisme canonique : $E^d(M) \otimes A \simeq E^d_A(M \otimes A)$. On peut donc définir un foncteur strictement polynomial homogène de poids d :

$$E^d : \mathrm{P}_{\Bbbk} \to \Bbbk\text{-Mod} \ .$$

Pour être plus précis, la loi polynôme $E^d_{M,N}$ est induite par l'application

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M \otimes A, N \otimes A) \xrightarrow{E^d_A} \mathrm{Hom}_A(E^d_A(M \otimes A), E^d_A(N \otimes A))$$

dont la source s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N) \otimes A$ et dont le but s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(E^d(M), E^d(N)) \otimes A$.

Exemple 6.5 (Composition)**.** Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ des foncteurs strictement polynomiaux. On note $G \circ F$, ou parfois GF pour alléger l'écriture, le foncteur strictement polynomial tel que $(G \circ F)(X) = G(F(X))$ et $(G \circ F)_{X,Y} = G_{F(Y),F(X)} \circ F_{X,Y}$. Si F et G sont homogènes de poids d et e, alors $G \circ F$ est homogène de poids de.

Exemple 6.6 (Foncteur Λ)**.** Prenons $\mathcal{C} = \mathrm{P}_{\Bbbk}$. L'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ d'un $\Bbbk$-module projectif de type fini est un $\Bbbk$-module projectif *de type fini*. On a donc un isomorphisme canonique entre $\mathrm{Hom}_A(\Lambda_A(M \otimes A), \Lambda_A(N \otimes A))$ et $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Lambda(M), \Lambda(N)) \otimes A$. On peut donc définir un foncteur strictement polynomial

$$\Lambda : \mathrm{P}_{\Bbbk} \to \Bbbk\text{-Mod} \ ,$$

dont la loi polynôme $\Lambda_{M,N}$ est induite par l'application

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M\otimes A, N\otimes A) \xrightarrow{\Lambda_A} \mathrm{Hom}_A(\Lambda_A(M\otimes A), \Lambda_A(N\otimes A))\ .$$

Les composantes homogènes de poids d de ce foncteur strictement polynomial sont les foncteurs Λ^d définis précédemment.

Remarque 6.7 (Foncteur S)**.** Prenons encore $\mathcal{C} = \mathrm{P}_{\Bbbk}$. Si M est un module projectif de type fini, l'algèbre symétrique $S(M)$ n'est pas de type fini. En conséquence le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S(M), S(N))\otimes A \to \mathrm{Hom}_A(S_A(M\otimes A), S_A(N\otimes A))$$

n'est pas un isomorphisme pour tout A, si bien que l'on ne peut pas définir une structure de foncteur strictement polynomial sur S en suivant la démarche de l'exemple précédent. En fait, il est impossible de faire de S un foncteur strictement polynomial au sens de la définition 6.1, car cela contredirait le fait que les lois polynômes sont localement finies [Rob, Prop I.4].

Un multifoncteur strictement polynomial est un foncteur strictement polynomial au sens de la définition 6.1 dont la source est un produit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n$ de catégories $\Bbbk$-linéaires. Un multifoncteur strictement polynomial $F : \mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ est *multihomogène de poids* $(d_1,\dots,d_n)$ si ses lois polynômes $F_{X,Y}$ sont multihomogènes de poids $(d_1,\dots,d_n)$ au sens de [Rob, Sec. I.9]. De manière équivalente, F est multihomogène de poids $(d_1,\dots,d_n)$ si pour tout objet $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathcal{C}$ et tout i le foncteur strictement polynomial de source $\mathcal{C}_i$:

$$Y \mapsto F(X_1,\dots,X_{i-1},Y,X_{i+1},\dots,X_n)$$

est homogène de poids d_i. On définit les composantes multihomogènes d'un multifoncteur strictement polynomial de façon analogue à la définition 6.3. On remarque que si $F : \mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ est multihomogène de poids $(d_1,\dots,d_n)$, alors il est homogène de poids total $d = \sum d_i$ si on le considère comme un foncteur à une variable comme dans la définition 6.2.

Par exemple, les foncteurs strictement polynomiaux multihomogènes $\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ de poids $(1,\dots,1)$ s'identifient aux foncteurs usuels $\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$ qui sont $\Bbbk$-linéaires en chaque variable.

Exemple 6.8 (Produit externe $F\boxtimes G$, Hom externe $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)$)**.** Si $F : \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-Mod}$ et $G : \mathcal{D} \to \Bbbk\text{-Mod}$ sont deux foncteurs strictement polynomiaux on définit un bifoncteur strictement polynomial $F\boxtimes G : \mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \Bbbk\text{-Mod}$ avec $(F\boxtimes G)(X,X') = F(X)\otimes G(X')$ et la loi polynôme $(F\boxtimes G)_{(X,X'),(Y,Y')}$ est donnée par l'application composée (où la flèche (a) est l'application canonique induite par le produit tensoriel)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X',Y') &\xrightarrow{F_{X,Y}\times G_{X',Y'}} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X),F(Y))\\ &\times\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(G(X'),G(Y')) \xrightarrow{(a)} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X)\otimes G(X'), F(Y)\otimes G(Y'))\ .\end{aligned}$$

Si F est homogène de poids d et G est homogène de poids e, alors $F \boxtimes G$ est bihomogène de poids (d,e). On définit de même un bifoncteur strictement polynomial $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \Bbbk\text{-Mod}$ bihomogène de poids (d,e) tel que $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X),G(Y))$.

6.2 Catégories de foncteurs strictement polynomiaux

Définition 6.9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $\Bbbk$-linéaire essentiellement petite[21]. On note $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$ (resp. $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$) la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux $\mathcal{C} \to \Bbbk$-Mod de poids borné (resp. homogènes de poids d) et des morphismes de foncteurs strictement polynomiaux. On définit la catégorie $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ des foncteurs strictement polynomiaux[22] comme produit des catégories de foncteurs homogènes de poids d

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}} := \prod_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}\ . \tag{6.2}$$

Les catégories $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$, et $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ sont abéliennes. Les opérations de somme, noyau, conoyau, produit sont calculées dans la catégorie but. Par exemple le noyau d'un morphisme $\phi : F \to G$ est le foncteur $\mathrm{Ker}\phi$ défini par $(\mathrm{Ker}\phi)(X) := \mathrm{Ker}(\phi_X)$ et la loi polynôme $(\mathrm{Ker}\phi)_{X,Y}$ est l'unique[23] loi polynôme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Ker}\phi_X, \mathrm{Ker}\phi_Y) \arrow[d, hook] \ . \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "F_{X,Y}"'] \arrow[urr, dashed, "(\mathrm{Ker}\phi)_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(X),F(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{Ker}\phi_X, F(Y)) \end{tikzcd}$$

Si F est un foncteur homogène de poids borné, il se décompose comme la somme directe finie de ses composantes homogènes de poids d. De plus, tout morphisme de foncteurs strictement polynomiaux préserve l'action (6.1) de $\mathbb{G}_m$, donc les poids. On a donc des décompositions en somme directe[24] :

$$\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}\ . \tag{6.3}$$

[21] L'hypothèse que $\mathcal{C}$ est essentiellement petite garantit que les morphismes entre deux foncteurs strictement polynomiaux forment un ensemble.

[22] La remarque 6.11 explique pourquoi la dénomination 'foncteurs strictement polynomiaux' est abusive pour les objets de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Il conviendrait de les appeler plutôt foncteurs strictement analytiques, mais nous avons conservé dans ce mémoire le terme foncteur strictement polynomial pour insister sur le peu de différence entre les catégories $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$.

[23] Notons $\mathfrak{P}(M,N)$ le $\Bbbk$-module des lois polynômes de M vers N. Si M est un $\Bbbk$-module et $0 \to N' \to N \to N''$ est exacte, alors la suite $0 \to \mathfrak{P}(M,N') \to \mathfrak{P}(M,N) \to \mathfrak{P}(M,N'')$ est exacte.

[24] La somme directe $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ est la sous-catégorie pleine de $\prod_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ dont les objets sont les familles de foncteurs homogènes qui sont tous nuls sauf un nombre fini.

En particulier, on a des foncteurs d'inclusion exacts et pleinement fidèles :

$$\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}} .$$

L'image d'un objet F_d de $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$ ou $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ sera encore notée F_d. De même l'image d'un foncteur strictement polynomial F de poids borné dans $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ sera encore notée F.

Remarque 6.10. Si $F = (F_d)_{d\geq 0}$ un objet de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$, les foncteurs F_d sont appelées les composantes homogènes de poids d de F. On observe que F est à la fois le produit catégorique des F_d et le coproduit catégorique des F_d. On écrira cependant plus volontiers $F = \bigoplus_{d\geq 0} F_d$, pour coller avec la description des représentations polynomiales de la section 4.1.2 et des foncteurs strictement polynomiaux de la section 4.1.4. Cette notation suggère aussi que le foncteur d'oubli $\mathcal{U}$ de la section 6.3, ainsi que les foncteurs d'évaluation de la section 7.1.3, commutent aux colimites.

Nous expliquerons à la section 6.4 que les catégories $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ ont assez de projectifs et d'injectifs. Les décompositions (6.2) et (6.3) impliquent alors formellement que les catégories $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ ont également assez d'injectifs et de projectifs, et que les foncteurs d'inclusion ci-dessus préservent les Ext.

Remarque 6.11. On pourrait considérer la catégorie Pol dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux au sens de la définition 6.1. Elle est abélienne et on a des foncteurs exacts et pleinement fidèles

$$\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}} \hookrightarrow \mathrm{Pol} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{C}} .$$

Aucune de ces inclusions n'est essentiellement surjective. Par exemple, le foncteur strictement polynomial Λ de l'exemple 6.6 n'est pas de degré borné, et la famille des puissances symétriques définit un objet de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ dont on ne peut pas faire un foncteur strictement polynomial au sens de la définition 6.1, comme on l'explique dans la remarque 6.7. La catégorie Pol est donc située strictement entre les catégories $\mathcal{P}_{<\infty,\mathcal{C}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Bien que la catégorie Pol est très naturelle, nous ne l'utilisons pas car elle présente certaines pathologies. Par exemple, on peut montrer que le foncteur Λ ne possède ni résolution injective ni résolution projective dans cette catégorie.

Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ est un produit fini de catégories $\Bbbk$-linéaires, on peut considérer les objets de $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ comme des multifoncteurs. On note alors $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n}$ la catégorie des multifoncteurs multihomogènes de poids $(d_1,\dots,d_n)$. C'est une sous-catégorie abélienne pleine de $\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ et on a une décomposition où la somme est prise sur tout les n-uplets d'entiers positifs $(d_1,\dots,d_n)$ de poids $\sum d_i = d$:

$$\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n} = \bigoplus_{(d_1,\dots,d_n)} \mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n} . \tag{6.4}$$

6.3 Le foncteur d'oubli

Notons $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ le catégorie des foncteurs (au sens usuel) $\mathcal{C} \to \Bbbk$-Mod et des transformations naturelles. (les noyaux, conoyaux, produits, sommes sont calculés au but). On a un foncteur d'oubli exact et fidèle :

$$\mathcal{U} : \mathcal{P}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \ . \tag{6.5}$$

De façon précise, si on note F_d la composante homogène de poids d d'un foncteur strictement polynomial F, alors $\mathcal{U}F(X) := \bigoplus_{d\geq 0} F_d(X)$ et l'action de $\mathcal{U}F$ sur les morphismes est donné par $\mathcal{U}F(f) := \bigoplus (F_{d\,X,Y})_{\Bbbk}(f)$.

Remarque 6.12. Si $\Bbbk$ est un corps infini, une loi polynôme $f : M \to N$ est complètement déterminée par l'application $f_{\Bbbk} : M \otimes \Bbbk \to N \otimes \Bbbk$ [Rob, Prop I.8]. Il en résulte que le foncteur d'oubli (6.5) est pleinement fidèle et on peut donc identifier la catégorie $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ à une sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$, comme nous l'avons fait dans la section 4. On ne peut pas faire cette identification en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6.13 (Foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$)**.** Soit $\Bbbk$ un anneau de caractéristique première $p > 0$, et $\mathcal{C} = \mathrm{P}_{\Bbbk} = \mathcal{V}_{\Bbbk}^f$ la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit r un entier positif. Le r-ième foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ est le noyau de l'application induite par la comultiplication de l'algèbre symétrique :

$$S^{p^r} \to \bigoplus_{d=1}^{p^r-1} S^d \otimes S^{p^r-d} \ .$$

Si $r = 0$, le foncteur $I^{(0)} = S^1 = \Lambda^1 = \Gamma^1 = \otimes^1$ sera plus simplement noté I. Le r-ième foncteur de torsion de Frobenius est un foncteur strictement polynomial homogène de poids p^r. Si $\Bbbk = \mathbb{F}_p$, le foncteur oubli envoie tous les foncteurs $I^{(r)}$ sur des foncteurs isomorphes dans $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$. Pourtant ces foncteurs ne sont pas isomorphes dans $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ car ils n'ont pas le même poids.

Les propriétés du foncteur d'oubli sont mal comprises en général. L'exemple 6.13 suggère immédiatement le problème suivant, sur lequel on ne dispose que de peu d'informations.

Problème 6.14. *Donner des conditions sur un foncteur $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ pour qu'il soit dans l'image du foncteur d'oubli, et le cas échéant, classifier les antécédents de F par le foncteur d'oubli.*

Les propriétés homologiques du foncteur d'oubli sont également mystérieuses. Plus précisément, soient F et G des foncteurs strictement polynomiaux de poids inférieur ou égal à d (dont on note encore F, G les images par le foncteur oubli). Alors le foncteur d'oubli induit un morphisme gradué :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathcal{C}}}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{\mathcal{C}}}(F,G) \ . \tag{6.6}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{C} = \mathcal{V}_{\Bbbk}^f$ et $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments, les résultats de [FFSS] décrivent les effets du foncteur oubli sur les Ext. Plus précisément, le morphisme (6.6) est toujours injectif, et son conoyau est bien compris. En particulier, notons $F^{(r)}$ le foncteur composé $F \circ I^{(r)}$. Si $d \leq q$ et r est suffisament grand par rapport à i et $p^r|q$, alors le morphisme suivant est un isomorphisme [FFSS, Thm 3.10 et Lm 3.11].

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_\mathcal{C}}(F^{(r)}, G^{(r)}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_\mathcal{C}}(F^{(r)}, G^{(r)}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}_\mathcal{C}}(F, G) \;.$$

En dehors du cas particulier $\mathcal{C} = \mathcal{V}_{\Bbbk}^f$ et $\Bbbk$ est un corps fini, on ne connaît pratiquement rien sur les propriétés homologiques du foncteur d'oubli, et le problème suivant est ouvert.

Problème 6.15. *Soient F et G des foncteurs strictement polynomiaux. Peut-on calculer simplement les extensions entre F et G dans $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ à partir de la donnée d'extensions dans $\mathcal{P}_\mathcal{C}$?*

6.4 Foncteurs (multi)homogènes à la Bousfield

Soit M un module sur l'anneau commutatif $\Bbbk$. L'algèbre à puissances divisées $\Gamma(M)$ est définie [Rob, III] comme l'algèbre commutative engendrée par les symboles $\gamma_s(m)$, pour $s \geq 0$ et $m \in M$ soumis aux relation suivantes pour tous $x, y \in M$ et tous $s, t, n \geq 0$ et tout $\lambda \in \Bbbk$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0(x) = 1 \qquad x \neq 0\;,\\
&\gamma_s(x)\gamma_t(x) = \binom{s+t}{s}\gamma_{s+t}(x)\;,\\
&\gamma_n(x+y) = \sum_{s+t=n} \gamma_s(x)\gamma_t(y),\ n \geq 1\;,\\
&\gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x),\ n \geq 1\;.
\end{aligned}$$

Si on décrète qu'un générateur $\gamma_s(m)$ est de poids s, alors les relations ci-dessus sont homogènes. L'algèbre $\Gamma(M)$ est donc graduée par le poids, et on note $\Gamma^d(M)$ sa composante homogène de poids d. Si M, N sont deux $\Bbbk$-modules, la multiplication induit un isomorphisme d'algèbres $\Gamma(M) \otimes \Gamma(N) \simeq \Gamma(M \oplus N)$ [Rob, III.4]. On obtient une structure d'algèbre de Hopf commutative et cocommutative sur $\Gamma(M)$ en la munissant du coproduit défini par la composée suivante (où $\delta : M \to M \oplus M$, $x \mapsto (x, x)$)

$$\Gamma_{\Bbbk}(M) \xrightarrow{\Gamma(\delta)} \Gamma(M \oplus M) \simeq \Gamma(M) \otimes \Gamma(M)\;.$$

Lorsque M est un $\Bbbk$-module projectif, l'algèbre $\Gamma(M)$ admet une autre description. Notons $T'M$ la $\Bbbk$-algèbre de Hopf commutative constituée du $\Bbbk$-espace vectoriel $\bigoplus_{d\geq 0} M^{\otimes d}$ muni du produit de battage et du coproduit de déconcaténation. L'algèbre de Hopf $T'M$ possède une graduation par le poids, si on met $M^{\otimes d}$ en poids d. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit sur chaque composante homogène de poids d. Il est démontré dans [Rob, Prop. IV.5] que si M est un $\Bbbk$-module projectif, l'algèbre $\Gamma(M)$ s'identifie (comme algèbre de Hopf et naturellement en M) à la sous-algèbre de $T'M$ constituée des combinaisons linéaires d'éléments homogènes invariants sous l'action des groupes symétriques.

Les lois polynômes sont intimement liées aux algèbres à puissances divisées. En effet, pour tout $\Bbbk$-module M et toute $\Bbbk$-algèbre A on définit une loi polynôme γ_d homogène de poids d par :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{d,A}: & M \otimes A & \to & \Gamma^d(M) \otimes A \\ & m \otimes a & \mapsto & \gamma_d(m) \otimes a^d \end{array} .$$

Notons $\mathfrak{P}_{d_1,\dots,d_n}(M_1 \times \cdots \times M_n, N)$ le $\Bbbk$-module des lois polynômes multihomogènes de poids $(d_1, \dots, d_n)$, et $\pi : \prod \Gamma^{d_i}(M_i) \twoheadrightarrow \bigotimes \Gamma^{d_i}(M_i)$ l'application n-multilinéaire universelle. On a alors un isomorphisme [Rob, Thm IV.1 et Prop IV.9] :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Gamma^{d_1}(M_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma^{d_n}(M_n), N) & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{P}_{d_1,\dots,d_n}(M_1 \times \cdots \times M_n, N) \\ f & \mapsto & f \circ \pi \circ (\gamma_{d_1} \times \cdots \times \gamma_{d_n}) \end{array} . \tag{6.7}$$

Exemple 6.16. La composée $M \times N \twoheadrightarrow M \otimes N \xrightarrow{\gamma_d} \Gamma^d(M \otimes N)$ définit une loi polynôme bihomogène de poids (d, d). Par l'isomorphisme (6.7) il lui correspond une application $\Bbbk$-linéaire

$$\mu_{M,N} : \Gamma^d(M) \otimes \Gamma^d(N) \to \Gamma^d(M \otimes N) .$$

L'isomorphisme (6.7) caractérise $\mu_{M,N}$ comme le seul morphisme $\Bbbk$-linéaire qui envoie $\gamma_d(m) \otimes \gamma_d(n)$ sur $\gamma_d(m \otimes n)$ pour tout $(m, n) \in M \times N$. Il coïncide donc avec l'accouplement explicite donné dans [Bou, 2.2]. De plus, si M et N sont projectifs, on a $\Gamma^d(M) \simeq (M^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$, et la caractérisation montre que $\mu_{M,N}$ est égal à l'application de restriction

$$\Gamma^d(M) \otimes \Gamma^d(N) = (M^{\otimes d} \otimes N^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \hookrightarrow ((M \otimes N)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} = \Gamma^d(M \otimes N)$$

où l'on interprète le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ qui agit au but comme le sous-groupe des éléments (σ, σ) du produit $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ qui agit à la source. Enfin, à l'aide de l'isomorphisme (6.7) on peut vérifier sans calcul que les morphismes $\mu_{M,N}$ sont commutatifs et associatifs dans le sens évident.

A partir de l'isomorphisme (6.7), on peut facilement montrer que la définition des foncteurs strictement polynomiaux homogènes de Friedlander et Suslin est équivalente à la définition des foncteurs homogènes de Bousfield [Bou]. Plus précisément, soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ un produit de catégories

$\mathbb{k}$-linéaires essentiellement petites. On note $\Gamma^{d_1,\dots,d_n}(\mathcal{C})$ la catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$, dont les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{d_1,\dots,d_n}(\mathcal{C})}((X_i),(Y_i)) = \bigotimes_{i=1}^{n} \Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i,Y_i)) ,$$

et dont la loi de composition fait commuter le diagramme suivant, où le morphisme horizontal est induit par la composition dans $\mathcal{C}$ et le morphisme vertical est induit par le produit tensoriel des transformations naturelles μ_i définies dans l'exemple 6.16 :

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes \Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}(X_i,Y_i)) \otimes \bigotimes \Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}(Y_i,Z_i)) \arrow[d, "\otimes\mu_i"] \arrow[dr, "\circ"] & . \\
\bigotimes \Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}(X_i,Y_i) \otimes \mathrm{Hom}(Y_i,Z_i)) \arrow[r] & \bigotimes \Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}(X_i,Z_i)) .
\end{tikzcd}$$

La définition de multifoncteur homogène au sens de Friedlander et Suslin est alors équivalente à la définition suivante (cette observation est essentiellement due à T. Pirashvili [Pir]).

Définition 6.17. [Bou] Un foncteur strictement polynomial $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathbb{k}$-Mod multihomogène de poids $(d_1,\dots,d_n)$ est un foncteur $\mathbb{k}$-linéaire[25]

$$F : \Gamma^{d_1,\dots,d_n}(\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n) \to \mathbb{k}\text{-Mod} .$$

Un morphisme entre foncteurs strictement polynomiaux multihomogènes est une transformation naturelle.

On a un foncteur $\gamma_{d_1,\dots,d_n} : \mathcal{C} \to \Gamma^{d_1,\dots,d_n}(\mathcal{C})$ qui est l'identité sur les objets, et dont l'effet sur les morphismes est donné par $\gamma_{d_1,\dots,d_n}(f_1,\dots,f_n) = \otimes\gamma_{d_i}(f_i)$. Avec la définition des foncteurs multihomogènes à la Bousfield, le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,\mathcal{C}} \to \mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ s'identifie au foncteur de précomposition par $\gamma_{d_1,\dots,d_n}$.

6.5 Structure des catégories de foncteurs (multi)homogènes

Nous donnons maintenant la structure des catégories $\mathcal{P}_{d_1,\dots,d_n,\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n}$ de foncteurs strictement polynomiaux multihomogènes. L'avantage de la définition 6.17 est qu'elle permet d'interpréter ces catégories comme des catégories de foncteurs a sens usuel. Tous les résultats standard sur les catégories de foncteurs s'appliquent donc. Nous donnons maintenant une liste de ces résultats, que nous énonçons dans notre cadre. Pour raccourcir les notations, le n-uplet $(d_1,\dots,d_n)$ est simplement noté $\mathbf{d}$, et la catégorie produit $\mathcal{C}_1\times\cdots\times\mathcal{C}_n$ est simplement notée $\mathcal{C}$.

[25] Un foncteur F est $\mathbb{k}$-linéaire si sont action sur les morphismes est $\mathbb{k}$-linéaire, c'est à dire $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$.

1. La catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ est complète et cocomplète, avec des colimites filtrantes exactes (limites et colimites sont calculées au but).
2. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on note P^X le foncteur représenté par X : $P^X(Y) := \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(X, Y)$. Le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme, naturel en X et F :
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(P^X, F) \simeq F(X)\ . \tag{6.8}$$
On en déduit que P^X est un objet projectif de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$, qu'on appelle *projectif standard*. De plus, l'application canonique fournie par le lemme de Yoneda (la somme est prise sur un petit squelette de $\mathcal{C}$)
$$\bigoplus_X \bigoplus_{f:P^X\to F} P^X \to F$$
est un épimorphisme, donc $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ a assez de projectifs. Si en supplément la catégorie $\mathcal{C}$ est additive, le produit tensoriel $P^X \otimes P^Y$ est un facteur direct de $P^{X\oplus Y}$, donc projectif. Les P^X formant un générateur projectif, il en résulte que le produit tensoriel de deux projectifs quelconques est projectif.
3. L'isomorphisme de catégories $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \simeq \Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ nous permet d'interpréter la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux multihomogènes contravariants $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ comme la catégorie des foncteurs $\Bbbk$-linéaires de source $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ et de but $\Bbbk$-Mod. Ainsi pour un foncteur contravariant F et un foncteur covariant G, on dispose du produit :
$$F \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} G := \bigoplus_X F(X) \otimes G(X)\ /\ N$$
où la somme est prise sur un petit squelette de $\mathcal{C}$ et N est le sous-module engendré par les éléments $y \otimes G(f)(x) - F(f)(y) \otimes x$, pour les $x \in G(X)$, $y \in F(Y)$, et $f : X \to Y$. Le produit définit un foncteur :
$$\otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \times \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}} \to \Bbbk\text{-Mod}\ . \tag{6.9}$$
Ce produit est caractérisé par les deux propriétés suivantes. (1) Il est additif et exact à droite de chaque côté. (2) Notons Q_X le foncteur contravariant représenté par X, $Q_X(Y) := \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(Y, X)$. Alors on a des isomorphismes « de Yoneda », naturels en X, F, G :
$$F \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} P^X \simeq F(X)\ , \qquad Q_X \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} G \simeq G(X)\ . \tag{6.10}$$
Enfin, si F est un foncteur strictement polynomial homogène contravariant, alors pour tout $\Bbbk$-module M, on peut lui associer le foncteur covariant $\mathrm{Hom}_\Bbbk(F, M) : X \mapsto \mathrm{Hom}_\Bbbk(F(X), M)$. On a alors un isomorphisme « de Cartan », naturel en F, G, M :
$$\mathrm{Hom}_\Bbbk(F \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} G, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(G, \mathrm{Hom}_\Bbbk(F, M))\ . \tag{6.11}$$

4. La combinaison des isomorphismes (6.10) et (6.11) donne un isomorphisme « de Yoneda », naturel en X, G, M
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(G, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Q_X, M)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(G(X), M) \ . \tag{6.12}$$
On en déduit que si $M = J$ est un $\Bbbk$-module injectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Q_X, J)$ est un objet injectif de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$, qu'on appelle *injectif standard*. De plus, si J_X désigne une enveloppe injective de $G(X)$, l'application canonique (déduite des applications $\Bbbk$-linéaires $G(X) \hookrightarrow J_X$ par l'isomorphisme (6.12), en prenant le produit sur un petit squelette de $\mathcal{C}$) :
$$G \to \prod_X \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Q_X, J_X)$$
est un monomorphisme, donc $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ possède assez d'injectifs.
5. Supposons que $\mathcal{C}$ est munie d'une anti-involution, c'est à dire d'une équivalence de catégories $\Bbbk$-linéaire $\tau : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ telle que $\tau^2 \simeq \mathrm{Id}$. On a alors une anti-involution $\tau : \Gamma^d(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \to \Gamma^d(\mathcal{C})$ uniquement déterminée par la commutativité du diagramme
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma_d"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma_d"] \\ \Gamma^d(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\tau"] & \Gamma^d(\mathcal{C}) \end{tikzcd} \ .$$
Pour tout $F \in \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$, on note $F^\sharp \in \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ le foncteur tel que $F^\sharp(X) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(\tau X), \Bbbk)$. On obtient ainsi un foncteur de dualité :
$$\sharp : \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}} \to \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}^{\mathrm{op}} \ . \tag{6.13}$$
En combinant la formule de Cartan (6.11) avec la précomposition par τ, on obtient de plus des isomorphismes naturels en F, G :
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, G^\sharp) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((G\tau) \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} F, \Bbbk) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}((F\tau) \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} G, \Bbbk) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(G, F^\sharp) \ .\end{aligned} \tag{6.14}$$
6. Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie $\Bbbk$-linéaire monoïdale symétrique, c'est à dire admet un produit monoïdal $\Bbbk$-bilinéaire $\otimes$ sujet aux axiomes habituels [McL]. Alors d'après la propriété universelle (6.7), la catégorie $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})$ est aussi monoïdale symétrique, avec un produit monoïdal $\otimes$ caractérisé par la commutativité du diagramme suivant.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\gamma_{\mathbf{d}} \times \gamma_{\mathbf{d}}"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\gamma_{\mathbf{d}}"] \\ \Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C}) \times \Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\otimes"] & \Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C}) \end{tikzcd} \ . \tag{6.15}$$

Cette structure monoïdale symétrique sur la catégorie source induit formellement [Day] une structure symétrique monoïdale fermée sur la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$. Le produit monoïdal $\bullet$ est le produit de convolution de Day, défini par

$$F \bullet G(Z) := H_Z \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})\times\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} (F \boxtimes G)\;,$$

où $H_Z(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(X\otimes Y, Z)$. Il est caractérisé par son exactitude à droite de chaque coté et l'isomorphisme $P^X \bullet P^Y \simeq P^{X\otimes Y}$, naturel en X, Y. Le Hom interne est défini par

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)(Z) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(P^Z \bullet F, G)\;.$$

Il est caractérisé par son exactitude à gauche en chaque variable, et par l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(P^X,G)(Z) \simeq G(X\otimes Z)$, naturel en X, G, Z. Supposons de plus que $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale symétrique *fermée*, c'est à dire possède un Hom interne. Alors $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})$ est une monoïdale symétrique fermée dont le Hom interne est caractérisé par la commutativité d'un diagramme similaire à (6.15). On peut décrire la structure de catégorie monoïdale fermée de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ en utilisant les « foncteurs à paramètre ». Si $G \in \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$, on définit pour tout objet (paramètre) X un foncteur contravariant $G'_X(Y) := G(\underline{\mathrm{Hom}}(Y,X))$ et des foncteurs covariants $G^X(Y) := G(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y))$ et $G_X(Y) := G(X\otimes Y)$[26]. On vérifie facilement les isomorphismes naturels en F, G et Z :

$$\begin{aligned}
&F \bullet G(Z) \simeq F'_Z \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} G \simeq G'_Z \otimes_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})} F\;,\\
&\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)(Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(F^Z,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(F,G_Z)\;.
\end{aligned}$$

La description des foncteurs strictement polynomiaux homogènes à la Bousfield permet également de relier la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ à des catégories de modules sur des algèbres d'endomorphismes. Plus précisément, on peut restreindre un foncteur strictement polynomial à la sous-catégorie pleine de $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})$ ayant pour seul objet X. On obtient ainsi un foncteur exact :

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ev}_X : & \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}} & \to & \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(X)\text{-Mod}\;. \\ & F & \mapsto & F(X)\end{array} \tag{6.16}$$

La proposition suivante en donne les propriétés élémentaires. Nous donnerons une application clé de cette proposition dans la section 7.

[26]La notation X en indice indique que la famille de foncteurs dépend de manière covariante de X, la notation en exposant indique qu'elle dépend de manière contravariante de X. Cette convention est en accord avec les notations P^X et Q_Z des projectifs standard utilisées plus haut. On a d'ailleurs $P^X = (P^1)^X$ et $Q_Z = (P^1)'_Z$ si P^1 désigne le projectif standard représenté par l'unité 1 pour le produit monoïdal sur $\mathcal{C}$.

Proposition 6.18. *Le foncteur* ev_X *est un foncteur quotient [Gab] : la sous-catégorie pleine* $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X) \subset \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ *dont les objets sont les* F *tels que* $F(X) = 0$ *est localisante, et l'évaluation induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}/\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X) \simeq \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(X)\text{-Mod} .$$

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Le foncteur ev_X *est une équivalence de catégories.*

(ii) Pour tous les objets Y, Z *de* $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})$*, l'application suivante est surjective*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(Y,X) \otimes \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(X,Z) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(Y,Z) . \qquad (6.17)$$

(iii) L'application canonique $P^X \otimes F(X) \twoheadrightarrow F$ *induite par l'isomorphisme de Yoneda est un épimorphisme.*

(iv) P^X *est un générateur de la catégorie* $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$*.*

Démonstration. Notons $A = \mathrm{End}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C}}(X) = P^X(X)$. D'après [Gab, Prop 5 p. 374], pour montrer que ev_X est un quotient, il suffit de montrer que ev_X admet un adjoint à droite $r : A\text{-Mod} \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$ tel que $\mathrm{ev}_X \circ r \simeq \mathrm{Id}$. L'existence de cet adjoint r est garantie par la théorie des extensions de Kan. Le lemme de Yoneda donne une formule explicite : $rM : Y \mapsto \mathrm{Hom}_A(P^Y(X), M)$. En utilisant cette formule, on vérifie que $rM(X) \simeq M$ et que la composée

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{r} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(rM, rN) \xrightarrow{\mathrm{ev}_X} \mathrm{Hom}_A(rM(X), rN(X))$$

est un isomorphisme.

Montrons (i)⇒(ii). Soit $G^Y(Z)$ le conoyau de l'application (6.17). Alors G^Y est un objet de $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X)$. Si ev_X est une équivalence de catégories, alors $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X) = 0$ donc $G^Y(Z) = 0$ pour tout Y et tout Z, donc (6.17) est surjective. Montrons (ii)⇒(iii). (ii) équivaut à la surjectivité de $P^X \otimes P^Y(X) \to P^Y$ pour tout Y. La surjectivité de $P^X \otimes F(X) \twoheadrightarrow F$ pour tout F découle alors du fait que les P^Y forment une famille de générateurs de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}$. Montrons (iii)⇒(i). Si F est un objet de $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X)$, alors (iii) montre que F est un quotient de $P^X \otimes F(X) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_X) = 0$, donc ev_X est une équivalence de catégories. Finalement (iv) est une conséquence directe de (iii), nous allons montrer que (iv)⇒(ii). En effet, pour tout Y il existe un épimorphisme $\theta : \bigoplus_\alpha P^X_\alpha \to P^Y$ où les P^X_α sont des copies de P^X. Par le lemme de Yoneda, la restriction de θ à chacun des termes P^X_α de la somme directe est induite par une application $f_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(Y,X)$. Si $g \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(Y,Z) = P^Y(Z)$, il admet un antécédent par θ : $\sum g_\alpha \in \bigoplus_\alpha P^X_\alpha(Z)$. Alors $\sum f_\alpha \otimes g_\alpha$ est un antécédent de g par l'application (6.17), qui est donc surjective. □

6.6 Méthodes élémentaires de calcul d'Ext

Nous rappelons maintenant quelques méthodes élémentaires pour calculer les Ext dans les catégories de foncteurs, que nous énonçons dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux. Nous renvoyons par exemple à [Mit, Pir] pour les démonstrations (standard).

La philosophie générale de ces méthodes est de montrer que certains Ext dans une catégorie de foncteurs donnée sont calculables en termes d'Ext dans une *autre* catégorie de foncteurs. Ainsi, en changeant (éventuellement plusieurs fois) la catégorie de foncteurs dans laquelle on travaille, on finit par ramener le calcul à un cas plus facile.

Dans ce qui suit, les lettres $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$... désignent des catégories $\Bbbk$-linéaires essentiellement petites, et nous supposons que les $\Bbbk$-modules de morphismes dans ces catégories sont des $\Bbbk$-modules projectifs[27].

1. **Adjonction à la source.** Si $\phi : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : \psi$ est une paire de foncteurs $\Bbbk$-linéaires adjoints, on a un isomorphisme, naturel en F, G :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{D}}}(F \circ \psi, G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, G \circ \phi) . \tag{6.18}$$

Un cas typique est fourni par les paires d'adjoints (Δ, Σ) ou (Σ, Δ), où $\mathcal{A}$ est une catégorie additive $\Bbbk$-linéaire et $\Delta : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{A} \times \mathcal{A} : \Sigma$ sont définis par $\Delta(X) = (X, X)$ et $\Sigma(X, Y) = X \oplus Y$. Soient $F_1, F_2, G \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ des foncteurs homogènes de poids respectifs d_1, d_2 et $d = d_1 + d_2$. Le foncteur $F_1 \otimes F_2$ peut se réécrire sous la forme $(F_1 \boxtimes F_2) \circ \Delta$ et on obtient donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{A}}}(F_1 \otimes F_2, G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{A}\times\mathcal{A}}}(F_1 \boxtimes F_2, G \circ \Sigma) . \tag{6.19}$$

Nous utiliserons souvent les isomorphismes du type (6.19) dans la suite de ce mémoire, et nous y ferons référence sous le terme « d'adjonction somme-diagonale » .

Donnons un exemple très concret d'utilisation de l'isomorphisme (6.19). Supposons que G est de la forme $I^{(r)} \circ H$. Le foncteur $H \circ S$ se décompose en somme directe de ses composantes $H_{k,\ell}$ bihomogènes de poids (k, ℓ). Comme le foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ est homogène de poids p^r et vérifie $I^{(r)}(V \oplus W) \simeq I^{(r)}(V) \oplus I^{(r)}(W)$, G se décompose en somme directe des foncteurs $I^{(r)} \circ H_{k,\ell}$ bihomogènes de poids $(p^r k, p^r \ell)$. La décomposition (6.4) nous fournit alors le critère d'annulation suivant :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{A}}}(F_1 \otimes F_2, I^{(r)} \circ H) = 0 \quad \text{si } d_1 \text{ ou } d_2 \text{ n'est pas divisible par } p^r.$$

[27]Cette hypothèse de projectivité n'est pas nécessaire pour tous les énoncés que nous donnons mais nous préférons mettre une hypothèse uniforme pour tous les énoncés.

2. **Formule de Künneth.** On suppose l'anneau $\Bbbk$ principal. Soient $F, G \in \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ et $H, K \in \mathcal{P}_{e,\mathcal{D}}$. On suppose que les valeurs d'au moins un des deux foncteurs F, H et d'au moins un des deux foncteurs G, K sont des $\Bbbk$-modules plats. Alors on a une suite exacte courte (qui scinde non naturellement) :

$$0 \to \bigoplus_{s+t=i} \mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F,G) \otimes \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}_{e,\mathcal{D}}}(H,K) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{d,e,\mathcal{C}\times\mathcal{D}}}(F \boxtimes H, G \boxtimes K)$$
$$\to \bigoplus_{s+t=i+1} \mathrm{Tor}_1^{\Bbbk}(\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F,G), \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}_{e,\mathcal{D}}}(H,K)) \to 0\ . \tag{6.20}$$

3. **Homologie de Hochschild-Mitchell d'un Hom externe.** Notons $\Gamma^d\mathrm{gl} \in \mathcal{P}_{d,d,\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}}$ le bifoncteur tel que

$$\Gamma^d\mathrm{gl}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\Gamma^d(\mathcal{C})}(X,Y) = \Gamma^d(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y))\ .$$

Alors pour $F, G \in \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}$ où F prend des valeurs $\Bbbk$-projectives, on a un isomorphisme naturel en F, G (le membre de gauche de l'isomorphisme est l'homologie de Hochschild-Mitchell de la catégorie $\Gamma^d(\mathcal{C})$ à coefficients dans $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)$, l'isomorphisme est une variante de l'isomorphisme classique [Wei, Chap 9, lm 9.1.9] pour la cohomologie de Hochschild des anneaux) :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,d,\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}}}\left(\Gamma^d\mathrm{gl}, \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)\right) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F,G)\ . \tag{6.21}$$

4. **Changement de base.** Soit A une $\Bbbk$-algèbre. La catégorie $\mathcal{C}\otimes A$ est la catégorie A-linéaire avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$, dont les morphismes sont :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\otimes A}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \otimes A\ ,$$

et dont la loi de composition s'obtient à partir de celle de $\mathcal{C}$ par extension des scalaires. On a un foncteur $\Bbbk$-linéaire $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}\otimes A$ qui est l'identité sur les objets et $\phi(f) = f \otimes 1$. La précomposition par ϕ induit un foncteur exact de restriction des scalaires :

$$\mathrm{res} : \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}\otimes A} \to \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}\ .$$

Pour tout foncteur strictement polynomial $F : \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-Mod}$, on a un foncteur strictement polynomial $F \otimes A : \mathcal{C}\otimes A \to A\text{-Mod}$ tel que $F\otimes A(X) = F(X)\otimes A$, et tel que $((F\otimes A)_{X,Y})_B = (F_{X,Y})_B$ pour toute A-algèbre commutative B. On définit ainsi un foncteur de changement de base, adjoint à gauche au foncteur de restriction :

$$\otimes A : \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}} \to \mathcal{P}_{d,\mathcal{C}\otimes A}\ . \tag{6.22}$$

Supposons que A soit $\Bbbk$-plate, ou que F prenne des valeurs $\Bbbk$-projectives. On peut alors dériver l'isomorphisme d'adjonction pour obtenir un isomorphisme de A-modules naturel en F, G

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, \mathrm{res}\, G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}\otimes A}}(F \otimes A, G)\ . \tag{6.23}$$

Si G est de la forme $H \otimes A$, alors $\mathrm{res}\, G$ est le produit tensoriel de H et du foncteur constant égal à A. Supposons de plus que $\Bbbk$ est un anneau principal. De l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(P, \mathrm{res}\, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(P, H) \otimes A$, naturel en un projectif P et de la formule de Künneth, on déduit alors de (6.23) la suite exacte courte (qui scinde non naturellement) :

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, H) \otimes A \to &\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}\otimes A}}(F \otimes A, H \otimes A) \\ &\to \mathrm{Tor}_1^\Bbbk(\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, H), A) \to 0\ . \end{aligned} \tag{6.24}$$

Remarque 6.19. Les hypothèses de $\Bbbk$-platitude ou de $\Bbbk$-projectivité des valeurs des foncteurs, ou que $\Bbbk$ est un anneau principal, utilisées ci-dessus sont des hypothèses de confort, qui sont vérifiées dans la plupart de nos applications. Le prix à payer pour supprimer ces hypothèses est l'apparition de suites spectrales. Par exemple, l'isomorphisme (6.21) devient pour F, G quelconques une suite spectrale cohomologique, naturelle en F, G :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{P}_{d,d,\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C}}}(\Gamma^d \mathrm{gl}, \mathrm{Ext}^q_\Bbbk(F, G)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{P}_{d,\mathcal{C}}}(F, G)\ .$$

Remarque 6.20. Les techniques de calcul ci-dessus ont été énoncées pour les calculs d'Ext. Elles possèdent bien évidemment des analogues pour les calculs de Tor, c'est à dire des foncteurs dérivés du produit $F \otimes_{\Gamma^d(\mathcal{C})} G$. Avec quelques hypothèses sur les valeurs des foncteurs F et G la formule de Cartan (6.11) peut d'ailleurs se dériver en une formule reliant les Ext et les Tor, et qui montre que les calculs d'Ext et de Tor sont essentiellement équivalents. Par exemple, si $\Bbbk$ est un corps on a un isomorphisme, naturel en F, G :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathcal{C}}}(F, \mathrm{Hom}_\Bbbk(G, \Bbbk)) \simeq \mathrm{Hom}_\Bbbk(\mathrm{Tor}_i^{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathcal{C})}(G, F), \Bbbk)\ .$$

6.7 Cohomologie des foncteurs

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $\Bbbk$-linéaire essentiellement petite, et $\omega : \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-Mod}$ un foncteur strictement polynomial homogène de poids n. Pour tout $F \in \mathcal{P}_\mathcal{C}$ on note

$$H^i_\omega(F) := \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{nd,\mathcal{C}}}(\Gamma^d\omega, F_{nd})\ , \tag{6.25}$$

où $\Gamma^d\omega$ désigne la composée des foncteurs strictement polynomiaux Γ^d et ω, et F_{nd} est la composante homogène de poids nd de F. Dans la suite de ce mémoire, nous désignerons les extensions de la forme (6.25) sous le nom de *cohomologie des foncteurs.* Nous ferons référence au $\Bbbk$-module $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{nd,\mathcal{C}}}(\Gamma^d\omega, F_{nd})$ comme à la *composante homogène de $H^*_\omega(F)$ de degré i et de poids nd* .

Exemple 6.21. Si $\mathcal{C} = \mathrm{P}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{P}_{\Bbbk}$ et gl est le foncteur tel que $\mathrm{gl}(V,W) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$ (bihomogène de poids $(1,1)$, donc homogène de poids 2), alors $H^*_{\mathrm{gl}}(F)$ est la cohomologie des bifoncteurs strictement polynomiaux, initialement introduite dans [FF]. Sa composante homogène de degré i et de poids $2d$ est la cohomologie de Hochschild-Mitchell de la catégorie $\Gamma^d(\mathrm{P}_{\Bbbk})$ à coefficients dans F_{2d}.

Exemple 6.22. Prenons $\omega = \mathrm{gl} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \Bbbk\text{-Mod}$ le bifoncteur tel que $\mathrm{gl}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)$. Si F et G sont deux foncteurs de $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ avec F prenant des valeurs $\Bbbk$-projectives, on a un isomorphisme (6.21) $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathcal{C}}}(F,G) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G))$. Ainsi les calculs d'extensions dans $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ seront également baptisés cohomologie des foncteurs.

Si F et G sont deux foncteurs strictement polynomiaux, on considère les composées suivantes, où la première flèche est induite par le produit tensoriel et la deuxième par le morphisme $\Gamma^{d+e}\omega \to \Gamma^d\omega \otimes \Gamma^e\omega$ issu de la structure de cogèbre de l'algèbre à puissances divisées :

$$H^i_\omega(F_d) \otimes H^j_\omega(G_e) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{P}_{d+e,\mathcal{C}}}(\Gamma^d\omega \otimes \Gamma^e\omega, F_d \otimes G_e) \to H^{i+j}_\omega(F_d \otimes G_e)\ .$$

Ces composées définissent un cup produit associatif (respectant les graduations homologiques et les poids) :

$$H^*_\omega(F) \otimes H^*_\omega(G) \xrightarrow{\cup} H^*_\omega(F \otimes G)\ .$$

L'unité de ce cup produit est l'application $\eta : \Bbbk \xrightarrow{\simeq} H^0(\Bbbk) = H^*(\Bbbk)$.

Si $\Bbbk$ est un corps et $\mathcal{C}$ est une catégorie additive $\Bbbk$-linéaire, le cup produit fait partie d'un structure plus riche. Soit $\mathcal{V}^*_{\Bbbk}$ la catégorie des $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués. C'est une catégorie monoïdale symétrique pour le produit tensoriel, dont la commutativité est donnée par le morphisme τ tel que $\tau(m \otimes n) = (-1)^{\deg n \deg m} n \otimes m$. Soit $(\mathcal{P}, \otimes, \Bbbk, \tau)$ une catégorie monoïdale symétrique. On appelle *foncteur monoïdal de Hopf* [4, Def 5.2] un quintuplet $(H^*, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ tel que :

(i) $(H^*, \mu, \eta) : (\mathcal{P}, \otimes, \Bbbk) \to (\mathcal{V}^*_{\Bbbk}, \otimes, \Bbbk)$ est un foncteur monoïdal (pas forcément strict),

(ii) $(H^*, \Delta, \epsilon) : (\mathcal{P}, \otimes, \Bbbk) \to (\mathcal{V}^*_{\Bbbk}, \otimes, \Bbbk)$ est un foncteur comonoïdal (pas forcément strict),

(iii) Pour tous les objets F, F', G, G' de $\mathcal{P}$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^*(F \otimes F') \otimes H^*(G \otimes G') \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "\mu"] & H^*(F) \otimes H^*(F') \otimes H^*(G) \otimes H^*(G') \arrow[d, "H^*(F)\otimes\tau\otimes H^*(G')"] \\
H^*(F \otimes F' \otimes G \otimes G') \arrow[d, "H^*(F\otimes\tau\otimes G')"] & H^*(F) \otimes H^*(G) \otimes H^*(F') \otimes H^*(G') \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\
H^*(F \otimes G \otimes F' \otimes G') \arrow[r, "\Delta"] & H^*(F \otimes G) \otimes H^*(F' \otimes G')
\end{tikzcd}\ .$$

La propriété suivante peut sembler surprenante au premier abord (par exemple la cohomologie des groupes ne la vérifie pas).

Proposition 6.23. *[4, Thm 6.1] Soit $\Bbbk$ un corps, et $\mathcal{C}$ une catégorie additive $\Bbbk$-linéaire. Alors on dispose également d'un coproduit (compatible avec les degrés homologiques et les poids)*

$$\Delta : H^*_\omega(F \otimes G) \to H^*_\omega(F) \otimes H^*_\omega(G)$$

et d'une counité

$$\epsilon : H^*_\omega(\Bbbk) = H^0_\omega(\Bbbk) \xrightarrow{\simeq} \Bbbk$$

qui complètent le cup produit en un foncteur monoïdal de Hopf

$$(H^*_\omega, \cup, \eta, \Delta, \epsilon) : (\mathcal{P}_\mathcal{C}, \otimes, \Bbbk) \to (\mathcal{V}^*_\Bbbk, \otimes, \Bbbk) .$$

De plus, le coproduit est une rétraction du cup produit, en particulier le cup produit est injectif.

Démonstration. Comme $\mathcal{C}$ est additive, on a une décomposition canonique :

$$\omega(X \oplus Y) \simeq \omega(X) \oplus \omega(Y) \oplus \Omega(X, Y) ,$$

où Ω désigne un foncteur strictement polynomial à deux variables (Ω est le deuxième effet croisé de ω, comme défini à la section 4.1.5) On en déduit une décomposition de $\Gamma^{d+e}\omega(X)$, naturelle en X, Y, en une somme directe

$$\bigoplus_{a_1+a_2+a_3=d+e} \Gamma^{a_1}\omega(X) \otimes \Gamma^{a_2}\omega(Y) \otimes \Gamma^{a_3}(\Omega(X, Y)) .$$

L'inclusion (resp. projection) canonique sur le facteur direct indexé par $(d, e, 0)$ donne donc des morphismes de bifoncteurs

$$\iota : \Gamma^d\omega(X) \otimes \Gamma^e\omega(Y) \hookrightarrow \Gamma^{d+e}\omega(X \oplus Y) ,$$
$$\pi : \Gamma^{d+e}\omega(X \oplus Y) \twoheadrightarrow \Gamma^d\omega(X) \otimes \Gamma^e\omega(Y) .$$

tels que ι et π sont associatifs, et unitaires dans le sens évident, et tels que $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}$. Le produit en cohomologie des foncteurs peut se réécrire comme la composée :

$$H^*_\omega(F_d) \otimes H^*_\omega(G_e) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}}(\Gamma^d\omega \boxtimes \Gamma^e\omega, F_d \boxtimes G_e) \to H^*_\omega(F_d \otimes G_e)$$

où le premier morphisme est induit par l'isomorphisme de Künneth et le deuxième est induit par ι et par l'adjonction somme-diagonale. On définit le coproduit $\Delta : H^*(F \otimes G) \to H^*(F) \otimes H^*(G)$ par la composée suivante, où le morphisme de gauche est induit par l'adjonction somme-diagonale et π^*, et l'isomorphisme de droite est l'isomorphisme de Künneth.

$$H^*_\omega(F_d \otimes G_e) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}}(\Gamma^d\omega \boxtimes \Gamma^e\omega, F_d \boxtimes G_e) \simeq H^*_\omega(F_d) \otimes H^*_\omega(G_e) .$$

Les propriétés du coproduit et la formule $\Delta \circ \cup = \mathrm{Id}$ sont des vérifications directes à partir des définitions. $\square$

7 Cohomologie des foncteurs et des groupes

L'objectif de cette section est d'expliquer les liens entre les foncteurs strictement polynomiaux, les algèbres de Schur, et la cohomologie des groupes algébriques. Nous nous restreignons aux foncteurs strictement polynomiaux de source la catégorie $\mathrm{P}_{\Bbbk}$ des $\Bbbk$-modules projectifs de type fini, ou plus généralement une catégorie produit du type $(\mathrm{P}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}})^{\times k} \times \mathrm{P}_{\Bbbk}^{\times \ell}$. Seuls les foncteurs strictement polynomiaux de ce type sont utilisés dans la suite de ce mémoire.

Le but de la section 7.1 est de fixer un certain nombre de notations qui seront utilisées dans la suite du mémoire. Nous expliquons également comment les foncteurs strictement polynomiaux permettent de construire des représentations des schémas en groupes.

La section 7.2 explique l'équivalence de catégories et avec les représentations des algèbres de Schur et en tire quelques conséquences. Les énoncés sur la dimension homologique améliorent certains résultats connus [Kra, Tot] en retirant les hypothèses sur l'anneau de base $\Bbbk$.

Les sections 7.3 et 7.4 expliquent le lien entre cohomologie des foncteurs strictement polynomiaux et cohomologie des schémas en groupes classiques. Le lien avec la cohomologie du groupe linéaire été initialement découvert par Friedlander et Suslin [FS, Cor 3.13], et généralisé aux bifoncteurs dans [FF, Thm. 1.5], dans le cas où l'anneau de base $\Bbbk$ est un corps. Une démonstration différente de ce résultat, valable pour un anneau commutatif $\Bbbk$ arbitraire, ainsi que l'extension de ce résultat aux autres groupes classiques a été obtenue dans [4]. C'est cette approche plus générale (et plus simple !) que nous décrivons ici. Les énoncés et les démonstrations présentés ici sont des améliorations de ceux de [4]. Nous renvoyons au paragraphe 7.3.3 pour plus de commentaires sur les énoncés et les méthodes utilisées.

Dans la suite de la section et sauf mention du contraire, $\Bbbk$ **désigne un anneau commutatif arbitraire**. Sans autre précision, les produits tensoriels sont pris sur $\Bbbk$.

7.1 Les catégories $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$

7.1.1 Notations

Dans la suite du mémoire, nous ne considérerons que les foncteurs strictement polynomiaux de source la catégorie $\mathrm{P}_{\Bbbk}$ des $\Bbbk$-modules projectifs de type fini, ou plus généralement une catégorie produit du type $(\mathrm{P}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}})^{\times k} \times (\mathrm{P}_{\Bbbk})^{\times \ell}$. On notera plus simplement

$$\mathcal{P}_{\Bbbk}\ ,\ \text{resp. } \mathcal{P}_{d,\Bbbk}\ ;\quad \mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)\ ,\ \text{resp. } \mathcal{P}_{d,\Bbbk}(\ell)\ ,\ \text{resp. } \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)\ ;\quad \mathcal{P}_{\Bbbk}(k,\ell)\ , \tag{7.1}$$

les catégories de foncteurs strictement polynomiaux de source $\mathrm{P}_{\Bbbk}$, resp. homogènes de poids d ; les catégories de foncteurs strictement polynomiaux de source $\mathrm{P}_{\Bbbk}^{\times \ell}$, resp. homogènes de poids total d, resp. multihomogènes de poids $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$; les catégories de foncteurs strictement polynomiaux de source $(\mathrm{P}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}})^{\times k} \times (\mathrm{P}_{\Bbbk})^{\times \ell}$ et ainsi de suite. Avec ces notations, on a donc des décompositions

$$\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell) = \prod_{d \geq 0} \mathcal{P}_{d,\Bbbk}(\ell) \ , \qquad \mathcal{P}_{d,\Bbbk}(\ell) = \prod_{\substack{\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell), \\ \sum d_i = d}} \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \ .$$

On obtient une équivalence de catégories $\mathcal{P}_{\Bbbk}(k, \ell) \simeq \mathcal{P}_{\Bbbk}(k + \ell)$ (préservant les poids) en précomposant chacune des k variables contravariantes des multifoncteurs par la dualité $\Bbbk$-linéaire. On peut donc toujours se ramener à étudier des foncteurs covariants en chaque variable, mais on préfère parfois utiliser les catégories $\mathcal{P}_{\Bbbk}(k, \ell)$ par commodité. Les catégories de foncteurs $\mathcal{P}_{\Bbbk}(k, k)$ sont par exemple le lieu naturel pour parler de cohomologie des bifoncteurs, cf. exemple 6.21.

7.1.2 Exemples fondamentaux

Nous récapitulons un certain nombre d'exemples de foncteurs de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ que nous avons rencontré dans les sections précédentes.

- Le produit tensoriel $\otimes^d$.
- Le foncteur $\Gamma^d = (\otimes^d)^{\mathfrak{S}_d}$ des d-ièmes puissances divisées. C'est un sous-foncteur de $\otimes^d$.
- Le foncteur $S^d = (\otimes^d)_{\mathfrak{S}_d}$ des d-ièmes puissances symétriques. C'est un quotient de $\otimes^d$.
- Le foncteur Λ^d des d-ièmes puissances extérieures, qui peut être vu à la fois comme un sous-foncteur ou comme un quotient de $\otimes^d$.
- Les foncteurs de Schur S_λ associés à une partition λ de poids d, définis dans la section 4.2.2. Ce sont des quotients de $\otimes^d$.

Les foncteurs strictement polynomiaux

$$S = \bigoplus_{d \geq 0} S^d \ , \quad \Lambda = \bigoplus_{d \geq 0} \Lambda^d \ , \quad \Gamma = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma^d$$

sont munis d'une structure d'algèbre : pour les algèbres symétriques et extérieures on prend le produit usuel, et pour l'algèbre à puissances divisées on prend le produit défini à la section 6.4. On rappelle que si X désigne l'un de ces trois foncteurs, la multiplication définit pour tout V, W un isomorphisme (dit isomorphisme exponentiel, cf. section 10.1) qui préserve les poids :

$$X(V) \otimes X(W) \simeq X(V \oplus W)$$

Nous ferons un usage constant de ces isomorphismes exponentiels dans la suite du mémoire.

Les projectifs standard et les injectifs standard de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ seront notés $\Gamma^{\mathbf{d},V}$, et $J\otimes S^{\mathbf{d}}_V$, où V est un ℓ-uplet de $\Bbbk$-modules projectifs de type fini et J un $\Bbbk$-module injectif. Nous utiliserons ces notations plutôt que les notations P^X et $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(Q_X,J)$ de la section 6, car dans le cas de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$, ils sont explicitement donnés en termes de puissances divisées et de puissances symétriques par les formules :

$$\Gamma^{\mathbf{d},V}(W_1,\dots,W_\ell)=\bigotimes_{i=1}^{\ell}\Gamma^{d_i}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_i,W_i))\;,$$
$$J\otimes S^{\mathbf{d}}_V(W_1,\dots,W_\ell)=J\otimes\bigotimes_{i=1}^{\ell}S^{d_i}(V_i\otimes W_i)\;.$$

7.1.3 Foncteurs d'évaluation

Soit $V=(\Bbbk^{n_1},\dots,\Bbbk^{n_\ell})$ un ℓ-uplet de $\Bbbk$-modules libres de rang fini et soit GL_V le schéma en groupes linéaires associé, $GL_V(A):=\prod_{i=1}^{\ell}GL_{n_i}(A)$. Pour tout foncteur strictement polynomial F à ℓ variables, les composées :

$$GL_V(A)\subset\mathrm{End}_{\mathrm{P}_{\Bbbk}^{\times\ell}}(V)\otimes A\xrightarrow{(F_{V,V})_A}\mathrm{End}_{\Bbbk}(F(V))\otimes A\to\mathrm{End}_A(F(V)\otimes A)$$

font du $\Bbbk$-module $F(V)$ une représentation de GL_V. Fixons un schéma en groupes G et un morphisme de schémas en groupes $\rho:G\to GL_V$. En restreignant l'action à G le long de ρ, $F(V)$ devient un G-module. On obtient donc un foncteur d'évaluation exact, qui commute aux colimites :

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ev}_V: & \mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell) & \to & G\text{-Mod}\\ & F & \mapsto & F(V)\end{array}\;. \tag{7.2}$$

De même, si $F\in\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell,\ell)$, le $\Bbbk$-module $F(V,V)$ est simultanément muni d'une action de GL_V à gauche (provenant des variables covariantes) et d'une action de GL_V à droite (provenant des variables contravariantes) qui commutent. Si l'on restreint ces actions le long du morphisme $G\to GL_V\times GL_V$, $g\mapsto(\rho(g)^{-1},\rho(g))$, on obtient une action de G sur $F(V,V)$. Ce procédé définit donc un foncteur d'évaluation exact qui commute aux colimites :

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ev}_{(V,V)}: & \mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell,\ell) & \to & G\text{-Mod}\\ & F & \mapsto & F(V,V)\end{array}\;. \tag{7.3}$$

Comme expliqué à la section 4.1.6, le foncteur d'évaluation (7.3) permet de construire plus de représentations que le foncteur d'évaluation (7.2).

7.1.4 Formulaire

Les catégories produits $(\mathrm{P}_{\Bbbk})^{\times\ell}$ sont des catégories monoïdales symétriques fermées (pour le produit tensoriel usuel des $\Bbbk$-modules), munies d'une dualité (la dualité $\Bbbk$-linéaire usuelle), et dont les Hom sont $\Bbbk$-projectifs de type fini. En particulier, on dispose sur la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$ de toutes les structures décrites à la section 6.5 et de toutes les méthodes de calcul décrites dans la section 6.6. Nous en rappelons ici les caractéristiques essentielles.

1. **Produits tensoriels.** On dispose de deux types de produits tensoriels, qui s'étendent par additivité à la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$ toute entière : les produits tensoriels
$$\otimes : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \times \mathcal{P}_{\mathbf{e},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d}+\mathbf{e},\Bbbk}(\ell) \;,$$
et les produits tensoriels externes
$$\boxtimes : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(k) \times \mathcal{P}_{\mathbf{e},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathbf{e},\Bbbk}(k+\ell) \;.$$
On observe que les projectifs standard et les injectifs standard sont des produits tensoriels externes de foncteurs. Avec nos notations, les adjonctions somme-diagonale s'écrivent sous la forme :
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)}(F_1\otimes F_2, G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell+\ell)}(F_1\boxtimes F_2, G\circ\Sigma) \;,\\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)}(F, G_1\otimes G_2) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell+\ell)}(F\circ\Sigma, G_1\boxtimes G_2) \;.\end{aligned}$$
2. **Foncteurs à paramètres.** Si V et W sont des ℓ-uplets de $\Bbbk$-modules projectifs de type fini , on note $\mathrm{Hom}(V,W)$, resp. $V\otimes W$ le ℓ-uplet dont la i-ème coordonnée est égale à $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_i,W_i)$, resp. $V_i\otimes W_i$. On définit des foncteurs à paramètre comme indiqué dans le point 6 de la section 6.5. Précisément, si F est un multifoncteur à ℓ variables, on note F^V et F_V les foncteurs :
$$F^V(W) = F(\mathrm{Hom}(V,W)) \;,\quad F_V(W) = F(V\otimes W) \;.$$
On observe en particulier que les projectifs standard et les injectifs standard de $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$ sont des foncteurs à paramètre.
3. **Structure monoïdale symétrique fermée.** La catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ possède une structure monoïdale symétrique fermée. Le produit monoïdal est le produit de convolution de Day
$$\bullet : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \times \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \;.$$
On l'étend à la catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$ toute entière par linéarité, c'est à dire si les $F_{\mathbf{d}}$ désignent les composantes multihomogènes d'un foncteur F à ℓ variables, on pose $F\bullet G = \bigoplus F_{\mathbf{d}}\bullet G_{\mathbf{d}}$. Le Hom interne dans $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ peut être décrit par des paramétrisations :
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F,G)(V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F^V,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F,G_V) \;.$$
La catégorie $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$ toute entière devient une catégorie monoïdale symétrique fermée si l'on étend le Hom interne par la formule :
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)}(F,G) = \bigoplus_{\mathbf{d}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F_{\mathbf{d}},G_{\mathbf{d}}) \;.$$

4. **Foncteur dérivé du Hom interne.** On note $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F,G)$ la valeur en G du foncteur dérivé de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}}(F,-) : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$. On peut décrire ce foncteur gradué en termes de paramétrisations :
$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F,G)(V) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F^V,G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F,G_V) \quad (7.4)$$
On étend les Ext à paramètre à la catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)$ toute entière par la formule :
$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)}(F,G) = \bigoplus_{\mathbf{d}} \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F_{\mathbf{d}},G_{\mathbf{d}})\ .$$
5. **Dualité.** Si W est un $\Bbbk$-module, on note $W^\vee = \mathrm{Hom}_\Bbbk(W,\Bbbk)$, et plus généralement pour tout ℓ-uplet de $\Bbbk$-modules V, on note $V^\vee$ le ℓ-uplet dont la i-ème coordonnée est égale à $V_i^\vee$. On a un opérateur de dualité
$$^\sharp : \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)^{\mathrm{op}}$$
qui envoie un foncteur F sur $F^\sharp(V) = F(V^\vee)^\vee$. La dualité se prolonge sur la catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)$ toute entière en posant $F^\sharp = \bigoplus_{\mathbf{d}} F^\sharp_{\mathbf{d}}$. On observe les isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux à une variable :
$$(\otimes^d)^\sharp \simeq \otimes^d\ , \quad (\Lambda^d)^\sharp \simeq \Lambda^d\ , \quad (S^d_V)^\sharp \simeq \Gamma^{d,V}\ , \quad (\Gamma^{d,V})^\sharp \simeq S^d_V\ .$$
6. **Changement de base.** Pour toute $\Bbbk$-algèbre commutative A, on dispose d'un foncteur pleinement fidèle $\iota : \Gamma^{\mathbf{d}}_A(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times\ell} \otimes A) \to \Gamma^{\mathbf{d}}_A(\mathrm{P}_A^{\times\ell})$ tel que $\iota(V_1,\dots,V_\ell) = (V_1\otimes A,\dots,V_\ell\otimes A)$. Comme $\mathrm{P}_A^{\times\ell}$ est la complétion idempotente de $\mathrm{P}_\Bbbk^{\times\ell}\otimes A$, la précomposition par ι induit une équivalence de catégories :
$$\mathcal{P}_{\mathbf{d},A}(\ell) = \mathcal{P}_{\mathbf{d},P_A^{\times\ell}} \simeq \mathcal{P}_{\mathbf{d},P_\Bbbk^{\times\ell}\otimes A}\ .$$
Le changement de base (6.22) peut donc se réécrire comme un foncteur :
$$\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \to \mathcal{P}_{\mathbf{d},A}(\ell)\ .$$
Par exemple, le changement de base envoie les foncteurs $\Gamma^{\mathbf{d},V}$, resp. $S^{\mathbf{d}}_V$ de $\mathrm{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ sur les foncteurs $\Gamma^{\mathbf{d},V\otimes A}$, resp. $S^{\mathbf{d}}_{V\otimes A}$ de $\mathrm{P}_{\mathbf{d},A}(\ell)$.

7.2 Lien avec les algèbres de Schur

7.2.1 L'équivalence de catégories

Soit $S(\mathbf{d},V) = \bigotimes_{i=1}^\ell \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_{d_i}}(\Bbbk^{n_i})$ l'algèbre de Schur associée au ℓ-uplet d'entiers positifs $\mathbf{d} = (d_1,\dots,d_\ell)$ et au ℓ-uplet de $\Bbbk$-modules libres $V = (\Bbbk^{n_1},\dots,\Bbbk^{n_\ell})$. Cette algèbre de Schur est isomorphe à l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times\ell})}(V)$. Le résultat suivant s'obtient par un calcul direct.

Lemme 7.1. *[4, Lm 2.3] Soit $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$ un ℓ-uplet d'entiers positifs et $V = (\Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_\ell})$ un ℓ-uplet de $\Bbbk$-modules libres de rangs $n_i \geq d_i$ pour tout i. Alors pour tout couple (U, W) la composition dans $\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times \ell})$ induit un morphisme surjectif :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times \ell})}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times \ell})}(V, W) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathbf{d}}(\mathrm{P}_\Bbbk^{\times \ell})}(U, W) \ .$$

Le lemme 7.1 assure que les hypothèses de la proposition 6.18 sont satisfaites. On obtient donc l'équivalence de catégories suivante, originellement démontrée par Friedlander et Suslin.

Théorème 7.2. *[FS, SFB] Si $d_i \leq n_i$ pour tout i, l'évaluation sur $V = (\Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_\ell})$ induit une équivalence de catégories :*

$$\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \simeq S(\mathbf{d}, V)\text{-Mod} \ .$$

Remarque 7.3. La démonstration originelle de Friedlander et Suslin repose sur le calcul [FS, Lm 2.8] qui est dual du calcul de [4, Lm 2.3].

Le théorème 7.2 possède des conséquences inattendues pour les représentations des algèbres de Schur. Par exemple, Krause observe [Kra] que la structure monoïdale symétrique fermée sur la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ était inconnue dans la catégorie des $S(\mathbf{d}, V)$-modules, où elle n'admet pas de description naturelle. A l'inverse, l'équivalence de catégories du théorème 7.2 est utile pour étudier la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux. Nous illustrons cela ci-dessous dans le cadre de l'étude des catégories $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ et de la dimension homologique des catégories $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ et $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$.

7.2.2 Les catégories $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$

On note $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ dont les objets sont les foncteurs strictement polynomiaux prenant des valeurs $\Bbbk$-projectives de type fini. Par exemple, les projectifs standard de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ sont des objets de $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$, mais pas les injectifs standard en général.

Si $\Bbbk$ est un anneau semi-simple, alors $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est une sous-catégorie abélienne de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$. Mais ce n'est pas le cas en général, par exemple $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\mathbb{Z}}(\ell)$ n'est pas stable par conoyaux. La catégorie $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est cependant une sous-catégorie exacte au sens de Quillen [Qui3, Bue, Kel], ce qui est suffisant pour y faire de l'algèbre homologique. Les suites exactes admissibles dans $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\mathbb{Z}}(\ell)$ sont les suites $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ qui sont exactes dans $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\mathbb{Z}}(\ell)$. Nous donnons maintenant quelques propriétés homologiques basiques de la catégorie exacte $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ qui découlent du théorème 7.2.

Lemme 7.4. *L'équivalence de catégories du théorème 7.2 se restreint en une équivalence de catégories exactes*

$$\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \simeq S(\mathbf{d}, V)\text{-mod} .$$

En particulier la catégorie $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ *possède suffisamment de projectifs.*

Si P est une résolution projective de F dans $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$, alors c'est également une résolution projective dans $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$. Le lemme précédent implique donc :

Proposition 7.5. *L'inclusion de catégories* $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ *induit un isomorphisme au niveau des* Ext.

Remarque 7.6. Les catégories de foncteurs strictement polynomiaux utilisées par Friedlander et Suslin [FS, SFB] et dans un certain nombre d'articles postérieurs [FF, 4, 6, 8] sont les sous-catégories pleines $\mathcal{P}^f_{<\infty,\Bbbk}(\ell)$ de $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$, dont les objets sont les foncteurs de poids borné et à valeurs dans $\mathrm{P}_{\Bbbk}$. La proposition 7.5 montre que le choix initial de Friedlander et Suslin de travailler dans les catégories $\mathcal{P}^f_{<\infty,\Bbbk}(\ell)$ est compatible avec le choix de ce mémoire qui insiste plutôt sur les catégories $\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)$.

La situation des injectifs de $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est différente de celle des projectifs car les injectifs standard de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ n'ont pas des valeurs projectives de type fini pour $\Bbbk$ arbitraire. On peut néanmoins montrer qu'il y a assez d'injectifs en utilisant les projectifs et la dualité.

Lemme 7.7. *La dualité* $-^\sharp$ *se restreint en une équivalence de catégories :*

$$-^\sharp : \mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell) .$$

En particulier, les foncteurs $S^{\mathbf{d}}_V = (\Gamma^{\mathbf{d},V})^\sharp$ *forment un cogénérateur injectif de* $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$.

La différence entre les injectifs de $\mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ et ceux de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$, combinée à la proposition 7.5 implique le résultat d'annulation suivant.

Proposition 7.8. *Soit* $F \in \mathcal{P}^f_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$. *Pour tout* $V \in \mathrm{P}_{\Bbbk}^{\times \ell}$ *on a*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)}(F, S^{\mathbf{d}}_V) = 0 \qquad \textit{pour } i > 0.$$

7.2.3 Constructions bar et résolutions explicites

Nous donnons maintenant des résolutions projectives explicites des foncteurs S^d et Λ^d de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. Ces résolutions proviennent de la théorie de la dualité de Koszul des algèbres. Elles ont été utilisées à maintes reprises dans le cadre de la théorie des représentations de GL_n, par exemple dans [Akin, Tot]. Nous les utiliserons à la section 7.2.4 pour obtenir des informations sur la dimension homologique des catégories $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$, et également dans des calculs explicites dans les sections 11 et 10.

Nous commençons par de brefs rappels sur la construction bar. Nous renvoyons le lecteur à [McL2, Chap X], [FHT, Chap 19] ou [LV, Chap. 2] (ou aux présentations dans [2, 3.3], [8, 7.1 et 7.2]) pour plus de détails. Notons $\Bbbk$-ADGA la catégorie des $\Bbbk$-algèbres différentielles graduées augmentées et $\Bbbk$-CDGU la catégorie des $\Bbbk$-cogèbre différentielles graduées avec unité. La construction bar (normalisée, réduite) définit un foncteur

$$\overline{B} : \Bbbk\text{-ADGA} \to \Bbbk\text{-CDGU} .$$

De façon explicite, si A est une algèbre différentielle graduée augmentée, d'idéal d'augmentation $A' = \ker \epsilon$, on a :

- On a $\overline{B}A = \bigoplus_{n\geq 0} A'^{\otimes n}$ comme $\Bbbk$-module. Les éléments de $(A')^{\otimes 0} = \Bbbk$ sont de degré 0 et notés sous la forme $\lambda[]$, $\lambda \in \Bbbk$. Un tenseur $[a_1|\dots|a_n] = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ est de degré $n + \sum |a_i|$ (où $|a|$ est le degré d'un élément homogène $a \in A$).
- La counité est l'application $\overline{B}A \twoheadrightarrow A'^{\otimes 0} = \Bbbk$, l'unité est $\Bbbk = A'^{\otimes 0} \hookrightarrow \overline{B}A$ et la comultiplication est donnée par la déconcaténation :
$$\Delta([a_1|\dots|a_n]) = \sum_{i=0}^{n} [a_1|\dots|a_i] \otimes [a_{i+1}|\dots|a_n] .$$
- La différentielle $\partial : \overline{B}A_k \to \overline{B}A_{k-1}$ envoie $[a_1|\dots|a_n]$ sur la somme (où $e_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $e_i = i + \sum_{j\leq i} |a_i|$) :
$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{e_i} [a_1|\dots|a_i a_{i+1}|\dots|a_n] - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{e_{i-1}} [a_1|\dots|\partial a_i|\dots|a_n] ,$$

La construction bar envoie les quasi-isomorphismes d'algèbres sur des quasi-isomorphismes de cogèbres [McL2, X, Thm 11.2]. Si une algèbre différentielle graduée A est graduée commutative, alors le produit shuffle sur $\overline{B}A$ est compatible avec la différentielle, et fait de $\overline{B}A$ une algèbre différentielle graduée commutative [McL2, X, Thm 12.1, Thm 12.2]. En particulier, on peut considérer les constructions bar itérées $\overline{B}^n A := \underbrace{\overline{B}\dots\overline{B}}_{n \text{ termes}} A$.

Exemple 7.9 ($\overline{B}S$)**.** Considérons l'algèbre symétrique $S(V)$ comme une algèbre différentielle graduée de degré nul et de différentielle nulle. Comme l'algèbre symétrique est une algèbre commutative dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux, la construction bar $\overline{B}S$ est une algèbre différentielle graduée commutative dans $\mathcal{P}_\Bbbk$. La partie homogène de poids d de $\overline{B}S$ est un complexe fini concentré entre les degrés d et 1, de la forme suivante :

$$\underbrace{\otimes^d}_{\text{degré d}} \to \bigoplus_{k=0}^{d-2} (S^1)^{\otimes k} \otimes S^2 \otimes (S^1)^{\otimes d-k-2} \to \cdots \to \underbrace{S^d}_{\text{degré 1}} . \tag{7.5}$$

Les foncteurs apparaissant en degré k et poids d sont les sommes directes de produits tensoriels $S^{i_1}\otimes\cdots\otimes S^{i_k}$, prises sur tous les k-uplets $(i_1,\dots,i_k)$ tels que $\sum i_j = d$.

Nous pouvons utiliser l'exemple précédent pour fournir des résolutions des foncteurs de puissances extérieures Λ^d. L'image de l'inclusion canonique $\Lambda^d \hookrightarrow \otimes^d$ est à valeurs dans les cycles du complexe (7.5). Si $\Lambda\langle 1\rangle$ désigne l'algèbre extérieure, considérée comme une algèbre différentielle graduée dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ avec Λ^d en degré d et une différentielle nulle, on a une inclusion d'algèbres différentielles graduées commutatives :

$$\Lambda\langle 1\rangle \hookrightarrow \overline{B}S\ .$$

La théorie de la dualité de Koszul des algèbres assure que ce morphisme d'algèbres est un quasi-isomorphisme [LV, Chap. 3, ex. 3.2.5]. En particulier, le complexe (7.5) donne une résolution de Λ^d par des produits tensoriels de puissances symétriques. En appliquant la dualité $-^\sharp$ à la résolution (7.5), on obtient une résolution de $(\Lambda^d)^\sharp = \Lambda^d$ de la forme :

$$0\to\Gamma^d\to\cdots\to\bigoplus_{k=0}^{d-2}(\Gamma^1)^{\otimes k}\otimes\Gamma^2\otimes(\Gamma^1)^{\otimes d-k-2}\to\cdots\to\otimes^d\ . \tag{7.6}$$

Les objets de cette résolution sont projectifs car les foncteurs $\Gamma^{i_1}\otimes\cdots\otimes\Gamma^{i_k}$ sont facteurs directs du projectif standard $\Gamma^{d,\Bbbk^k}$.

Exemple 7.10 ($\overline{B}^2S$)**.** La construction bar itérée $\overline{B}^2S$ est une algèbre différentielle graduée commutative dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$. Sa partie homogène de poids d est un complexe fini, concentré entre les degré $2d$ et 2, de la forme suivante (tous les foncteurs de ce complexe sont sommes directes de produits tensoriels de puissances symétriques) :

$$\underbrace{\otimes^d}_{\text{degré 2d}}\ \to\bigoplus_{k=1}^{d-2}\otimes^d\to\cdots\to\ \begin{array}{c}S^{d-1}\otimes S^1\\ \oplus S^1\otimes S^{d-1}\end{array}\ \to\ \underbrace{S^d}_{\text{degré 2}}\ . \tag{7.7}$$

Si on considère l'algèbre différentielle graduée $\Gamma\langle 2\rangle$ avec Γ^d en degré $2d$ et avec différentielle nulle, on obtient de même un morphisme d'algèbres graduées

$$\Gamma\langle 2\rangle\hookrightarrow\overline{B}(\Lambda\langle 1\rangle)$$

qui est un quasi-isomorphisme par dualité de Koszul. Comme la construction bar préserve les quasi-isomorphismes, la composée

$$\Gamma\langle 2\rangle\hookrightarrow\overline{B}(\Lambda\langle 1\rangle)\hookrightarrow\overline{B}^2S \tag{7.8}$$

est un quasi-isomorphisme. L'homologie du complexe (7.7) est donc concentrée en degré $2d$, et égal à Γ^d dans ce degré. En dualisant le complexe (7.7), on obtient donc une résolution projective finie explicite de $(\Gamma^d)^\sharp = S^d$, de longueur $2d-2$ de la forme :

$$0 \to \Gamma^d \to \begin{array}{c}\Gamma^{d-1}\otimes\Gamma^1\\ \oplus\Gamma^1\otimes\Gamma^{d-1}\end{array} \to \cdots \to \bigoplus_{k=1}^{d-2} \otimes^d \to \otimes^d \,. \tag{7.9}$$

7.2.4 Dimension homologique

Les résultats de la section 7.2.4 ne seront pas utilisés dans la suite de ce mémoire. Nous les donnons par souci d'exhaustivité (et car ils améliorent certains résultats existants sur la dimension homologique de la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux). Les algèbres de Schur sont quasi-héréditaires. On sait donc d'après [CPS2, CPS3] que pour si $\Bbbk$ est un corps ou si $\Bbbk = \mathbb{Z}$, la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est de dimension homologique finie[28]. Les résultats suivants sur la dimension homologique $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ améliorent les résultats de [Kra, CPS3] en retirant les hypothèses sur l'anneau $\Bbbk$ et généralisent les bornes obtenues dans [Tot].

Proposition 7.11. *Soit $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\ell)$ un ℓ-uplet d'entiers et soit $\Bbbk$ un anneau commutatif de dimension homologique k. Alors la catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est de dimension homologique $\leq 2\sum d_i - 2\ell + k$.*

Démonstration. Notons $S_\mathbb{Z} := \bigotimes_{i=1}^{\ell} S(d_i, \mathbb{Z}^{d_i})$, de telle sorte que $S(\mathbf{d}, V) = S_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \Bbbk$. Notons $S_\mathbb{Z}^e$ l'algèbre enveloppante de $S_\mathbb{Z}$. La suite spectrale [ERZ] :

$$E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}^s_{S^e_\mathbb{Z}}(S_\mathbb{Z}, \mathrm{Ext}^t_\Bbbk(M,N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}_{S(\mathbf{d},V)}(M,N)$$

implique l'inégalité (dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$) :

$$\mathrm{hdim}(S(\mathbf{d},V)\text{-Mod}) \leq \mathrm{pdim}^{S^e_\mathbb{Z}}(S_\mathbb{Z}) + \mathrm{hdim}(\Bbbk\text{-Mod})\ , \quad (*)$$

où 'hdim' désigne la dimension homologique, et $\mathrm{pdim}^{S^e_\mathbb{Z}}(S_\mathbb{Z})$ désigne la dimension projective du bimodule $S_\mathbb{Z}$, c'est à dire la longueur minimale (éventuellement infinie) d'une résolution projective du bimodule $S_\mathbb{Z}$.

Il existe [ABW, Thm III.1.5] une filtration *finie* du bimodule $S_\mathbb{Z}$, dont le gradué est une somme directe de modules de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^{\ell}(M_i \otimes_\mathbb{Z} N_i) \qquad (**)$$

[28]On rappelle [Wei, Chap 4] qu'une catégorie abélienne (ou plus généralement exacte) $\mathcal{A}$ avec assez de projectifs et d'injectifs est de dimension homologique $\leq d$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée : (1) tout objet X admet une résolution projective P_* avec $P_k = 0$ pour $k > d$, (2) tout objet X admet une résolution injective J^* avec $J^k = 0$ pour $k > d$, ou (3) pour tous les objets M, N on a $\mathrm{Ext}^i_\mathcal{A}(M,N) = 0$ pour $i > d$.

où chaque M_i (resp. N_i) est un $S(d_i,\mathbb{Z}^{d_i})$-module à gauche (resp. à droite) qui est libre de type fini comme $\mathbb{Z}$-module. Soit $s_i = \mathrm{hdim}(S(d_i,\mathbb{Z}^{d_i})\text{-Mod})$. Comme on a une involution $S(d_i,\mathbb{Z}^{d_i}) \simeq S(d_i,\mathbb{Z}^{d_i})^{\mathrm{op}}$, on a également $s_i = \mathrm{hdim}(S(d_i,\mathbb{Z}^{d_i})^{\mathrm{op}}\text{-Mod})$. Les bimodules de la forme $(**)$ admettent des résolutions projectives finies de longueur $\le 2\sum s_i$: il suffit de prendre le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^{\ell}(P_i\otimes_{\mathbb{Z}} Q_i)$ où les P_i (resp. Q_i) sont des résolutions projectives de M_i (resp. N_i). Comme la filtration de $S_{\mathbb{Z}}$ est finie, de longueur t par exemple, on déduit par un argument de suite exacte longue que pour tout bimodule B on a : $\mathrm{Ext}^i_{S^e_{\mathbb{Z}}}(S_{\mathbb{Z}},B) = 0$ si $i > 2\sum s_i + t$. En d'autres termes :

$$\mathrm{pdim}^{S^e_{\mathbb{Z}}}(S_{\mathbb{Z}}) \le 2\sum s_i + t < \infty\ .$$

L'inégalité $(*)$ implique donc que si $\Bbbk$ est de dimension homologique finie, alors $S(\mathbf{d},V)$-Mod est de dimension homologique finie.

De meilleures bornes sur la dimension homologique de $S(\mathbf{d},V)$-Mod peuvent maintenant être obtenues en suivant la méthode de [Tot]. Par un argument de suite exacte longue, on montre que la dimension homologique de $S(\mathbf{d},V)$-Mod est inférieure ou égale à n si et seulement si tout injectif J de $S(\mathbf{d},V)$-Mod admet une résolution projective de longueur inférieure à n. Les modules de la forme suivante, où W est un $\Bbbk$-module injectif, forment des générateurs injectifs de $S(\mathbf{d},V)$-Mod :

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S(\mathbf{d},V),W) = \left(\bigotimes_{i=1}^{\ell}\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S(d_i,\Bbbk^{d_i}),\Bbbk)\right)\otimes W\ . \qquad (***)$$

A partir des résolutions (7.9) on construit des résolutions projectives de longueur $2d_i-2$ de chacun des $S(d_i,\Bbbk^{d_i})$-modules $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(S(d_i,\Bbbk^{d_i}),\Bbbk)$. Comme ces modules sont projectifs sur $\Bbbk$, on peut tensoriser leurs résolutions projectives avec une résolution projective de longueur k de W pour obtenir une résolution de longueur $2\sum d_i - 2\ell + k$ du module $(***)$. On obtient la borne voulue. □

Corollaire 7.12. *La catégorie $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ est de dimension homologique finie si et seulement si $\Bbbk$ est de dimension homologique finie.*

Démonstration. Soit $V = (\Bbbk,\dots,\Bbbk)$ (avec ℓ termes), et M un $\Bbbk$-module. Si P est une résolution projective de $\Gamma^{\mathbf{d},V}\otimes M$, alors $P(V)$ est une résolution projective du $\Bbbk$-module $\Gamma^{\mathbf{d},V}(V)\otimes M \simeq M$. On en déduit que la dimension homologique de $\Bbbk$-Mod est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$. Ceci prouve le sens direct, la réciproque provient de la proposition 7.11. □

En reprenant l'argument de la démonstration de la proposition 7.11 dans le cadre de la catégorie exacte $S(\mathbf{d},V)$-mod, on obtient le résultat suivant.

Proposition 7.13. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif quelconque et soient $F,G\in\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(\ell)$ tels que F et G prennent des valeurs projectives de type fini. Alors $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(\ell)}(F,G) = 0$ pour $i > 2\sum d_i - 2\ell$.*

D'après la proposition 7.11, le bifoncteur $\Gamma^d\mathrm{gl} \in \mathcal{P}_{d,d,\mathbb{Z}}(1,1)$ possède une résolution projective finie. Par changement de base, il en est de même sur tout anneau $\Bbbk$ et on obtient donc le résultat suivant.

Corollaire 7.14. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et $B \in \mathcal{P}_\Bbbk(1,1)$. Si le poids de B est borné, il existe un entier i_0 tel que pour $i \geq i_0$, $H^i_{\mathrm{gl}}(B) = 0$.*

7.3 Cohomologie des bifoncteurs et du groupe linéaire

7.3.1 Le théorème d'isomorphisme et ses conséquences

Soit $F : \mathrm{P}_\Bbbk^{\mathrm{op}} \times \mathrm{P}_\Bbbk \to \Bbbk\text{-Mod}$ un bifoncteur strictement polynomial, et F_d sa composante homogène de poids total d (on a donc une décomposition $F = \bigoplus_{d\geq 0} F_d$). On rappelle la cohomologie du bifoncteur F définie à la section 6.7 :

$$H^i_{\mathrm{gl}}(F) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{2d,\Bbbk}(1,1)}(\Gamma^d\mathrm{gl}, F_{2d}) .$$

Le foncteur d'évaluation (7.3) sur $(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ envoie le bifoncteur $\Gamma^d\mathrm{gl}$ sur la représentation $\Gamma^d(\mathfrak{gl}_n)$, c'est à dire sur la d-ième puissance divisée de la représentation adjointe de GL_n. On a une application GL_n-équivariante :

$$\gamma_d : \Bbbk \to \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n) = (\mathfrak{gl}_n^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$$

définie par $\gamma_d(\lambda) = \lambda(\mathrm{Id}_{\Bbbk^n})^{\otimes d}$. En évaluant sur $(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$, puis en restreignant l'action de GL_n le long de γ_d, on obtient une application $\Bbbk$-linéaire graduée $\phi^*_{n,F}$, naturelle en F :

$$H^*_{\mathrm{gl}}(F) \xrightarrow{\phi^*_{n,F}} \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(\Bbbk, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) = H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) . \tag{7.10}$$

Comme les applications γ_d s'insèrent dans un diagramme commutatif d'applications GL_n-équivariantes :

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \arrow[r, "\gamma_{d+e}"] \arrow[d, "\simeq"] & \Gamma^{d+e}(\mathfrak{gl}_n) \arrow[d, "\Delta"] \\ \Bbbk \otimes \Bbbk \arrow[r, "\gamma_d \otimes \gamma_e"] & \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n) \otimes \Gamma^e(\mathfrak{gl}_n) \end{tikzcd}$$

l'application (7.10) respecte les cup produits.

La relation fondamentale entre cohomologie des bifoncteurs et cohomologie de GL_n est donnée par le théorème suivant.

Théorème 7.15. *[FF, 4] Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, et soit $F \in \mathrm{P}_\Bbbk(1,1)$ un bifoncteur de poids total inférieur ou égal à d. Si $2n \geq d$, alors $\phi^*_{n,F}$ est un isomorphisme en tout degré.*

Le théorème 7.15 est dû à Franjou et Friedlander dans le cas où $\Bbbk$ est un corps, et leur démonstration repose sur les résultats de [FS]. Nous décrivons ci-dessous l'approche de [4], qui est indépendante des résultats de [FS] et valable sur un anneau quelconque. Auparavant, nous listons des corollaires de notre approche du théorème 7.15.

1. **Stabilisation cohomologique.** On a une application naturelle

$$H^*(GL_{n+k}, F(\Bbbk^{n+k}, \Bbbk^{n+k})) \xrightarrow{\mathrm{res}_n^{n+k}} H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$$

obtenue en restreignant l'action de GL_{n+k} au sous-groupe $GL_n \times \{1\}$, puis en projetant la représentation $F(\Bbbk^{n+k}, \Bbbk^{n+k})$ sur $F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ au moyen de l'application GL_n équivariante $F(i, \pi)$ où les morphismes $i : \Bbbk^n \leftrightarrows \Bbbk^{n+k} : \pi$ sont définis par

$$i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0),\ \pi(x_1, \ldots, x_{n+k}) = (x_1, \ldots, x_n).$$

L'application res_n^{n+k} s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H^*(GL_{n+k}, F(\Bbbk^{n+k}, \Bbbk^{n+k})) \arrow[dd, "\mathrm{res}_n^{n+k}"] \\ H^*_{\mathrm{gl}}(F) \arrow[ur, "\phi^*_{n+k,F}"] \arrow[dr, "\phi^*_{n,F}"'] & \\ & H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)). \end{tikzcd}$$

Il découle du théorème 7.15 que si F est un bifoncteur de poids total $2d$, avec $d \leq n$ alors res_n^{n+k} est un isomorphisme. Dans la suite nous désignerons la valeur limite :

$$\lim_{\leftarrow} H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) = H^*(GL_d, F(\Bbbk^d, \Bbbk^d))$$

sous le nom de *cohomologie stable de GL_n à coefficients dans F*.

2. **Produits en cohomologie stable.** Nous avons démontré à la section 6.7 que le cup produit en cohomologie des bifoncteurs est injectif. Comme $\phi^*_{n,F}$ est compatible aux cup produits, on obtient que si F, G sont deux bifoncteurs de poids total inférieur ou égal à $2d$, resp. $2e$, et si $n \geq d + e$ alors le cup produit induit une injection :

$$H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \otimes H^*(GL_n, G(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \hookrightarrow H^*(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n) \otimes G(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) .$$

3. **L'isomorphisme de Friedlander et Suslin.** Soient $F, G \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ et soit $\mathrm{Hom}_\Bbbk(F, G)$ leur Hom externe (cf. exemple 6.8). Si F prend des

valeurs $\Bbbk$-projectives de type fini, alors pour tout n on a un diagramme commutatif, naturel en F, G :

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_\Bbbk(F,G)) \arrow[r, "\phi^*_{n,\mathrm{Hom}_\Bbbk(F,G)}"] \arrow[d, "\simeq"] & H^*(GL_n, \mathrm{Hom}_\Bbbk(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(F,G) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\Bbbk^n}"] & \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))
\end{tikzcd}$$

où (a) est l'isomorphisme (6.21) donné à la section 6.6 et (b) est l'isomorphisme analogue dans la catégorie des représentations de GL_n [Jan, I.4.4]. En particulier, comme les projectifs standard de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ prennent des valeurs $\Bbbk$-projectives de type fini, il découle du théorème 7.15 que l'évaluation un isomorphisme pour tout projectif P, pour tout G et tout entier $n \geq d$:

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(P,G) \xrightarrow[\mathrm{ev}_{\Bbbk^n}]{\simeq} \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(P(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \ . \tag{7.11}$$

Si F est un foncteur strictement polynomial arbitraire, homogène de poids d, on peut prendre une résolution projective de F et déduire de l'isomorphisme (7.11) que l'évaluation sur $\Bbbk^n$ induit pour tout $n \geq d$ un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(F,G) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \ .$$

Ce résultat est dû à Friedlander et Suslin lorsque $\Bbbk$ est un corps [FS, Cor 3.13].

4. **Représentations polynomiales et rationnelles.** On a un diagramme commutatif de catégories :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{d,\Bbbk}(k) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\Bbbk^n}", "(1)"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{\Bbbk^n}", "(2)"'] & GL_n\text{-Mod} \\
S(d,\Bbbk^n)\text{-Mod} \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Pol}_d\text{-}GL_n\text{-Mod} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \quad . \tag{7.12}$$

Si $n \geq d$ alors l'application (1) induit des isomorphismes en Ext d'après le point précédent, et l'application (2) est une équivalence de catégories d'après le théorème 7.2. Il découle alors de la commutativité du diagramme que l'inclusion

$$\mathrm{Pol}_d\text{-}GL_n\text{-Mod} \hookrightarrow GL_n\text{-Mod}\ ,$$

induit un isomorphisme en Ext^* si $n \geq d$. Nous retrouvons ainsi un résultat initialement dû à Donkin [Don2, Don3] (voir aussi [FS, Thm 3.12]).

7.3.2 Démonstration du théorème d'isomorphisme

Le point principal de la démonstration du théorème 7.15 est de démontrer le cas des puissances symétriques. Plus précisément, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :

(A) $H^i(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) = 0$ pour $i > 0$,

(B) $\phi^0_{n,F}$ est un isomorphisme pour $n \geq d$,

pour les bifoncteurs F de la forme (pour tout $k \geq 0$ et tout $\ell \geq 0$)

$$J^d_{k,\ell} : (V, W) \mapsto S^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk^k) \oplus \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^\ell, W)) \,.$$

La vérification de la condition d'annulation (A) découle d'un argument de bonne filtration. L'injectivité dans la condition (B) découle essentiellement du lemme de Yoneda. La surjectivité dans la condition (B) est démontrée en s'appuyant sur la théorie classique des invariants, plus précisément sur le premier théorème fondamental de la théorie des invariants pour $GL_n(\mathbb{C})$. Une fois démontré le cas où $F = J^d_{k,\ell}$, on peut démontrer le théorème 7.15 pour les bifoncteurs F injectifs, puis pour tous les bifoncteurs par un argument de δ-foncteurs. Nous donnons maintenant les détails de la démonstration.

Condition (A). D'après le lemme 5.17, il suffit de démontrer la condition (A) pour un corps $\Bbbk$. Le GL_n-module $J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ peut se décomposer sous la forme (en notant '$^\vee$' la dualité $\Bbbk$-linéaire) :

$$\bigoplus_{d_1+\cdots+d_{k+\ell}=d} S^{d_1}(\Bbbk^{n\vee}) \otimes \cdots \otimes S^{d_k}(\Bbbk^{n\vee}) \otimes S^{d_{k+1}}(\Bbbk^n) \otimes \cdots \otimes S^{d_{k+\ell}}(\Bbbk^n) \,.$$

Mais si $\Bbbk$ est un corps, on peut explicitement identifier [Jan, II.2.16] :

$$S^r(\Bbbk^n) \simeq \nabla_{(r,0,\dots,0)} \qquad S^r(\Bbbk^{n\vee}) = \nabla_{(0,0,\dots,-r)} \,.$$

Comme le produit tensoriel de modules avec bonnes filtrations possède une bonne filtration, on en déduit que le GL_n-module $J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ possède une bonne filtration. Ceci implique la condition (A).

Condition (B) : injectivité. Nous allons en fait montrer l'injectivité de $\phi^0_{n,F}$ pour tout F de poids total d tel que $2n \geq d$. On peut se restreindre au cas d'un bifoncteur F bihomogène de poids (e_1, e_2). Si $e_1 \neq e_2$ alors la cohomologie de F est nulle, et $\phi^0_{n,F}$ est trivialement injective. On suppose donc F bihomogène de poids (e, e) et donc de poids total $d = 2e$. Les projectifs standards de $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1, 1)$ sont les (sommes directes) de foncteurs de la forme

$$P^{e_1,e_2}_{k,\ell} : (V, W) \mapsto \Gamma^{e_1}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk^k)) \otimes \Gamma^{e_2}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^\ell, W)) \,.$$

Le lemme suivant découle de l'équivalence entre foncteurs strictement polynomiaux et modules sur les algèbres de Schur, cf. proposition 6.18 et théorème 7.2.

Lemme 7.16. *Soit $n \geq e$. La composition dans $\Gamma^e(\mathrm{P}_{\Bbbk})$ fournit un morphisme surjectif*
$$\theta : P^{e,e}_{n,n} \twoheadrightarrow \Gamma^e \mathrm{gl}\ .$$

En conséquence, pour tout F bihomogène de poids (e,e) et tout $n \geq e$, on a un diagramme commutatif dans lequel l'isomorphisme horizontal est fourni par le lemme de Yoneda :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)}(P^{e,e}_{n,n}, F) \arrow[r, "\simeq"] & F(\Bbbk^n, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)}(\Gamma^e \mathrm{gl}, F) \arrow[u, hook, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)}(\theta,F)"] \arrow[r, "\phi^0_{n,F}"] & H^0(GL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

On a donc l'injectivité de $\phi^0_{n,F}$ pour tout F et tout n tel que $2n \geq d$.

Condition (B) : isomorphisme. Nous avons montré que l'application $\phi^0_{n,F}$ est injective pour $F = J^d_{k,\ell}$ si $2n \geq d$. Nous allons maintenant montrer que c'est un isomorphisme. D'après le lemme suivant, il suffit de montrer la surjectivité dans le cas où l'anneau de base est $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Lemme 7.17. *Fixons des entiers d, k, ℓ, et notons*

$$\phi_{\Bbbk} : H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell}) \to H^0(GL_{n,\Bbbk}, J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$$

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout anneau commutatif $\Bbbk$, l'application $\phi_{\Bbbk}$ est un isomorphisme.

(ii) L'application $\phi_{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme.

(iii) L'application $\phi_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme.

Démonstration. La condition (A) implique que $H^1(GL_{n,\mathbb{Z}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n))$ est nul. Le groupe $H^1_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell})$ est également nul. on a donc un diagramme commutatif, dont les morphismes horizontaux sont les isomorphismes fournis par le changement de base :

$$\begin{tikzcd} H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\phi_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk"] & H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell}) \arrow[d, "\phi_{\Bbbk}"] \\ H^0(GL_{n,\mathbb{Z}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \arrow[r, "\simeq"] & H^0(GL_{n,\Bbbk}, J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \end{tikzcd}$$

On a donc clairement (i) $\Leftrightarrow$ (ii), et (ii) $\Rightarrow$ (iii). Il reste à montrer (iii) $\Rightarrow$ (ii). Comme $\phi_{\Bbbk}$ est injective pour tout $\Bbbk$ (injectivité dans la condition (B) démontrée précédemment), on a une suite exacte courte de $\Bbbk$-modules :

$$0 \to H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \xrightarrow{\phi_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk} H^0(GL_{n,\mathbb{Z}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \to C_{\mathbb{Z}} \otimes \Bbbk \to 0$$

dans laquelle C désigne le conoyau de $\phi_{\mathbb{Z}}$. Les groupes abéliens $H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell})$ et $H^0(GL_{n,\mathbb{Z}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{Z}^n,\mathbb{Z}^n))$ sont libres de rangs finis. Notons r et r' leurs rangs respectifs. Alors le groupe abélien C est de type fini, et pour tout corps $\Bbbk$ la dimension de $C\otimes_{\mathbb{Z}}\Bbbk$ est égale à $r'-r$. Ceci signifie que C est un groupe abélien libre de rang $r'-r$. En particulier, si $\phi_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme, alors $r'=r$ donc $C=0$ donc $\phi_{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme. □

On suppose donc que $\Bbbk=\mathbb{C}$. Nous allons montrer la surjectivité de $\phi^0_{n,F}$ pour les bifoncteurs $F=J^d_{k,\ell}$ pour tous les $d\geq 0$ simultanément. On considère la somme directe $J_{k,\ell}=\bigoplus_{d\geq 0} J^d_{k,\ell}$. C'est une algèbre, et

$$\phi^0 : H^0_{\mathrm{gl}}(J_{k,\ell}) \to H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$$

est un morphisme d'algèbres. Pour montrer que ϕ^0 est surjectif, il suffit donc de montrer que les générateurs de l'algèbre de droite sont dans l'image de ϕ^0. Mais l'algèbre de droite est un objet de la théorie classique des invariants dont un ensemble de générateurs a été déterminé par Weyl. Précisément, soit $(i|j) : ((\mathbb{C}^n)^{\oplus k}\oplus \mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus \ell}\to\mathbb{C}$ la « contraction » définie par

$$(i|j)(v_1,\dots,v_k,f_1,\dots,f_\ell)=f_j(v_i)\ .$$

Alors $(i|j)$ est un élément invariant sous GL_n de l'algèbre

$$J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)=S((\mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus k}\oplus(\mathbb{C}^n)^{\oplus \ell})\ .$$

Théorème 7.18. *[Wey] Les contractions $(i|j)$, pour $1\leq i\leq k$ et $1\leq j\leq \ell$, engendrent l'algèbre des invariants $H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$.*

Pour achever la démonstration de la condition (B), il nous suffit donc de montrer que les éléments $(i|j)$ sont dans l'image de ϕ^0. Notons $c\in\mathbb{C}^{n\vee}\otimes\mathbb{C}^n\subset S(\mathbb{C}^{n\vee}\oplus\mathbb{C}^n)$ l'élément correspondant à $\mathrm{Id}\in\mathfrak{gl}_n$ via l'identification $\mathfrak{gl}_n\simeq\mathbb{C}^{n\vee}\otimes\mathbb{C}^n$. Notons $\iota_{i,j}:\mathbb{C}^{n\vee}\oplus\mathbb{C}^n\to(\mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus k}\oplus(\mathbb{C}^n)^{\oplus\ell}$ le morphisme qui envoie $\mathbb{C}^{n\vee}$ (resp. $\mathbb{C}^n$) isomorphiquement sur le i-ème facteur $\mathbb{C}^{n\vee}$ (resp. le j-ième facteur $\mathbb{C}^n$) de la somme directe. Alors le morphisme d'algèbres $S(\iota_{i,j}) : S(\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^{n\vee})\to J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ envoie c sur la contraction $(i|j)$. On a un diagramme commutatif où les morphismes verticaux sont induits par $\iota_{i,j}$:

$$\begin{tikzcd} H^0_{\mathrm{gl}}(J_{k,\ell}) \arrow[r, "\phi^0"] & H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)) \\ H^0_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I,I)) \arrow[u] \arrow[r, "\phi^0"] & H^0(GL_n,\mathfrak{gl}_n) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{7.13}$$

Ainsi, pour montrer que les contractions sont dans l'image de ϕ^0, il suffit de montrer que l'application ϕ^0 du bas du diagramme possède Id dans son image. Ce qui est trivialement vérifié par définition de ϕ.

Fin de la démonstration. Par définition, $\phi^*_{n,F}$ est un morphisme de δ-foncteurs. Pour démontrer le théorème 7.15, il suffit donc de démontrer que les $\phi^*_{n,F}$ sont des isomorphismes si F est un injectif standard. Les injectifs standard de $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ homogènes de poids total d sont les bifoncteurs de la forme suivante (avec $d_1 + d_2 = d$)

$$(V, W) \mapsto S^{d_1}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk^k)) \otimes S^{d_2}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^\ell, W)) \otimes N \;,$$

où N est un $\Bbbk$-module injectif. Ce sont donc des facteurs directs des bifoncteurs $J^d_{k,\ell} \otimes N$. Pour démontrer que les $\phi^*_{n,F}$ sont des isomorphismes si F est un injectif standard, il suffit donc de démontrer que les conditions (A) et (B) sont vérifiées pour les foncteurs $J^d_{k,\ell} \otimes N$. Nous avons déjà démontré que les conditions (A) et (B) sont vérifiées pour les bifoncteurs $J^d_{k,\ell}$. Ces conditions sont donc vérifiées pour les bifoncteurs $J^d_{k,\ell} \otimes N$ en vertu des deux lemmes suivants. Ceci achève la démonstration du théorème 7.15.

Lemme 7.19. *Pour tout $\Bbbk$-module N, on a $H^{>0}(GL_n, J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n) \otimes N) = 0$ et le cup produit induit un isomorphisme*

$$H^0(GL_n, J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) \otimes_{\Bbbk} N \xrightarrow{\simeq} H^0(GL_n, J^d_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n) \otimes N) \;.$$

Démonstration. Appliquer le lemme 5.11 avec $G = GL_{n,\mathbb{Z}}$, M la représentation $J^d_{k,\ell}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n)$, H le schéma en groupes trivial sur $\Bbbk$. □

Lemme 7.20. *Pour tout $\Bbbk$-module N, le cup produit induit un isomorphisme*

$$H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell}) \otimes N \xrightarrow{\simeq} H^0_{\mathrm{gl}}(J^d_{k,\ell} \otimes N) \;.$$

Démonstration. Le résultat découle du lemme de Yoneda (6.12). □

7.3.3 Théorème d'isomorphisme et théorie classique des invariants

Dans ce paragraphe nous donnons quelques explications sur les liens entre les foncteurs strictement polynomiaux et la théorie classique des invariants à la lumière de la démonstration du théorème d'isomorphisme 7.15.

Il y a une différence importante entre la démonstration du théorème d'isomorphisme donnée dans ce mémoire et la démonstration donnée dans [4]. Grâce au lemme 7.17, nous n'utilisons ici que le résultat de Weyl, c'est à dire le théorème fondamental pour GL_n en caractéristique nulle. Dans [4], nous utilisions le premier théorème fondamental en toute caractéristique, dû à De Concini et Procesi [DCP]. Ceci a deux conséquences.

1. On peut déduire du théorème d'isomorphisme 7.15 une nouvelle démonstration du résultat de De Concini et Procesi, de la façon suivante. Si λ et μ sont deux uplets d'entiers strictement positifs, si

$F = \Gamma^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_k}$ et $G = S^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes S^{\mu_\ell}$, les morphismes canoniques $F \hookrightarrow \otimes^d$ et $\otimes^d \twoheadrightarrow G$ induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\otimes^d, \otimes^d) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{GL_n}((\Bbbk^n)^{\otimes d}, (\Bbbk^n)^{\otimes d}) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(F, G) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathrm{Hom}_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \end{tikzcd} .$$

Par un argument de bonne filtration, les morphismes verticaux sont surjectifs, et par un calcul direct le morphisme d'évaluation du haut du diagramme est également surjectif. En conséquence, l'évaluation sur la paire $(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ induit pour tout k, ℓ un morphisme surjectif

$$H^0_{\mathrm{gl}}(J_{k,\ell}) \twoheadrightarrow H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n)) .$$

Mais on peut calculer explicitement $H^0_{\mathrm{gl}}(J_{k,\ell})$ par le lemme de Yoneda. On obtient que $H^0_{\mathcal{P}_\Bbbk}(J_{k,\ell})$ est une algèbre symétrique sur le $\Bbbk$-module libre $H^0_{\mathrm{gl}}(J^2_{k,\ell})$. On calcule facilement une base explicite de ce $\Bbbk$-module libre, et en reprenant le diagramme (7.13) on peut montre que les éléments de cette base sont envoyés sur les contractions de $H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$. On a donc démontré le premier théorème fondamental en toute caractéristique de [DCP] : l'algèbre $H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$ est engendrée par les contractions.

2. Les démonstrations pour les autres groupes classiques seront calquées sur la démonstration pour GL_n, et reposeront donc sur les théorèmes fondamentaux en caractéristique zéro plutôt que sur les théorèmes fondamentaux en toute caractéristique. Dans [DCP], De Concini et Procesi prouvent le premier théorème fondamental pour une forme non déployée du groupe orthogonal en caractéristique 2. Or nous avons besoin de l'énoncé pour une forme déployée (pour pouvoir bénéficier simultanément des annulations cohomologiques fournies par le théorème de Kempf). Pour cette raison, le groupe (spécial) orthogonal n'était pas traité dans [4] en caractéristique 2. Nous sommes maintenant en mesure de le traiter.

Le premier théorème fondamental pour GL_n donne une famille de générateurs pour l'algèbre d'invariants $H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$. Ces générateurs sont en poids 2, i.e. ce sont des éléments de $J^2_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$. On dispose également d'un second théorème fondamental (qui n'a pas été utilisé dans la démonstration du théorème 7.15) et qui donne les relations entre les générateurs. Ces relations sont engendrées par des expressions déterminantielles de la forme suivantes :

$$\begin{vmatrix} (i_1|j_1) & \dots & (i_{n+1}|j_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (i_1|j_{n+1}) & \dots & (i_{n+1}|j_{n+1}) \end{vmatrix}$$

En particulier, il n'y a pas de relations en poids total $d \leq 2n$. Le théorème d'isomorphisme dit que la cohomologie $H^0_{\mathrm{gl}}(J_{k,\ell})$ correspond exactement à la « partie sans relation » de l'algèbre d'invariants $H^0(GL_n, J_{k,\ell}(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$. En d'autres termes, faire des calculs de Hom dans $\mathcal{P}_\Bbbk$ revient à faire des calculs de théorie des invariants en négligeant les relations. Ceci apporte un éclairage sur le fait que les calculs dans la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux sont nettement plus faciles à effectuer que les calculs d'invariants dans la catégorie des GL_n-modules.

7.4 Cohomologie des foncteurs et des groupes classiques

L'approche développée dans [4] pour démontrer le théorème 7.15 peut s'adapter à d'autres cohomologies de foncteurs (au sens de la section 6.7) et à d'autres schémas en groupes avec seulement quelques changements mineurs dans la démonstration. Nous donnons ci-dessous une liste de théorèmes ainsi que des indications sur les changements à effectuer.

7.4.1 Type A : Groupes spéciaux linéaires

On définit une application :

$$'\phi^*_{n,F} : H^*_{\mathrm{gl}}(F) \to H^*(SL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$$

comme la composée du morphisme ϕ^*_F du théorème 7.15 et de la restriction de la cohomologie de GL_n à SL_n. L'énoncé du théorème suivant est très proche de celui du théorème 7.15, la différence majeure est la borne sur n.

Théorème 7.21. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et soit $F \in \mathcal{P}_\Bbbk(1,1)$ un bifoncteur strictement polynomial de poids total inférieur ou égal à d. Si $n \geq d+1$, alors*

$$'\phi^*_{n,F} : H^*_{\mathrm{gl}}(F) \to H^*(SL_n, F(\Bbbk^n, \Bbbk^n))$$

est un isomorphisme en tout degré.

Le corollaire suivant est équivalent à l'énoncé du théorème 7.21.

Corollaire 7.22. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. Si $F \in \mathcal{P}_\Bbbk(1,1)$ est un bifoncteur strictement polynomial de poids total inférieur ou égal à d et $n \geq d+1$, alors la restriction de GL_n à SL_n induit un isomorphisme en cohomologie.*

La démonstration du théorème 7.21 est calquée sur celle du théorème 7.15. La condition (A) est assurée par un argument de bonne filtration : les puissances symétriques $S^r(\Bbbk^n)$ et $S^r(\Bbbk^{n\vee})$ admettent une bonne filtration pour SL_n. Ceci est expliqué dans [AJ, p. 508], ou utiliser [SvdK, prop. 2.2] pour $S(\Bbbk^n)$ et les deux dualités [Jan, II.2.13 (1) et (2)] pour obtenir le cas de $S(\Bbbk^{n\vee})$ à partir du précédent.

L'injectivité pour la condition (B) est identique au cas de GL_n. Pour la surjectivité, on examine le premier théorème fondamental pour le groupe spécial linéaire. Les contractions $(i|j)$ donnent des invariants sous l'action de $GL_{n,\mathbb{C}}$ (donc sous l'action de $SL_{n,\mathbb{C}}$) de l'algèbre

$$J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = S((\mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus k} \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus \ell}) .$$

On a également des invariants déterminantiels $[i_1, \dots, i_n] : (\mathbb{C}^n)^{\oplus k} \to \Bbbk$ et $[j_1, \dots, j_n] : (\mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus \ell} \to \Bbbk$ définis par :

$$\begin{aligned} [i_1, \dots, i_n](v_1, \dots, v_n) &= \det[v_{i_1}| \dots |v_{i_n}] , \\ [j_1, \dots, j_n](f_1, \dots, f_n) &= \det[f_{i_1}| \dots |f_{i_n}] . \end{aligned}$$

Théorème 7.23. *[Wey] Les contractions $(i|j)$ et les invariants déterminantiels $[i_1, \dots, i_n]$, $[j_1, \dots, j_n]$, engendrent l'algèbre des invariants $H^0(SL_{n,\mathbb{C}}, J_{k,\ell}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n))$.*

On remarque que les invariants déterminantiels sont de degré n pour la graduation usuelle de l'algèbre symétrique. En particulier, si $n > d$ alors on a un isomorphisme

$$H^0(GL_{n,\mathbb{C}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)) \simeq H^0(SL_{n,\mathbb{C}}, J^d_{k,\ell}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)) .$$

La surjectivité de $'\phi^0_{n,J^d_{k,\ell}}$ suit donc de celle de l'application $\phi^0_{n,J^d_{k,\ell}}$ pour GL_n. Ceci achève la démonstration du théorème 7.21.

7.4.2 Type C : Groupes symplectiques

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. On considère le schéma en groupes symplectiques $Sp_{2n} = Sp_{2n,\Bbbk} \subset GL_{2n,\Bbbk}$. Ce schéma en groupes agit sur $\Lambda^2(\Bbbk^{2n\vee})$. Si $(e_i^\vee)$ désigne la base duale de la base canonique de $\Bbbk^{2n}$, la forme symplectique standard

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e_i^\vee \wedge e_{i+n}^\vee$$

est invariante sous l'action de Sp_{2n}. On a donc une application Sp_{2n}-équivariante notée γ^d comme dans le cas du groupe linéaire :

$$\gamma_d : \Bbbk \to \Gamma^d\left(\Lambda^2(\Bbbk^{2n\vee})\right) = \left(\Lambda^2(\Bbbk^{2n\vee})^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d} ,$$

qui envoie $\lambda \in \Bbbk$ sur $\gamma_d(\lambda) = \omega^{\otimes d}$. Si $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$ est un foncteur strictement polynomial de composantes homogènes F_d, on considère sa cohomologie

$$H^*_{\Lambda^2}(F) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^d \circ \Lambda^2, F_{2d}) .$$

On définit alors une application graduée compatible aux cup produits (notée $\phi^*_{2n,F}$ comme dans le cas de GL_{2n}) par évaluation sur $\Bbbk^{2n\vee}$ et par restriction le long de γ_d :

$$\phi^*_{2n,F} : H^*_{\Lambda^2}(F) \to H^*(Sp_{2n}, F(\Bbbk^{2n\vee})) .$$

Théorème 7.24. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, et soit $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$ un foncteur strictement polynomial de poids inférieur ou égal à d. Si $2n \geq d$ alors $\phi^*_{2n,F}$ est un isomorphisme.*

La démonstration est calquée sur celle du théorème 7.15. A la place des bifoncteurs $J^d_{k,\ell}$, on considère les foncteurs $J^d_k : V \mapsto S^d(\mathrm{Hom}(\Bbbk^k, V))$. La condition (A) découle d'un argument de bonne filtration [AJ, p.508] ou [Jan, II.2.17]. La démonstration de l'injectivité dans la condition (B) est analogue au cas de GL_n, en remplaçant le lemme 7.16 par la variante suivante.

Lemme 7.25. *Soit $n \geq d \geq 1$. Il existe un morphisme surjectif*

$$\theta' : \Gamma^{2d,\Bbbk^{2n\vee}} \twoheadrightarrow \Gamma^d \circ \Lambda^2$$

tel que $\theta'_{\Bbbk^{2n\vee}}$ envoie l'élément $\mathrm{Id}^{\otimes d}_{\Bbbk^{2n\vee}}$ sur $\omega^{\otimes d}$.

Démonstration. Soient $V = \Bbbk^n$ et $V' = \Bbbk^n$ deux $\Bbbk$-modules libres de bases respectives $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$. On note $e_i^\vee$ les éléments des bases duales. On définit θ' comme la composée :

$$\Gamma^{2d,(V\oplus V')^\vee} \twoheadrightarrow \Gamma^{d,V^\vee} \otimes \Gamma^{d,V'^\vee} \simeq \Gamma^{d,V^\vee} \otimes \Gamma^{d,V} \twoheadrightarrow \Gamma^d \circ \otimes^2 \twoheadrightarrow \Gamma^d \circ \Lambda^2 .$$

Dans cette composée, le morphisme de gauche est la projection associée à la décomposition canonique $\Gamma^{d,(V\oplus V')^\vee} \simeq \bigoplus_{d_1+d_2=d} \Gamma^{d_1,V^\vee} \otimes \Gamma^{d_2,V'^\vee}$. L'isomorphisme du milieu est induit par l'isomorphisme $V'^\vee \simeq V$ qui envoie chaque vecteur $e^\vee_{i+n}$ de la base duale sur le vecteur e_i. Le troisième morphisme :

$$\Gamma^d(\mathrm{Hom}_\Bbbk(U^\vee, V)) \otimes \Gamma^d(\mathrm{Hom}_\Bbbk(V, U)) \to \Gamma^d(\mathrm{Hom}_\Bbbk(U^\vee, U))$$

est induit par la composition dans $\Gamma^d(\mathrm{P}_\Bbbk)$, et est surjectif car V est un $\Bbbk$-module libre de rang $n \geq d$. Le dernier morphisme est induit par la surjection canonique $\otimes^2 \twoheadrightarrow \Lambda^2$. □

Enfin la surjectivité dans la condition (B) est analogue au cas de GL_n, en utilisant le premier théorème fondamental pour $Sp_{2n,\mathbb{C}}$. On a des contractions $< i|j >: (\mathbb{C}^{2n})^{\oplus k} \to \mathbb{C}$, définies par

$$< i|j > (v_1, \dots, v_k) = \omega(v_i, v_j) .$$

Ces contractions définissent des éléments invariants sous l'action du groupe symplectique dans l'algèbre $J_k(\mathbb{C}^{2n\vee}) = S((\mathbb{C}^{2n\vee})^{\oplus k})$.

Théorème 7.26. *[Wey] Les contractions $< i|j >$ pour $1 \leq i < j \leq k$ engendrent l'algèbre des invariants $H^0(Sp_{2n,\mathbb{C}}, J_k(\mathbb{C}^{2n\vee}))$.*

7.4.3 Types B et D : Groupes spéciaux orthogonaux

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. On considère le schéma en groupes spéciaux orthogonaux $SO_n = SO_{n,\Bbbk} \subset GL_{n,\Bbbk}$. Ce schéma en groupes agit sur $S^2(\Bbbk^{n\vee})$. La forme quadratique standard q_n est invariante sous l'action de SO_n. Si $(e_i^\vee)$ désigne la base duale de la base canonique de $\Bbbk^n$, cette forme quadratique standard est donnée suivant la parité de n par :

$$q_{2m} = \sum_{i=1}^{m} e_i^\vee e_{i+m}^\vee \;, \qquad q_{1+2m} = e_0^\vee e_0^\vee + \sum_{i=1}^{m} e_i^\vee e_{i+m}^\vee \;.$$

On a donc une application SO_n-équivariante notée γ^d comme dans le cas du groupe linéaire :

$$\gamma_d : \Bbbk \to \Gamma^d\left(S^2(\Bbbk^{n\vee})\right) = \left(S^2(\Bbbk^{n\vee})^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d} \;,$$

qui envoie $\lambda \in \Bbbk$ sur $\gamma_d(\lambda) = q_n^{\otimes d}$. Si $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$ est un foncteur strictement polynomial de composantes homogènes F_d, on considère sa cohomologie

$$H^*_{S^2}(F) = \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^d \circ S^2, F_{2d}) \;.$$

On définit alors une application graduée compatible aux cup produits (notée $\phi^*_{n,F}$ comme dans le cas de GL_n) par évaluation sur $\Bbbk^{n\vee}$ et par restriction le long de γ_d :

$$\phi^*_{n,F} : H^*_{S^2}(F) \to H^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \;.$$

Théorème 7.27. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, et soit $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$ un foncteur strictement polynomial de poids inférieur ou égal à d. Si $n \geq d+1$ alors $\phi^*_{n,F}$ est un isomorphisme.*

La démonstration est calquée sur celle du théorème 7.15. A la place des bifoncteurs $J^d_{k,\ell}$, on considère les foncteurs $J^d_k : V \mapsto S^d(\mathrm{Hom}(\Bbbk^k, V))$. La condition (A) découle d'un argument de bonne filtration [AJ, p.509] ou [Jan, II.2.18]. Pour démontrer l'injectivité dans la condition (B), on distingue deux cas. Si $n = 2m$ on procède comme pour le groupe linéaire, en remplaçant le lemme 7.16 par la variante suivante, dont la démonstration est similaire à celle du lemme 7.25.

Lemme 7.28. *Soit $n = 2m$ avec $n \geq d \geq 1$. Il existe un morphisme surjectif*

$$\theta' : \Gamma^{2d,\Bbbk^{2m\vee}} \twoheadrightarrow \Gamma^d \circ S^2$$

tel que $\theta'_{\Bbbk^{2m\vee}}$ envoie l'élément $\mathrm{Id}^{\otimes d}_{\Bbbk^{2m\vee}}$ sur $q_{2m}^{\otimes d}$.

Le cas $n = 1+2m$ est démontré à partir du cas $n = 2m$. Plus précisément, l'inclusion $\{1\} \times O_{2m} \hookrightarrow O_{1+2m}$, induit une inclusion $SO_{2m} \hookrightarrow SO_{1+2m}$. En restreignant l'action de SO_{1+2m} sur $F(\Bbbk^{1+2m})$ à SO_{2m} puis en projetant sur le facteur direct $F(\Bbbk^{2m})$ de $F(\Bbbk^{1+2m})$, on obtient une application de restriction qui s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^0_{S^2}(F) \arrow[r, "\phi^0_{1+2m,F}"] \arrow[dr, "\phi^0_{2m,F}"'] & H^0(SO_{1+2m}, F(\Bbbk^{1+2m\vee})) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ & H^0(SO_{2m}, F(\Bbbk^{2m\vee})) \end{tikzcd} .$$

Comme $\phi^0_{2m,F}$ est injective si $2m \geq d$, on en déduit l'injectivité de $\phi^0_{1+2m,F}$ sous la même condition.

Enfin la surjectivité dans la condition (B) repose sur le premier théorème fondamental pour $SO_{n,\mathbb{C}}$. On dispose de deux types d'invariants évidents sous l'action de $SO_{n,\mathbb{C}}$ dans l'algèbre $J_k(\mathbb{C}^{n\vee}) = S((\mathbb{C}^{n\vee})^{\oplus k})$. Tout d'abord les contractions $(i|j) : (\mathbb{C}^n)^{\oplus k} \to \mathbb{C}$

$$(i|j)(v_1, \dots, v_k) = B(v_i, v_j)$$

où $B(v, w) = q_n(v + w) - q_n(v) - q_n(w)$. On a également des invariants déterminantiels

$$[i_1, \dots, i_n](v_1, \dots, v_n) = \det[v_{i_1}| \dots |v_{i_n}] .$$

Théorème 7.29. *[Wey] Les contractions $(i|j)$ et les invariants déterminantiels $[i_1, \dots, i_n]$ engendrent l'algèbre des invariants $H^0(SO_{n,\mathbb{C}}, J_k(\mathbb{C}^{n\vee}))$.*

Les invariants déterminantiels sont de degré n pour la graduation usuelle de l'algèbre symétrique. En particulier, les invariants de l'algèbre tronquée

$$J_k^{<n}(\mathbb{C}^{n\vee}) = \bigoplus_{d<n} J_k^d(\mathbb{C}^{n\vee})$$

sont engendrés par les contractions $(i|j)$. Par le même raisonnement que pour les groupes linéaires, on vérifie que ces contractions sont dans l'image du morphisme d'algèbres

$$\phi^0 : H^0_{\mathrm{gl}}(J_k^{<n}) \to H^0(SO_{n,\mathbb{C}}, J_k^{<n}(\mathbb{C}^{n\vee})) .$$

Ainsi ϕ^0 est surjectif, ce qui prouve la surjectivité dans la condition (B).

7.4.4 Application aux groupes orthogonaux

Nous donnons maintenant une application du théorème 7.27 au cas des groupes orthogonaux.

Théorème 7.30. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, et soit $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$ un foncteur strictement polynomial de poids inférieur ou égal à d. Si $n \geq d+1$ alors on a un isomorphisme gradué naturel en F :*

$$H^*((O_n/SO_n) \times SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \simeq H^*(O_n, F(\Bbbk^{n\vee}))\ .$$

où le schéma en groupes O_n/SO_n agit trivialement sur $F(\Bbbk^{n\vee})$ et le schéma en groupes SO_n agit avec l'action usuelle sur $F(\Bbbk^{n\vee})$.

Le point remarquable du théorème 7.30 est que l'action de O_n/SO_n est triviale. Le théorème sépare donc la cohomologie du groupe orthogonal en une contribution de $H^*(O_n/SO_n, \Bbbk)$ d'une part et une contribution de la cohomologie de SO_n à coefficients dans $F(\Bbbk^{n\vee})$ qui est calculable par la cohomologie $H^*_{S^2}(F)$ en vertu du théorème 7.27. Cette séparation est plus apparente si $\Bbbk$ est un corps. Dans ce cas, le théorème de Künneth permet de réécrire la cohomologie de gauche comme un produit tensoriel, et de réécrire le théorème 7.30 sous la forme suivante.

Corollaire 7.31. *Soit $\Bbbk$ un corps et soit $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$ un foncteur strictement polynomial de poids inférieur ou égal à d. Si $n \geq d+1$ alors on a un isomorphisme gradué naturel en F :*

$$H^*(O_n/SO_n, \Bbbk) \otimes H^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \simeq H^*(O_n, F(\Bbbk^{n\vee}))\ .$$

La démonstration du théorème 7.30 repose sur deux lemmes auxiliaires qui découlent du théorème 7.27, et que nous expliquons maintenant. La forme quadratique standard q_n est invariante par l'action de O_n. Le morphisme $\phi^*_{n,F}$ défini pour SO_n à la section précédente 7.4.3 factorise donc sous la forme :

$$\begin{tikzcd} H^*_{S^2}(F) \arrow[r, "(*)"] \arrow[dr, "\phi^*_{n,F}"'] & H^*(O_n, F(\Bbbk^{n\vee}))\ . \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ & H^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \end{tikzcd} \qquad (7.14)$$

L'action naturelle de O_n/SO_n sur $H^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee}))$ est triviale sur l'image du morphisme de restriction. Sous les conditions du théorème, le morphisme $\phi^*_{n,F}$ est un isomorphisme (donc surjectif). On a donc le résultat suivant.

Lemme 7.32. *Pour tout foncteur F strictement polynomial de poids $< n$, l'action naturelle de O_n/SO_n sur $H^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee}))$ est triviale.*

Si K est un O_n/SO_n-module et F un foncteur strictement polynomial, on peut considérer le produit tensoriel $K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})$ comme un O_n-module (avec action diagonale) ou comme un $(O_n/SO_n) \times SO_n$-module (avec action de chacun des groupes sur le facteur correspondant du produit tensoriel). Le lemme suivant regroupe les propriétés des modules de ce type.

Lemme 7.33. *Supposons que K est une somme directe de O_n/SO_n-modules du type $\Bbbk[O_n/SO_n]$, et que F est un foncteur de poids $< n$. On a un isomorphisme naturel en K et en F :*

$$(K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{O_n} \simeq (K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{(O_n/SO_n)\times SO_n} .$$

Supposons de plus que F est injectif. Alors on a

$$H^{>0}(O_n, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})) = 0 = H^{>0}((O_n/SO_n) \times SO_n\,,\, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})) .$$

Démonstration. Notons $G_{\mathbb{Z}} = O_{n,\mathbb{Z}}/SO_{n,\mathbb{Z}}$ et $K_{\mathbb{Z}}$ une somme directe de copies de $\mathbb{Z}[G_{\mathbb{Z}}]$ de sorte que par changement de base on ait $G_{\Bbbk} = O_n/SO_n$ et un isomorphisme de $G_{\Bbbk}$-modules $K_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk \simeq K$. Le lemme 5.11 donne des isomorphismes :

$$H^0(G_{\Bbbk}, K) \otimes H^n(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \simeq H^n(G_{\Bbbk} \times SO_n\,,\, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})) .$$

En particulier, le théorème 7.27 implique l'annulation de $H^{>0}((O_n/SO_n) \times SO_n\,,\, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))$ pour F injectif. Montrons maintenant l'isomorphisme au niveau des invariants. On a :

$$(K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{O_n} = ((K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{SO_n})^{G_{\Bbbk}} .$$

Le complexe de Hochschild $C^*(SO_n, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))$ est isomorphe au complexe $C^*(SO_n, F(\Bbbk^{n\vee})) \otimes K$ Comme K est $\Bbbk$-libre, on en déduit un isomorphisme naturel en K et F :

$$(K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{SO_n} \simeq K \otimes (F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}) .$$

L'action de $G_{\Bbbk}$ est triviale sur $F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}$ par le lemme 7.32. D'après le lemme 5.11 (avec 'M'$= K_{\mathbb{Z}}$ et 'H' le schéma en groupes trivial) on a donc :

$$(K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{O_n} \simeq (K^{G_{\Bbbk}}) \otimes (F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}) = (K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))^{G_{\Bbbk}\times SO_n} .$$

Il nous reste à démontrer que $H^{>0}(O_n, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee}))$ s'annule. Soit J une résolution injective du O_n-module $F(\Bbbk^{n\vee})$. Alors $K \otimes J$ est une résolution injective du O_n-module $K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})$ par [Jan, I.3.9 c)], donc la cohomologie de O_n est calculée par l'homologie du complexe $(K \otimes J)^{O_n}$. On peut réécrire ce complexe sous la forme

$$(K \otimes J)^{O_n} = (K \otimes J^{SO_n})^{G_{\Bbbk}} .$$

Les O_n-modules injectifs se restreignent en des SO_n-modules injectifs par [Jan, I. 6.5(2)]. Le complexe J^{SO_n} calcule donc la cohomologie de SO_n à coefficients dans $F(\Bbbk^{n\vee})$. D'après le théorème 7.27 cette cohomologie est zéro en degrés non nuls, de sorte que l'inclusion naturelle $F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n} \hookrightarrow$

J^{SO_n} est un quasi-isomorphisme. Ainsi $K \otimes J^{SO_n}$ est une résolution du $G_{\Bbbk}$-module $K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}$. De plus, les $G_{\Bbbk}$-modules de cette résolution sont $G_{\Bbbk}$-acycliques par [Jan, I lm 4.7 a)]. On a donc :

$$H^{>0}(O_n, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})) = H^{>0}((K \otimes J^{SO_n})^{G_{\Bbbk}}) = H^{>0}(G_{\Bbbk}, K \otimes F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}) \ .$$

D'après le lemme 7.32, l'action de $G_{\Bbbk}$ sur $F(\Bbbk^{n\vee})^{SO_n}$ est triviale. Le terme de droite est donc nul d'après le lemme 5.11. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 7.30. Soit J_F une résolution injective de F dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$. Alors $J_F(\Bbbk^{n\vee})$ est une résolution du O_n-module $F(\Bbbk^{n\vee})$. Soit K la résolution standard du O_n/SO_n-module trivial (i.e. K est donné par la construction cobar $\Omega(\Bbbk, \Bbbk[O_n/SO_n], \Bbbk[O_n/SO_n])$). En tant que complexe de $\Bbbk$-modules, K est homotopiquement équivalent à $\Bbbk$ concentré en degré 0. En particulier, le produit tensoriel $K \otimes J_F(\Bbbk^{n\vee})$ est une résolution du $(O_n/SO_n) \times O_n$-module $F(\Bbbk^{n\vee})$ avec action triviale de (O_n/SO_n). D'après le lemme 7.33, on a des isomorphismes naturels en F :

$$\begin{aligned} H^*(O_n, F(\Bbbk^{n\vee})) &= H^*\left((K \otimes J_F(\Bbbk^{n\vee}))^{O_n}\right) \\ &\simeq H^*\left((K \otimes J_F(\Bbbk^{n\vee}))^{(O_n/SO_n)\times SO_n}\right) \\ &= H^*((O_n/SO_n) \times SO_n \, , \, F(\Bbbk^{n\vee})) \ . \end{aligned}$$

Le théorème 7.30 est ainsi démontré.

7.4.5 Application aux produits de groupes classiques

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et G un schéma en groupes sur $\Bbbk$ de la forme

$$G = G_1 \times \cdots \times G_\ell$$

où pour chaque i on a

$$G_i \in \{GL_{n_i,\Bbbk}, SL_{n_i,\Bbbk}, SO_{n_i,\Bbbk}, Sp_{2n_i,\Bbbk}\} \ .$$

Quitte à changer l'ordre des facteurs du produits, on peut supposer que les k_1 premiers facteurs sont des groupes linéaires, les k_2 suivants des groupes spéciaux linéaires, les k_3 suivants des groupes spéciaux orthogonaux et les k_4 suivants des groupes symplectiques. On pose alors :

$$\mathcal{P}_G := \mathcal{P}_{\Bbbk}(k_1 + k_2, \ell) \ .$$

Notons $U = (\Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_{k_1+k_2}}, \Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_\ell})$. L'évaluation sur U induit un foncteur exact

$$\mathcal{P}_G \to G\text{-Mod} \tag{7.15}$$

qui envoie un multifoncteur F sur le $\Bbbk$-module $F(U)$ muni de l'action du schéma en groupes G donnée par

$$(g_1,\dots,g_\ell)\cdot v := F(g_1^{-1},\dots,g_{k_1+k_2}^{-1},g_1,\dots,g_\ell)(v)\;.$$

On définit un foncteur caractéristique homogène de poids total 2 ω_G par

$$\omega_G(V_1,\dots,V_{k_1+k_2},W_1,\dots,W_\ell) :=$$
$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k_1+k_2}\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_i,W_i)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} S^2(W_i)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=k_1+k_2+k_3+1}^{\ell}\Lambda^2(W_i)\right)\;.$$

On a un invariant caractéristique $x_G\in\omega_G(U)$ défini par

$$x_G=\left(\sum_{i=1}^{k_1+k_2}\mathrm{Id}_{\Bbbk^{n_i}}\right)+\left(\sum_{i=k_1+k_2+1}^{k_1+k_2+k_3} q_{n_i}\right)+\left(\sum_{i=k_1+k_2+k_3+1}^{\ell} w_{n_i}\right)\;.$$

Comme pour les cas précédents, on peut construire une application graduée naturelle en $F\in\mathcal{P}_G$ et compatible aux cup produits à partir de l'évaluation sur U et de l'invariant caractéristique x_G :

$$H^*_{\omega_G}(F)\to H^*(G,F(U))\;. \tag{7.16}$$

On a alors :

Théorème 7.34. *L'application* (7.16) *est un isomorphisme si F est un foncteur multihomogène de poids $(d_1,\dots,d_{k_1+k_2},e_1,\dots,e_\ell)$ et si les n_i sont suffisamment grands, plus précisément si les inégalités suivantes sont satisfaites :*
- *pour $1\le i\le k_1$ on a $2n_i\ge d_i+e_i$,*
- *pour $k_1+1\le i\le k_1+k_2$ on a $n_i\ge d_i+e_i+1$,*
- *pour $k_1+k_2+1\le i\le k_1+k_2+k_3$ on a $n_i\ge e_i+1$,*
- *pour $k_1+k_2+k_3\le i\le\ell$ on a $2n_i\ge e_i$.*

La démonstration du théorème 7.34 repose sur les théorèmes d'isomorphismes pour les facteurs de G. Elle est organisée comme celle du théorème 7.15. A la place des bifoncteurs $J^d_{k,\ell}$ on considère les produits tensoriels externes de la forme

$$J(V_1,\dots,V_{k_1+k_2},W_1,\dots,W_\ell)=\left(\bigotimes_{i=1}^{k_1+k_2} J^{d_i+e_i}_{s_i,t_i}(V_i,W_i)\right)\otimes\left(\bigotimes_{i=k_1+k_2+1}^{\ell} J^{e_i}_{t_i}(W_i)\right)$$

où l'on a posé :

$$J^{d_i+e_i}_{s_i,t_i}(V_i,W_i)=S^{d_i+e_i}\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_i,\Bbbk^{s_i})\oplus\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{t_i},W_i)\right)\;,$$
$$J^{e_i}_{t_i}=S^{e_i}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{t_i},W_i))\;.$$

Les conditions (A) et (B) découlent alors de la formule de Künneth (6.20), de son équivalent pour les groupes algébriques (lemme 5.11) et des théorèmes d'isomorphisme pour les schémas en groupes G_i.

Dans le cas d'un produits de groupes linéaires, l'isomorphisme (6.21) entre extensions et cohomologie des Hom externes nous donne le corollaire suivant, qui nous sera utile dans la suite du mémoire.

Corollaire 7.35. *Soit* $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)$ *un* k*-uplet d'entiers positifs et* n_i *des entiers tels que* $n_i \geq d_i$ *pour tout* i*. Alors pour toute paire de foncteurs strictement polynomiaux* F, G *l'évaluation sur* $V = (\Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_k})$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathbf{d},\Bbbk}(k)}(F, G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{GL_{n_1,\Bbbk} \times \cdots \times GL_{n_k,\Bbbk}}(F(V), G(V)) \ .$$

8 Torsion de Frobenius en cohomologie

Dans cette section, $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique p non nulle. Si B est un bifoncteur strictement polynomial, on note $B^{(r)}$ le bifoncteur obtenu en précomposant chaque variable de B par le foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$. Dans cette section nous étudions la cohomologie des bifoncteurs $B^{(r)}$. Les motivations pour cette étude sont multiples.

1. Les représentations des groupes algébriques construites à partir des bifoncteurs $B^{(r)}$ apparaissent dans de nombreux problèmes de théorie des représentations.
2. La cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ est directement reliée à la cohomologie des groupes finis $GL_n(\mathbb{F}_q)$ par le théorème de Cline Parshall Scott et van der Kallen (cf. section 5.5.5).
3. La cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ est directement reliée aux calculs d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbb{F}_q}$ (cf. [FFSS, Sections 2 et 3]) qui est elle-même reliée aux modules instables sur l'algèbre de Steenrod [HLS].

La section 8 est organisée comme il suit. Dans la section 8.1, nous présentons les propriétés élémentaires de la précomposition par $I^{(r)}$. Nous avons organisée la présentation autour d'une notion de « foncteur r-négligeable », qui nous sera utile par la suite. La section 8.2 explique la construction d'un bifoncteur gradué B_{E_r} en paramétrisant un bifoncteur B par un espace vectoriel gradué E_r.

La section 8.3 expose ensuite le théorème principal 8.8 et quelques applications. Ce théorème est une version améliorée de [7, Thm2]. Il donne un isomorphisme naturel en B :

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) \ . \quad (*)$$

La naturalité en B n'est établie qu'à filtration près dans [7], le fait qu'on puisse retirer la filtration est une observation due à van der Kallen [vdK4]. Le théorème 8.8 est une généralisation très large des résultats de [FS, FFSS, Cha1] (qui correspondent essentiellement au cas où le foncteur B_{E_r} n'a pas de cohomologie). Une démonstration du théorème 8.8 dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux a été annoncée par Chałupnik dans [Cha3].

Nous démontrons le théorème 8.8 dans les sections 8.4 et 8.5. La démonstration repose essentiellement sur les résultats de [5] utilisant les complexes de Troesch, l'idée d'utiliser l'adjoint à la précomposition par $I^{(r)}$ dans [Cha3], et l'injectivité en cohomologie de la précomposition par le foncteur de torsion de Frobenius (proposition 8.5). La section 8.4 donne une exposition simplifiée des arguments de [5, Section 3 et 4]. La section 8.5 donne la démonstration du théorème 8.8 en suivant l'argument de [7], amélioré en incorporant l'observation de van der Kallen mentionnée ci-dessus.

Finalement la section 8.6 donne quelques propriétés de compatibilité de l'isomorphisme $(*)$ avec les produits et la précomposition par la torsion de Frobenius. Ces propriétés sont utiles dans les calculs pratiques.

8.1 Torsion de Frobenius

Rappelons le foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)}$ introduit à l'exemple 6.13. C'est un foncteur strictement polynomial de poids p^r ($r \geq 0$). On note souvent $V^{(r)} = I^{(r)}(V)$. On vérifie les propriétés suivantes à partir de sa définition.

1. **Unité :** $(\Bbbk)^{(r)} \simeq \Bbbk$,
2. **Additivité :** $(V \oplus W)^{(r)} \simeq V^{(r)} \oplus W^{(r)}$,
3. **Multiplicativité :** $(V \otimes W)^{(r)} \simeq V^{(r)} \otimes W^{(r)}$,
4. **Dualité :** $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{(r)}, W^{(r)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)^{(r)}$.
5. **Composition :** $(V^{(r)})^{(s)} \simeq V^{(r+s)}$

Les quatre derniers isomorphismes sont des isomorphismes de (bi)foncteurs strictement polynomiaux. Les deux premiers isomorphismes impliquent que $V^{(r)}$ a même dimension que V, pour tout espace vectoriel V de dimension finie.

Remarque 8.1. Les foncteurs de torsion de Frobenius engendrent les foncteurs strictement polynomiaux additifs. Plus précisément, si $\Bbbk$ est un anneau commutatif quelconque, on définit le foncteur $I^{(r)}_{p,\Bbbk} \in \mathcal{P}_{\Bbbk,p^r}$ comme la composée du foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)} \in \mathcal{P}_{\Bbbk/p\Bbbk,p^r}$ avec le foncteur $V \mapsto V/pV$, considéré comme un foncteur de $\mathcal{P}_{\Bbbk,1}$. On prouve alors [10, Prop 3.5] le résultat suivant. Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$, tel pour tout V, W le morphisme canonique $F(V) \oplus F(W) \to F(V \oplus W)$ est un isomorphisme. Si $d = 1$, alors $F \simeq F(\Bbbk) \otimes I$. Si $d > 1$ alors il existe un nombre premier p et un entier $r \geq 0$ tel que $F \simeq F(\Bbbk) \otimes I^{(r)}_{p,\Bbbk}$.

Pour tout $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$, on note $F^{(r)}$ la composée $F \circ I^{(r)}$. Le lemme suivant regroupe des faits élémentaires qui permettent de manipuler ces foncteurs dans les calculs. Un foncteur G est dit *r-négligeable* si pour tout F on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, G) = 0$.

Lemme 8.2. *1. Les foncteurs r-négligeables sont stables par produits, par sous-objets et par extensions.*

2. Si G_i, $i = 1, \dots, n$ sont des foncteurs homogènes de poids respectifs d_i, et s'il existe i tel que $p^r \not| d_i$ alors le produit tensoriel $\bigotimes_{i=1}^n G_i$ est r-négligeable.

3. Si G est r-négligeable, alors pour tout V, le foncteur à paramètre G_V est r-négligeable.

4. *Si $f : F \hookrightarrow G$ et $g : G \hookrightarrow H$ sont deux morphismes injectifs dont les conoyaux sont r-négligeables, alors le conoyau de $g \circ f$ est r-négligeable.*
5. *Le conoyau de l'injection canonique $S^{d\,(r)} \hookrightarrow S^{p^r d}$ est r-négligeable.*

Démonstration. Le point 1 découle des propriétés de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(-,-)$. Le point 2 découle de l'adjonction somme-diagonale (6.19). Le point 3 découle de l'isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, G_V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}((F^{(r)})^V, G)$, et de l'isomorphisme de foncteurs $(F^{(r)})^V \simeq (F^{V^{(r)}})^{(r)}$. Le point 4 découle de la suite exacte courte : $0 \to \mathrm{coker} f \to \mathrm{coker}(g \circ f) \to \mathrm{coker} g \to 0$ et du point 1. Enfin, pour montrer le point 5, il suffit de montrer que les conoyaux des injections canoniques $f_i : S^{dp^i\,(r-i)} \hookrightarrow S^{dp^{i+1}\,(r-i-1)}$ sont r-négligeables. La suite exacte courte $0 \to S^{dp^i(1)} \to S^{dp^{i+1}} \to S^{dp^{i+1}-1} \otimes S^1$ montre que le conoyau de f_i se plonge dans $(S^{dp^{i+1}-1\,(r-i-1)} \otimes I^{(r-i-1)})$ qui est r-négligeable par le point 2. $\square$

Plus généralement, si $F \in \mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)$ est un multifoncteur strictement polynomial, on note $F^{(r)} \in \mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)$ le multifoncteur obtenu en précomposant chacune des variables de F par le foncteur $I^{(r)}$. La précomposition par $I^{(r)}$ induit un foncteur exact :

$$-^{(r)} : \mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell) \to \mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)\ .$$

Par exactitude, ce foncteur induit un morphisme gradué, naturel en F, G :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)}(F,G) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)}(F^{(r)}, G^{(r)})\ . \tag{8.1}$$

On note $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)$ dont les objets sont les multifoncteurs du type $F^{(r)}$. La proposition suivante donne une première idée de l'effet de la précomposition par la torsion de Frobenius.

Proposition 8.3. *La précomposition par $I^{(r)}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell) \simeq \mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$. De plus, la catégorie $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$ est une sous-catégorie de Serre*[29] *de $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)$. En particulier le morphisme* (8.1) *est un isomorphisme en degrés* 0 *et* 1*.*

Démonstration. Quitte à dualiser les variables contravariantes des foncteurs, on peut se contenter de considérer les catégories de la forme $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)$.

Nous allons d'abord montrer que (8.1) est un isomorphisme en degrés 0 et 1. Par un argument de suite exacte longue, il suffit de montrer cela lorsque F est un projectif standard et G un injectif standard. Mais les injectifs (resp. projectifs) standard sont des foncteurs séparables. En utilisant la formule de Künneth, on se ramène donc au cas $\ell = 1$, $F = \Gamma^{d,V}$ et $G = S^d_W$. Le lemme 8.2 fournit une suite exacte courte où C est r-négligeable.

$$0 \to (S^{d\,(r)})_W \hookrightarrow S^{p^r d}_W \to C \to 0\ . \qquad (*)$$

[29] Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, une *sous-catégorie de Serre* de $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, stable par sous-objets, par quotients et par extensions.

La suite exacte longue associée donne $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)},G^{(r)})=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F,G)$, et un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)},G^{(r)})\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)},S^{p^rd}_W)$. Par le lemme de Yoneda, cet espace de morphismes est isomorphe à $F^\sharp(W^{(r)})$, qui a même dimension que $F^\sharp(W)$ donc que $\mathrm{Hom}(F,G)$. Pour montrer l'isomorphisme en degré 0 il suffit donc de montrer l'injectivité en degré 0. Mais si $f:F(U^{(r)})\to G(U^{(r)})$ est nulle pour tout U alors comme $U\simeq U^{(r)}$ on a $f:F(U)\to G(U)$ nulle pour tout U, donc f nulle, ce qui prouve l'injectivité en degré 0.

L'isomorphisme en degré 0 montre que $-^{(r)}:\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)\to\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)^{(r)}$ est pleinement fidèle. Ce foncteur est essentiellement surjectif par définition de $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)^{(r)}$, la première partie de la proposition est donc démontrée.

L'isomorphisme en degré 1 montre que $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)^{(r)}$ est stable par extensions. Comme $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)^{(r)}$ est stable par dualité, on peut se contenter de montrer la stabilité par sous-objets. Soit $F^{(r)}$ un foncteur homogène de $\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)^{(r)}$. Nous devons montrer que pour tout morphisme $f:F^{(r)}\to G$, le noyau de f est un objet de $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$. En plongeant G dans un injectif standard, on se ramène au cas $G=M\otimes S^{\mathbf{d}}_V$ où M est un $\Bbbk$-espace vectoriel, $W=(W_1,\dots,W_\ell)$ est un ℓ-uplet de $\Bbbk$-espaces vectoriels et $\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_\ell)$ est un ℓ-uplet d'entiers positifs. On peut supposer ces entiers tous divisibles par p^r car sinon $f=0$ et le noyau de f est bien dans $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$. Le foncteur G est un produit tensoriel externe d'injectifs standard de $\mathcal{P}_\Bbbk$. En tensorisant les suites exactes du type $(*)$ on obtient donc une suite exacte

$$0\to M\otimes (S^{\mathbf{d}/p^r}_{W^{(r)}})^{(r)}\to G\to C'\;. \qquad (**)$$

Pour montrer que le noyau de f est un objet de $\mathcal{P}_\Bbbk(k,\ell)^{(r)}$, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)}(F^{(r)},C')=0$. En effet, si c'est le cas, alors f factorise en une application $f':F^{(r)}\to M\otimes(S^{\mathbf{d}/p^r}_{W^{(r)}})^{(r)}$. Et comme le morphisme (8.1) est un isomorphisme en degré 0 il existe une application f'' telle que $(f'')^{(r)}=f'$, si bien que $\ker f=\ker f'=\ker(f''^{(r)})=(\ker f'')^{(r)}$. Pour montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk(\ell)}(F^{(r)},C')=0$ nous pouvons, quitte à prendre une résolution projective de F, supposer que F est un projectif standard, donc séparable. L'annulation provient alors de la formule de Künneth et du fait que C' est une somme directe de produits tensoriels externes dans lesquels au moins un des facteurs est r-négligeable. $\square$

Pour les bifoncteurs strictement polynomiaux $B\in\mathcal{P}_\Bbbk(1,1)$, on a un morphisme gradué analogue au morphisme (8.1) :

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B)\to H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})\;, \qquad (8.2)$$

induit par la précomposition par $I^{(r)}$ et les applications canoniques $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}\twoheadrightarrow\Gamma^{d\,(r)}\mathrm{gl}\simeq(\Gamma^d\mathrm{gl})^{(r)}$. Comme corollaire de la proposition 8.3 on obtient le résultat suivant.

Corollaire 8.4. *L'application* (8.2) *est un isomorphisme en degré* 0 *et* 1.

Démonstration. En prenant des résolution injectives on se restreint au cas où B est un injectif standard. Les injectifs standard dans B sont des Hom externes, et dans ce cas, l'isomorphisme (6.21) permet d'obtenir le résultat à partir de la proposition 8.3. □

En degrés supérieurs, on dispose de la propriété d'injectivité suivante pour les applications (8.1) et (8.2). Cette propriété sera utilisée de manière essentielle dans la démonstration du théorème principal 8.8.

Proposition 8.5. *Pour tout $r \geq 0$, les applications* (8.1) *et* (8.2) *sont injectives.*

Démonstration. Quitte à dualiser les variables contravariantes, on peut supposer $k = 0$. Soit $V = (\Bbbk^{n_1}, \dots, \Bbbk^{n_\ell})$ et $GL = GL_{n_1} \times \cdots \times GL_{n_\ell}$ le produite de groupes linéaires associé. On a un diagramme commutatif, dont les morphismes horizontaux sont induits par l'évaluation sur $(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk(1,1)}(F, G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^*_{GL}(F(V), G(V)) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk(1,1)}(F^{(r)}, G^{(r)}) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^*_{GL}(F(V)^{[r]}, G(V)^{[r]})
\end{tikzcd} .$$

On récupère ainsi l'injectivité de la torsion de Frobenius pour les extensions dans $\mathcal{P}_\Bbbk(1,1)$ à partir de l'injectivité pour les extensions dans GL-Mod et l'isomorphisme du corollaire 7.35. La démonstration de l'injectivité de (8.2) est similaire. □

Contrairement à la proposition (8.3), on ne connaît pas de démonstration purement fonctorielle de la proposition 8.5. On s'attend à ce que la résolution du problème suivant apporte des informations intéressantes sur les foncteurs strictement polynomiaux.

Problème 8.6. *Trouver une démonstration purement fonctorielle de l'injectivité de la torsion de Frobenius en* Ext.

8.2 Foncteurs à paramètres gradués

Soit $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$ un foncteur strictement polynomial. On rappelle que si W est un espace vectoriel de dimension finie F_W désigne le foncteur « à paramètre » tel que $F_W(V) = F(V \otimes W)$. Si W est gradué, alors le foncteur F_W hérite d'une graduation de la manière suivante. On définit une action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur W telle que $\mathbb{G}_m$ agisse par la formule $\lambda \cdot x = \lambda^d x$ sur les éléments homogène de degré d de W. Comme F est un foncteur strictement polynomial, cette action de $\mathbb{G}_m$ induit une action de $\mathbb{G}_m$ sur le foncteur F_W donc une décomposition en espaces de poids sous l'action de ce groupe multiplicatif :

$$F_W = \bigoplus_i (F_W)^i \ ,$$

Le foncteur $(F_W)^i$ est appelé *partie homogène de degré i de F_W*. Cette décomposition est compatible aux sommes directes de foncteurs $((F\oplus G)_W)^i = (F_W)^i \oplus (G_W)^i$ et préserve les poids, i.e. si F est homogène de poids d, alors les $(F_W)^i$ sont homogènes de poids d.

Exemple 8.7. Pour les foncteurs puissances symétriques, puissances extérieures ou puissances divisées (ou un produit tensoriel de tels foncteurs), la notion de degré que nous venons d'introduire coïncide avec la notion de degré usuel. Par exemple si on considère l'espace vectoriel gradué $W = \mathbb{k}[0] \oplus \mathbb{k}[2]$ constitué d'une copie de $\mathbb{k}$ placée en degré zéro et d'un copie de $\mathbb{k}$ placée en degré 2, on a une décomposition :

$$S^d_W(V) = \bigoplus_{i=0}^{d} S^i(V \otimes \mathbb{k}[0]) \otimes S^{d-i}(V \otimes \mathbb{k}[2]) \ .$$

où chaque terme $S^i(V \otimes \mathbb{k}[0]) \otimes S^{d-i}(V \otimes \mathbb{k}[2])$ est placé en degré $2d-2i$. La partie homogène de degré k du foncteur S^d_W est égale à $S^i \otimes S^{d-i}$ si $k = 2d-2i$ et est nulle sinon.

On dispose de la description alternative suivante de la graduation sur F_W. Notons W^{i_1} la composante homogène de degré i_1 de W. On a donc $W = W^{i_1} \oplus \cdots \oplus W^{i_n}$. Pour tout foncteur strictement polynomial F on considère le foncteur strictement polynomial à n variables $\mathbf{F}$ tel que $\mathbf{F}(V_1,\dots,V_n) = F(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n)$. On note $\mathbf{F}_{d_1,\dots,d_n}$ sa composante homogène de poids $(d_1,\dots,d_n)$. On a une décomposition :

$$F_W(V) = \bigoplus_{(d_1,\dots,d_n)} \mathbf{F}_{(d_1,\dots,d_n)}(V\otimes W^{i_1},\dots,V\otimes W^{i_n}) \ .$$

Le foncteur $V \mapsto \mathbf{F}_{(d_1,\dots,d_n)}(V\otimes W^{i_1},\dots,V\otimes W^{i_n})$ est un facteur direct de F_W, homogène de degré $\sum d_k i_k$.

Notons $\mathcal{P}^*_{\mathbb{k}}$ la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux gradués et des morphismes préservant la graduation. Si W est un espace vectoriel gradué fixé, la paramétrisation par W définit un foncteur exact

$$\mathcal{P}_{\mathbb{k}} \to \mathcal{P}^*_{\mathbb{k}} \ .$$

Ce procédé de paramétrisation par des espaces vectoriels gradués s'étend naturellement aux bifoncteurs strictement polynomiaux $B \in \mathcal{P}_{\mathbb{k}}(1,1)$. On peut paramétriser les bifoncteurs par une paire d'espaces vectoriels, mais dans la suite le premier espace de la paire sera toujours pris égal à $\mathbb{k}$. Si

W est un espace vectoriel, on notera donc simplement B_W le bifoncteur tel que $B_W(U,V) = B(U, V \otimes W)$. Si W est gradué, alors B_W hérite d'une graduation. De même que précédemment, on appelle *partie homogène de degré i de B_W* le facteur direct $(B_W)^i$ de B_W caractérisé par la propriété suivante. Pour tout couple U, V, l'espace vectoriel $(B_W)^i(U,V)$ est égal à l'espace de poids i de $B(U, V \otimes W)$ sous l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Si $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ désigne la catégorie des bifoncteurs strictement polynomiaux graduées (et des morphismes préservant la graduation), la paramétrisation par W induit donc un foncteur exact :

$$\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1) \to \mathcal{P}^*_{\Bbbk}(1,1) .$$

8.3 Le théorème principal et ses conséquences

On note E_r l'espace vectoriel gradué défini[30] par :

$$(E_r)^i = \begin{cases} \Bbbk \text{ si } i = 2k \text{ avec } 0 \leq k < p^r, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

Si $B \in \mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ on a un foncteur gradué à paramètre B_{E_r} concentré en degrés pairs (car E_r est concentré en degrés pairs). Le théorème principal décrivant la cohomologie du bifoncteur $B^{(r)}$ est le suivant.

Théorème 8.8. *Pour tout bifoncteur strictement polynomial B et tout entier $r \geq 0$, on a un isomorphisme gradué (en prenant le degré total, c'est à dire la somme du degré cohomologique et du degré de B_{E_r} sur le membre de droite), naturel en B :*

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) .$$

Ce théorème a été obtenu dans [7] à la différence près que la fonctorialité n'y est obtenue qu'à filtration près. Le fait que la filtration scinde est dû à van der Kallen [vdK4]. Nous indiquons une démonstration du théorème dans les sections 8.4 à 8.5 ci-dessous. Auparavant, nous mentionnons quelques applications de ce résultat évoquées dans [5, 7]. Une application importante supplémentaire sera donnée à la section 9.

1. **Cas des foncteurs strictement polynomiaux.** Le théorème 8.8 répond positivement à la conjecture formulée dans [5], portant l'effet de la précomposition par le foncteur $I^{(r)}$ sur les extensions dans $\mathcal{P}_{\Bbbk}$. En effet, si F et G sont deux foncteurs strictement polynomiaux homogènes de degré d et si $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)$ désigne leur Hom externe, on des égalités :

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F^{(r)}, G^{(r)}) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)^{(r)}, \quad \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F, G_{E_r}) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)_{E_r} .$$

[30] Nous démontrerons plus loin l'isomorphisme gradué $E_r \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(I^{(r)}, I^{(r)})$. Ce résultat a été obtenu en premier par Friedlander et Suslin [FS].

A l'aide des isomorphismes entre cohomologie des Hom externes et extensions de foncteurs (6.21) et du théorème 8.8, on obtient une chaîne d'isomorphismes gradués naturels en F et G

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, G^{(r)}) &\simeq H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F,G)^{(r)})\\ &\simeq H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F, G_{E_r})) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G_{E_r})\ .\end{aligned}$$

2. **Croissance de la cohomologie.** Le théorème 8.8 donne des informations quantitatives sur l'influence de la torsion de Frobenius en cohomologie. Par exemple, B_{E_r} contient une copie de B comme facteur direct en chaque degré $0, 2, \dots, 2p^r - 2$. Ainsi, on a une injection (naturelle en B)
$$\textstyle\bigoplus_{0\le i<p^r} H^{*-2i}_{\mathrm{gl}}(B) \hookrightarrow H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}).$$
Plus généralement, soit B un bifoncteur strictement polynomial bihomogène de poids (d,d) avec $d > 0$. Soit $\mathbf{B}_{(d_1,\dots,d_n)}$ la composante multihomogène de poids $(d, d_1, \dots, d_n)$ du multifoncteur :
$$(V, W_1, \dots, W_n) \mapsto B(V, W_1 \oplus \cdots \oplus W_n)\ .$$
Si on note $B_{(d_1,\dots,d_n)}(V,W) = \mathbf{B}_{(d_1,\dots,d_n)}(V, W, \dots, W)$, alors on a un isomorphisme de bifoncteurs gradués, où chaque copie de $B_{(d_1,\dots,d_n)}$ indexée par $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ est placée en degré $\sum_k 2i_kd_k$:
$$B_{E_r} \simeq \bigoplus_{n=1}^{\min\{p^r,d\}} \bigoplus_{\substack{I\subset\{1,\dots,p^r\}\\ |I|=n}} \bigoplus_{\substack{(d_1,\dots,d_n)\\ d_k>0\\ \sum d_k = d}} B_{(d_1,\dots,d_n)}$$
En particulier la cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ pour tout les $r \ge 0$ ne dépend que du calcul des $H^*_{\mathrm{gl}}(B_{(d_1,\dots,d_n)})$, avec $n \le d$. Ces bifoncteurs sont en nombre *fini*. Ainsi, si B prend des valeurs de dimensions finies et si $d(r)$ désigne la dimension totale[31] de $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ alors pour $r \ge \log_p(d)$ c'est une fonction de la forme :
$$d(r) = P(p^r)$$
où P est polynôme de degré d à coefficients entiers positifs dépendant explicitement des dimensions totales des $H^*_{\mathrm{gl}}(B_{(d_1,\dots,d_n)})$. Ce polynôme peut également être calculé à partir des dimensions des $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ pour les petites valeurs de r.

[31]En d'autres termes, $d(r)$ désigne la somme de toutes les dimensions des $H^i_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$. C'est un nombre fini d'après les corollaire 7.14 et le fait que $\Gamma^d\mathrm{gl}$ admette une résolution par des bifoncteurs projectifs de type fini (car c'est un bifoncteur dont les valeurs sont des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie).

3. **Bornes de stabilisation cohomologique.** On remarque que les foncteurs B_{E_r} et $B_{E_{r+1}}$ sont égaux en degré $i < 2p^r$. On a donc un isomorphisme :
$$H^i_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^i_{\mathrm{gl}}(B^{(r+1)}) \quad \text{pour } i < 2p^r.$$
On retrouve ainsi le phénomène de stabilisation forte de [FFSS, Co 4.10]. (Ce théorème de stabilisation forte donne une meilleure borne que celle du résultat de [CPSvdK]).

4. **Calculs explicites.** Le théorème 8.8 fournit également des calculs explicites. Nous illustrons ceci par un résultat de [1][32] sur la cohomologie du bifoncteur $S^d\mathrm{gl}(V,W) = S^d(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W))$. D'après [ABW, Thm III.1.5] ce bifoncteur a une bonne filtration, i.e. une filtration dont le gradué est une somme directe de bifoncteurs de la forme $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W_\lambda, S_\lambda)$ où S_λ est le foncteur de Schur (4.11) et $W_\lambda = S_\lambda^\sharp$ son dual. On a une annulation
$$H^{>0}_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W_\lambda, S_\lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^{>0}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(W_\lambda, S_\lambda) = 0$$
qui provient de la structure de catégorie de plus haut poids de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$[33]. Ainsi le théorème 8.8 fournit un isomorphisme gradué :
$$H^*_{\mathrm{gl}}(S^d\mathrm{gl}^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(S^d\mathrm{gl}_{E_r}) = H^0_{\mathrm{gl}}(S^d\mathrm{gl}_{E_r})\ . \tag{8.3}$$
Pour calculer la série de Poincaré du membre de droite de (8.3), on peut utiliser le changement de base. En effet le bifoncteur $S^d\mathrm{gl}_{E_r}$ est défini sur $\mathbb{Z}$. Si on note $(S^d\mathrm{gl}_{E_r})^i$ sa composante homogène de degré i, on a :
$$\begin{aligned}\dim_{\Bbbk} H^0_{\mathrm{gl},\Bbbk}((S^d\mathrm{gl}_{E_r})^i) &= \mathrm{rang}\, H^0_{\mathrm{gl},\mathbb{Z}}((S^d\mathrm{gl}_{E_r})^i)\ ,\\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0_{\mathrm{gl},\mathbb{C}}((S^d\mathrm{gl}_{E_r})^i)\ ,\\ &= \dim_{\mathbb{C}}(H^0_{\mathrm{gl},\mathbb{C}}(((\mathrm{gl}_{E_r})^{\otimes d})^i))_{\mathfrak{S}_d}\ . \end{aligned}\tag{8.4}$$
Les deux première égalités découlent du théorème de changement de base (6.22). La troisième égalité découle par fonctorialité du fait qu'en caractéristique nulle $S^d(V) = (V^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d}$ s'identifie au facteur direct de $V^{\otimes d}$ donné par les invariants sous l'action du groupe symétrique. On montre facilement (par exemple en utilisant l'adjonction somme-diagonale) le lemme suivant.

[32] La démonstration originelle donnée dans [1] ne repose pas sur le théorème 8.8, mais utilise à la place un calcul de Chałupnik [Cha1] qui est une forme (très faible) du théorème 8.8.

[33] Les foncteurs de Schur correspondent aux objets costandard pour la structure de catégorie de plus haut poids, les foncteurs de Weyl aux objets standard. L'annulation provient de l'annulation des $\mathrm{Ext}^{>0}(\Delta_\lambda, \nabla_\mu)$ valable dans toute catégorie de plus haut poids.

Lemme 8.9. *On a un isomorphisme de $\mathfrak{S}_d$-modules $H^0_{\mathrm{gl}}((\mathrm{gl}_{E_r})^{\otimes d}) \simeq \Bbbk\mathfrak{S}_d \otimes E_r^{\otimes d}$ où $\mathfrak{S}_d$ agit par conjugaison sur $\Bbbk\mathfrak{S}_d$ et par permutation des facteurs sur $E_r^{\otimes d}$.*

L'égalité (8.4) réduit donc le calcul de $H^i_{\mathrm{gl}}(S^d\mathrm{gl}^{(r)})$ à un calcul de coinvariants du groupe symétrique en caractéristique nulle !

Pour $\Bbbk = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, notre calcul de $H^*_{\mathrm{gl}}(S^d\mathrm{gl}^{(r)})$ a une application dans [FF], où il fournit d'après [FF, Thm 7.7, Section 8] la page initiale d'une suite spectrale qui converge vers la cohomologie de $GL_n(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ à coefficients constants. Les pages initiales des suites spectrales correspondant à la cohomologie de $GL_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ pour p impair font intervenir des puissances extérieures, et le problème suivant est ouvert.

Problème 8.10. *Déterminer $H^*_{\mathrm{gl}}((S^d\mathrm{gl})^{(r)} \otimes (\Lambda^k\mathrm{gl})^{(r)})$ en toute caractéristique p, pour tout $d \geq 0$ et tout $k > 0$.*

8.4 Complexes de Troesch et formalité

Un n-complexe (positif) dans une catégorie additive $\mathcal{A}$ est un objet gradué $C = \bigoplus_{i\geq 0} C^i$, muni d'une différentielle $d : C^i \to C^{i+1}$ telle que $d^n = 0$. Un 2-complexe est donc la même chose qu'un complexe au sens usuel. Si C est un n-complexe, sa contraction $C_{[s]}$ (pour $1 \leq s < n$) est le complexe défini par :

$$C^i_{[s]} = \begin{cases} C^{ni/2} \text{ si } i \text{ est pair,} \\ C^{s+n(i-1)/2} \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

et la différentielle est donnée par les composées $d^s : C^i_{[s]} \to C^{i+1}_{[s]}$ et $d^{n-s} : C^i_{[s]} \to C^{i+1}_{[s]}$ suivant la parité de i. Ainsi, la partie de degré pair de $C_{[s]}$ correspond à la partie de degré multiple de n de C, tandis que la partie de degré impair de $C_{[s]}$ est un facteur direct de la partie de C dont le degré n'est pas divisible par n.

Nous rappelons maintenant les complexes construits par Troesch [Tr]. Ces complexes généralisent en toute caractéristique les complexes de puissances symétriques construits en caractéristique 2 dans [FLS, FS]. On note III_r l'espace vectoriel gradué tel que $(\mathrm{III}_r)^i = \Bbbk$ pour $0 \leq i < p^r$ et 0 sinon.

Théorème 8.11. *[Tr] Soient d et r des entiers strictement positifs. Il existe une p-différentielle δ sur le foncteur gradué $S^{dp^r}_{\mathrm{III}_r}$ qui augmente le degré de p^{r-1}. Notons T le complexe obtenu par contraction du p-complexe supporté par la partie homogène de degré multiple de p^{r-1} :*

$$\underbrace{(S^{dp^r}_{\mathrm{III}_r})^0}_{T^0} \xrightarrow{\delta} \underbrace{(S^{dp^r}_{\mathrm{III}_r})^{p^{r-1}}}_{T^1} \xrightarrow{\delta^{p-1}} \underbrace{(S^{dp^r}_{\mathrm{III}_r})^{p^r}}_{T^2} \xrightarrow{\delta} \underbrace{(S^{dp^r}_{\mathrm{III}_r})^{p^r+p^{r-1}}}_{T^3} \xrightarrow{\delta^{p-1}} \cdots$$

Alors T fournit une résolution de $S^{d\,(r)}$.

Fixons des entiers d et r. Le complexe T est une résolution injective de $S^{d(r)}$, par des produits tensoriels de puissances symétriques. Si F est un foncteur strictement polynomial homogène de poids d, les extensions entre $F^{(r)}$ et $S^{d(1)}$ sont donc calculées l'homologie du complexe

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T)\ .$$

On remarque que si $S^{i_0} \otimes \cdots \otimes S^{i_1}$ est un facteur direct de $S^{p^r}_{\text{Ш}_r}$ tel que tous les i_k sont divisibles par p^r, alors ce facteur direct est placé en degré multiple de p^r. Cette observation essentielle montre le lemme suivant.

Lemme 8.12. *La partie de degré impair de T est un foncteur négligeable. En particulier, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, S^{d\,(r)})\ .$$

Pour calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, S^{d\,(r)})$, il suffit donc de calculer la partie de degré pair du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T)$. Soit $\text{Ш}_r^{(r)}$ l'espace vectoriel gradué :

$$(\text{Ш}_r^{(r)})^{ip^r} = \Bbbk \text{ pour } 0 \leq i < p^r, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

L'espace vectoriel $\text{Ш}_r^{(r)}$ est donc la valeur en $\Bbbk$ du foncteur strictement polynomial gradué $(I^{(r)})_{\text{Ш}_r}$. On a un isomorphisme $(S^d)_{\text{Ш}_r})^{(r)} \simeq (S^{d\,(r)})_{\text{Ш}_r}$. La précomposition par $I^{(r)}$ et l'inclusion $(S^{d\,(r)})_{\text{Ш}_r} \hookrightarrow (S^{dp^r})_{\text{Ш}_r}$ induisent donc un morphisme composé :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, S^d_{\text{Ш}_r}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, (S^{d\,(r)})_{\text{Ш}_r}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, S^{dp^r}_{\text{Ш}_r})\ .$$

Le premier morphisme de cette composée est un isomorphisme d'après la proposition 8.3. D'après les points 3 et 5 du lemme 8.2, le conoyau de l'inclusion $(S^{d\,(r)})_{\text{Ш}_r} \hookrightarrow (S^{dp^r})_{\text{Ш}_r}$ est r-négligeable, donc le deuxième morphisme de la composée est un isomorphisme. Par définition de $\text{Ш}_r^{(r)}$, l'espace vectoriel gradué de gauche (donc celui de droite) est concentré en degré multiples de p^r. Si l'on regradue l'isomorphisme en multipliant tous les degrés par $2/p^r$, alors l'isomorphisme se réécrit en un isomorphisme gradué

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, (S^d)_{E_r}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T)\ .$$

On a démontré le résultat suivant [5, Thm 4.6].

Théorème 8.13 (Formalité faible)**.** *Pour tout $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$, le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T)$ est nul en degrés impairs. On a un isomorphisme gradué, naturel en F :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, S^d_{E_r}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, T) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(r)}, S^{d\,(r)})\ .$$

Le résultat de formalité du théorème 8.13 permet d'obtenir sans effort de nombreux calculs de [FS, FFSS, Cha1], qui étaient obtenus dans ces articles au prix de l'analyse simultanée de diverses suites spectrales hypercohomologiques par des récurrences imbriquées. L'exemple le plus simple est le cas $F = I$, $d = 1$, qui redonne le calcul de Friedlander et Suslin :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, I^{(r)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(I, I_{E_r}) \simeq E_r \ .$$

Plus généralement, le cas $F = \Gamma^d$ donne une nouvelle démonstration du calcul fondamental de [FFSS, thm 4.5] :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^{d\,(r)}, S^{d\,(r)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Gamma^d, S^d_{E_r}) \simeq S^d(E_r) \ .$$

8.5 Démonstration du théorème 8.8

Nous démontrons dans cette section le théorème 8.8 en suivant la démonstration de [7] et en incorporant l'amélioration proposée dans [vdK4, Ex 5.15]. Nous utilisons le formalisme des catégories dérivées dans la démonstration, pour lequel nous renvoyons à [Wei, Kel].

8.5.1 Adjoint à la précomposition par $I^{(r)}$

Pour des raisons formelles [McL, V.6], le foncteur de précomposition par $I^{(r)}$ admet un adjoint à gauche

$$\ell : \mathcal{P}_{dp^r, dp^r, \Bbbk}(1,1) \to \mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1) \ .$$

L'idée d'utiliser cet adjoint dans les calculs d'extensions apparaît dans [Cha3]. On peut calculer explicitement $\ell(B)$. Par commodité, on utilisera plutôt le dual $\ell(B)^\sharp$ dans la suite. Les injectifs standard dans $\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)$ sont de la forme $(V, W) \mapsto \mathrm{Hom}_\Bbbk(\Gamma^d_V, S^d_W)$. Le lemme de Yoneda et l'isomorphisme d'adjonction induisent donc des isomorphismes

$$\begin{aligned} \ell(B)^\sharp(V,W) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(\ell(B), \mathrm{Hom}_\Bbbk(\Gamma^d_V, S^d_W)) \ , \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(B, \mathrm{Hom}_\Bbbk(\Gamma^d_V, S^d_W)^{(r)}) \ . \end{aligned}$$

Rappelons qu'un complexe de bifoncteurs C est formel si on a un isomorphisme $C \simeq C'$ dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathcal{P}_\Bbbk(1,1))$, où C' est un complexe à différentielle nulle. De manière équivalente C et C' sont reliés par un zigzag de quasi-isomorphismes de complexes de bifoncteurs. Le théorème 8.13 peut se reformuler de la manière suivante.

Proposition 8.14. *[7, Prop. 13] Soit P un résolution projective du bifoncteur $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$. Le complexe $\ell(P)^{(r)}$ est formel. Pour tout n, on a un isomorphisme de bifoncteurs*

$$H_n(\ell(P)) \simeq (\Gamma^d \mathrm{gl}_{E_r})^n$$

Démonstration. On travaille dans la sous-catégorie abélienne $\mathcal{P}^f_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)$ des bifoncteurs prenant des valeurs de dimensions finies. Comme $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$ a ses valeurs de dimensions finies, on peut remplacer P par une résolution projective P' dans $\mathcal{P}^f_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)$. L'expression explicite du dual de $\ell(B)$ montre que ℓ se restreint en un foncteur

$$\ell : \mathcal{P}^f_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1) \to \mathcal{P}^f_{d,d,\Bbbk}(1,1)\ .$$

Donc $\ell(P')^{(r)}$ est un complexe dans $\mathcal{P}^f_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)$. Quitte à dualiser, il suffit pour démontrer la formalité de $\ell(P)^{(r)}$, de produire un zigzag de quasi-isomorphismes de complexes dans $\mathcal{P}^f_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)$, où Y est un complexe à différentielle nulle :

$$(\ell(P')^{(r)})^\sharp \simeq (\ell(P')^\sharp)^{(r)} \xrightarrow{(1)} X \xleftarrow{(2)} Y\ . \qquad (*)$$

On construit ce zigzag de la façon suivante. Soit T la résolution de Troesch de $S^{d\,(r)}$ du théorème 8.11, Q une résolution projective de $\Gamma^{d\,(r)}$ et :

$$K_{V,W} := \mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_\Bbbk(Q_V, T_W)\ .$$

Le complexe $K_{V,W}$ est donc une résolution injective (par des injectifs standard) du bifoncteur $F_{V,W} := \mathrm{Hom}_\Bbbk((\Gamma^{d\,(r)})_V, (S^{d\,(r)})_W)$. On définit des complexes de bifoncteurs homogènes de poids dp^r par rapport à chacune des variables V, W par :

$$X(V,W) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(P, K_{V,W})\ ,$$
$$Y(V,W) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,\Bbbk}}((\Gamma^{d\,(r)})_V, T_W)\ .$$

Avec cette définition, le complexe Y est un complexe à différentielle nulle. En effet, le théorème de formalité faible 8.13 assure que le complexe

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,\Bbbk}}((\Gamma^{d\,(r)})_V, T_W) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,\Bbbk}}((\Gamma^{d\,(r)})_{\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)}, T)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,\Bbbk}}((\Gamma^d_{\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)^{(r)}})^{(r)}, T)\end{aligned}$$

est nul en degré impairs, en particulier sa différentielle est nulle. Nous avons les objets de notre zigzag, il nous reste à en définir les morphismes. Le complexe $\ell(P')^{(r)\,\sharp}$ est donné explicitement par le calcul de la section 8.5.1 :

$$\begin{aligned}\ell(P')^{(r)\,\sharp} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(P', \mathrm{Hom}_\Bbbk(\Gamma^d_{V^{(r)}}, S^d_{W^{(r)}})^{(r)})\ ,\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(P', F_{V,W})\ .\end{aligned}$$

On peut donc définir le quasi-isomorphisme (1) comme le morphisme induit par l'injection $F_{V,W} \hookrightarrow K_{V,W}$. Le quasi-isomorphisme (2) est quant à lui défini comme la composée :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,\Bbbk}}((\Gamma^{d\,(r)})_V, J_W) &\to \mathrm{Tot}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r}}(Q_V, J_W)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}, K_{V,W})\\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(P, K_{V,W})\end{aligned}$$

où le premier morphisme est induit par l'épimorphisme $Q_V \to (\Gamma^{d\,(r)})_V$ et le troisième par l'épimorphisme $P \to \Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$.

Il reste à calculer l'homologie de $\ell(P)$. Le théorème 8.13 donne un isomorphisme, naturel en V, W :

$$H^*(Y(V,W)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}((\Gamma^d_{\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)^{(r)}}, S^d_{E_r}) \simeq S^d(\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)^{(r)} \otimes E_r)\ .$$

En dualisant et en utilisant le zigzag $(*)$ on obtient donc un isomorphisme de bifoncteurs : $H_n(\ell(P)^{(r)}) \simeq ((\Gamma^d\mathrm{gl}_{E_r})^{(r)})^n$. D'après la proposition 8.3, cet isomorphisme provient d'un isomorphisme $H_n(\ell(P)) \simeq (\Gamma^d\mathrm{gl}_{E_r})^n$. □

8.5.2 Suites spectrales hypercohomologiques

On se fixe une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ avec assez d'injectifs et de projectifs. Soient C et D deux complexes dans $\mathcal{A}$ bornés respectivement supérieurement et inférieurement (i.e. $C_s = 0 = D^s$ pour $s \ll 0$). Soit J un complexe d'injectifs, et $C \to J$ un quasi-isomorphisme. On note $\mathrm{HExt}^*_{\mathcal{A}}(C,D)$ les groupes d'HyperExt entre C et D, c'est à dire l'homologie du complexe total associé au bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C_s, J^t)$.

En calculant l'homologie de ce complexe d'abord selon s puis selon t on obtient une suite spectrale hypercohomologique (on ne considérera jamais l'autre suite spectrale hypercohomologique dans la suite) :

$$E_2^{s,t}(C,D) = \mathrm{HExt}^t_{\mathcal{A}}(H_s(C), D) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{s+t}_{\mathcal{A}}(C,D)\ .$$

Si $C \to C'$ ou $D \to D'$ sont des quasi-isomorphismes, il induisent des isomorphismes de suites spectrales hypercohomologiques. Par exemple si D est formel, on on peut réécrire la deuxième page sous la forme :

$$E_2^{s,t}(C,D) = \bigoplus_{i+j=t} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(H_s(C), H^j(D))$$

Si C est formel, alors la suite spectral hypercohomologique s'arrête à la page 2, la filtration sur l'aboutissant scinde et on a pour tout n un isomorphisme naturel en D :

$$\bigoplus_{s+t=n} E_2^{s,t}(C,D) \simeq \mathrm{HExt}^n(C,D)\ .$$

Exemple 8.15 (Suite spectrale de torsion de Frobenius)**.** Soit $B \in \mathcal{P}_{d,d}(1,1)$ et P une résolution projective de $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$. La *suite spectrale de torsion de Frobenius* est la suite spectrale hypercohomologique associée à $(\ell(P), B)$. Cette suite peut se réécrire sous la forme

$$E_2^{s,t}(\ell(P), B) = H^t_{\mathrm{gl}}((B_{E_r})^s) \Longrightarrow H^{s+t}_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})\ .$$

En effet, B est un complexe de bifoncteurs concentré en degré 0, on a donc :

$$\begin{aligned}
E_2^{s,t}(\ell(P),B) &= \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(H_s(\ell(P)),B) \\
&\simeq \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}((\Gamma^d \mathrm{gl}_{E_r})^s,B) && \text{(proposition 8.14)} \\
&\simeq \mathrm{Ext}^t_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(\Gamma^d \mathrm{gl},(B_{E_r})^s) && \text{(adjonction)} \\
&= H^t_{\mathrm{gl}}((B_{E_r})^s)\;.
\end{aligned}$$

De plus, par définition de ℓ le bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(\ell(P_s),J^t)$ est isomorphe au bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(P_s,J^{t\,(r)})$, d'où un isomorphisme

$$\mathrm{HExt}^*(\ell(P),B) \simeq \mathrm{Ext}^*(\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl},B^{(r)}) = H_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})\;.$$

8.5.3 Arrêt des suites spectrales hypercohomologiques

Soient C et D deux complexes de bifoncteurs dans $\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)$ bornés resp. supérieurement et inférieurement. Soit $D \to J$ un quasi-isomorphisme, où J est un complexe d'injectifs et $J^{(r)} \to K$ un quasi-isomorphisme, où K est un complexe d'injectifs. On a un morphisme de bicomplexes, induit par la précomposition par $I^{(r)}$ et par le morphisme $J^{(r)} \to K$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(C_s,J^t) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(C_s^{(r)},K^t)\;.$$

Ce morphisme induit un morphisme de suites spectrales hypercohomologiques :

$$E^{*,*}(C,D) \xrightarrow{\phi} E^{*,*}(C^{(r)},D^{(r)})\;.$$

Supposons D (donc à fortiori $D^{(r)}$) formel. Alors on peut réécrire les deuxièmes pages des suites spectrales hypercohomologiques sous la forme :

$$\begin{aligned}
E_2^{s,t}(C,D) &= \bigoplus_{i+j=t} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)}(H_s(C),D^j) \\
E_2^{s,t}(C^{(r)},D^{(r)}) &= \bigoplus_{i+j=t} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)}(H_s(C)^{(r)},D^{j\,(r)})
\end{aligned}$$

et par définition de ϕ le morphisme $\phi_2 : E_2^{*,*}(C,D) \to E_2^{*,*}(C^{(r)},D^{(r)})$ est le morphisme induit en cohomologie par la précomposition par la torsion de Frobenius. En particulier, ϕ_2 est injectif (cf. proposition 8.5). Si $C^{(r)}$ est formel alors la suite spectrale hypercohomologique $E^{*,*}(C^{(r)},D^{(r)})$ s'arrête à la page 2, et comme ϕ_2 est injectif, la suite spectrale hypercohomologique $E^{*,*}(C,D)$ s'arrête également à la page 2. Nous venons d'établir le critère suivant d'arrêt des suites spectrales hypercohomologiques.

Proposition 8.16. *Soient C et D deux complexes de bifoncteurs dans $\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)$ bornés resp. supérieurement et inférieurement. On suppose que les complexes $C^{(r)}$ et D sont formels. Alors la suite spectrale hypercohomologique $E^{*,*}(C,D)$ s'arrête à la page* 2.

Si P est une résolution projective de $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$, le complexe $\ell(P)^{(r)}$ est formel d'après la proposition 8.14. Pour tout bifoncteur $B \in \mathrm{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)$ la suite spectrale de torsion de Frobenius de l'exemple 8.15 s'arrête donc à la page 2 et on obtient le résultat suivant :

Théorème 8.17. *[7, Thm 2] Soit B un bifoncteur strictement polynomial. Il existe une filtration de $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})$ naturelle en B, et on a un isomorphisme gradué, naturel en B :*

$$\bigoplus_{s+t=n} H^t_{\mathrm{gl}}((B_{E_r})^s) \simeq H^n_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \;.$$

L'étape suivante va permettre de retirer le gradué dans l'énoncé du théorème, c'est à dire de démontrer le théorème 8.8.

8.5.4 Formalité forte

La démonstration du théorème 8.17 repose sur la formalité du complexe $\ell(P)^{(r)}$. Un résultat plus fort est vrai : le complexe $\ell(P)$ est formel. La démonstration de ce fait a été annoncée dans [Cha3]. Nous donnons ici un argument indiqué par van der Kallen [vdK4] qui permet de déduire la formalité de $\ell(P)$ facilement du travail déjà effectué. L'argument de van der Kallen repose sur la propriété suivante.

Proposition 8.18. *[vdK4, Ex. 5.15] Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs et de projectifs. Soit C un complexe dans $\mathcal{A}$, d'homologie bornée. Supposons que pour tout complexe formel D d'homologie bornée, la suite spectrale hypercohomologique $E^{*,*}(C,D)$ s'arrête à la page 2. Alors C est formel.*

Démonstration. Appelons *taille* d'un complexe le nombre de groupes d'homologie non nuls de ce complexe. Les complexes de taille ≤ 1 sont formels. Pour démontrer la formalité de C il suffit donc de démontrer le fait suivant. Si C est un complexe borné de taille > 1, alors il existe des complexes D et C' tels que $C \simeq D \oplus C'$ dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ où D est de taille 1 et la taille de C' est strictement plus petite que celle de C.

Supposons C de taille > 1. Soit m le plus petit entier tel que $H^m(C) \neq 0$. On prend pour D une troncature de C : $D^k = C^k$ si $k < m$, $D^m = \ker[C^m \to C^{m+1}]$ et $D^k = 0$ pour $k > m$. Le complexe D est un sous-complexe de C, on prend $C' = C/D$. Nous avons nos complexes D et C', il reste à montrer que $C \simeq D \oplus C'$.

Notons $\iota : D \to C$ l'inclusion. Ce morphisme induit un morphisme de suites spectrales hypercohomologiques : $\psi : E^{*,*}(C,D) \to E^{*,*}(D,D)$. Comme le complexe D est formel, on peut écrire la page 2 de ces suites spectrales sous la forme :

$$E^{*,*}(C,D) = \bigoplus_{i+j=t} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(H^{-s}(C), H^j(D)) \;,$$
$$E^{*,*}(D,D) = \bigoplus_{i+j=t} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(H^{-s}(D), H^j(D)) \;.$$

Par définition de $\iota : D \to C$, le morphisme ψ_2 est injectif. Par hypothèse, les suites spectrales $E^{*,*}(C,D)$ et $E^{*,*}(D,D)$ s'arrêtent à la page 2. On en déduit donc que $\psi = \mathrm{HExt}^*_{\mathcal{A}}(\iota, D) : \mathrm{HExt}^*_{\mathcal{A}}(C,D) \to \mathrm{HExt}^*_{\mathcal{A}}(D,D)$ est surjectif. Mais si X et Y sont deux complexes bornés, on a $\mathrm{HExt}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(X,Y)$. La surjectivité de $\mathrm{HExt}^*_{\mathcal{A}}(\iota, D)$ montre donc que le morphisme $\iota : C \to D$ admet un rétracte r dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. On forme alors un diagramme commutatif dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "="] & C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}, r)"] & C' \arrow[d, "="] \\
D \arrow[r] & D \oplus C' \arrow[r] & C'
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont induites par les suites exactes courtes de complexes $0 \to D \to C \to C/D \to 0$ et $0 \to D \to D \oplus C' \to C'$. Les deux lignes du diagramme peuvent donc se compléter en un triangle exact. D'après le lemme des 5, le morphisme du milieu est un isomorphisme dans $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. □

Corollaire 8.19. *[vdK4, Ex. 5.15] Soit P une résolution projective de $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$ dans $\mathcal{P}_{dp^r,dp^r,\Bbbk}(1,1)$. Le complexe $\ell(P)$ est formel.*

Démonstration. Le complexe $\ell(P)$ est d'homologie bornée d'après la proposition 8.14. Soit D un complexe formel dans $\mathcal{P}_{d,d,\Bbbk}(1,1)$. Le complexe $\ell(P)^{(r)}$ est formel, donc la suite spectrale hypercohomologique $E^{*,*}(\ell(P)^{(r)}, D^{(r)})$ s'arrête à la page 2. D'après la proposition 8.16, ceci implique que la suite spectrale $E^{*,*}(\ell(P), D)$ s'arrête à la page 2. Le résultat découle donc de la proposition précédente. □

Le théorème 8.8 découle maintenant de la formalité de $\ell(P)$. En effet, cette formalité implique que la suite spectrale de torsion de Frobenius de l'exemple 8.15 s'arrête à la deuxième page et qu'on a un isomorphisme $\bigoplus_{s+t=n} E_2^{s,t}(\ell(P), B) \simeq \mathrm{HExt}^n_{\mathcal{P}_\Bbbk(1,1)}(\ell(P), B)$ naturel en B. L'identification de la deuxième page et de l'aboutissant donnée dans l'exemple 8.15 achève la démonstration du théorème 8.8.

8.6 Structures additionnelles

L'énoncé du théorème 8.8 passe sous silence la compatibilité de l'isomorphisme $H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(B_{E_r})$ avec la torsion de Frobenius ou avec les cup produits. En effet, cet isomorphisme est construit à partir de l'isomorphisme du théorème 8.13, dont nous ne savons pas démontrer la compatibilité avec les cup produits et la torsion de Frobenius en général. Pour obtenir la compatibilité avec la torsion de Frobenius et les cup produits, il nous faudrait également établir une version de la proposition 8.18 qui tienne compte de ces structures.

Nous donnons ici un moyen de contourner partiellement ces problèmes, en suivant [5, section 5]. L'idée est de construire un nouvel isomorphisme $H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) \simeq H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r})$ pour les bifoncteurs J injectifs. On peut ensuite reprendre une partie des constructions précédentes, en particulier la suite spectrale de torsion de Frobenius de l'exemple 8.15 en utilisant cet isomorphisme. Toutefois, notre nouvel isomorphisme n'existe qu'au niveau de l'homologie : on n'a pas de résultat de formalité compatible au cup produit, ce qui fait que l'on ne peut pas obtenir (sans un travail supplémentaire qui reste à faire) une version du théorème 8.8 compatible au cup produit et à la torsion de Frobenius.

Pour construire notre nouvel isomorphisme, on utilise le lemme suivant, qui découle directement du théorème 8.13 (ou du théorème 8.8).

Lemme 8.20. *[5, cor 4.7] Soit P (resp. J) un projectif (resp. injectif) de $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. Alors pour tout i les foncteurs suivant sont exacts.*

$$F \mapsto \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_\Bbbk}(P^{(r)}, F^{(r)}) , \qquad F \mapsto \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(r)}, J^{(r)}) .$$

Nous sommes maintenant prêt pour construire notre nouvel isomorphisme $H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) \simeq H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r})$. On rappelle que la torsion de Frobenius induit une injection en Ext^*. On dit qu'une famille $\phi_r : E_r \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, I^{(r)})$ est *compatible avec la torsion de Frobenius* si pour tout r les diagrammes suivants commutent (où le morphisme vertical de gauche est l'inclusion canonique de E_r dans E_{r+1} et celui de droite est donné par la précomposition par $I^{(1)}$) :

$$\begin{tikzcd} E_{r+1} \arrow[r, "\phi_{r+1}"] & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(I^{(r+1)}, I^{(r+1)}) \\ E_r \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi_r"] & \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(I^{(r)}, I^{(r)}) \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Théorème 8.21. *[5, thm 5.6] Une famille d'isomorphismes $(\phi_r)_{r\geq 1}$ compatibles avec la torsion de Frobenius détermine des isomorphismes gradués, naturels vis-à-vis du bifoncteur injectif J :*

$$H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r}) \simeq H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) .$$

De plus ces isomorphismes sont compatibles avec le cup produit et avec la *torsion de Frobenius, c'est à dire qu'on a des diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r}) \otimes H^0_{\mathrm{gl}}(K_{E_r}) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\phi_r \otimes \phi_r"] & H^0_{\mathrm{gl}}((J\otimes K)_{E_r}) \arrow[d, "\phi_r"] \\ H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) \otimes H^*_{\mathrm{gl}}(K^{(r)}) \arrow[r, "\cup"] & H^*_{\mathrm{gl}}((J\otimes K)^{(r)}) \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_r"] & H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_{r+1}}) \arrow[d, "\phi_{r+1}"] \\ H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) \arrow[r] & H^*_{\mathrm{gl}}(J^{(r+1)}) \end{tikzcd} \ .$$

Démonstration. On procède en deux étapes. Tout d'abord, tout injectif J de $\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)$ admet une présentation projective de la forme suivante, où X et Y sont des espaces vectoriels :

$$X \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d) \to Y \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d) \to J \to 0 \ . \quad (*)$$

C'est en effet vrai pour les injectifs standard, qui sont des somme finies de foncteurs de la forme $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Gamma^\mu, S^\lambda) \otimes Z$, ($Z$ un espace vectoriel) donc c'est vrai pour tous les injectifs, qui sont des facteurs directs des injectifs standards. On se fixe pour chaque injectif une telle résolution. D'après le lemme 8.20 une résolution de ce type induit une suite exacte en cohomologie :

$$H^i_{\mathrm{gl}}(X \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)^{(r)}) \to H^i_{\mathrm{gl}}(Y \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)^{(r)}) \to H^i_{\mathrm{gl}}(J^{(r)}) \to 0 \ .$$

Et par des arguments élémentaires on a de même une suite exacte :

$$H^0_{\mathrm{gl}}(X \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)_{E_r}) \to H^0_{\mathrm{gl}}(Y \otimes \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)_{E_r}) \to H^0_{\mathrm{gl}}(J_{E_r}) \to 0 \ .$$

Il suffit donc de montrer le théorème pour les bifoncteurs J de la forme $J = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$. Le cas général s'en déduira en considérant les résolutions projectives $(*)$.

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit sur $\otimes^d$ par permutation des facteurs. On en déduit une action de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ sur le bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$. Plus précisément, l'élément (σ, τ) agit sur $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d}) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$ par $(\sigma,\tau)\cdot f = \tau f \sigma^{-1}$. Par adjonction somme-diagonale on peut montrer qu'on obtient ainsi un isomorphisme :

$$\Bbbk(\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)) \ .$$

En d'autres termes, les morphismes

$$(\sigma,\tau)\cdot - : \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$$

forment une base des endomorphismes du bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$. Pour démontrer le cas des bifoncteurs $J = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$, il suffit donc de produire un isomorphisme gradué $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$-équivariant :

$$H^0_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)_{E_r}) \to H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)^{(r)}) \ .$$

Un tel isomorphisme est obtenu comme la composée $\theta \circ (\phi_r^{\otimes d} \otimes \Bbbk\mathfrak{S}_d) \circ (\theta')^{-1}$ où θ et θ' proviennent de la proposition 8.22 ci-dessous. □

La proposition suivante donne une description explicite de $H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d,\otimes^d)^{(r)})$ comme $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$-module. Sa démonstration est un exercice (longuet mais élémentaire) d'application de l'adjonction somme-diagonale (6.19).

Proposition 8.22. *[5, Prop 5.4], [Cha1, p. 781], [FF, Thm 1.8]. Notons $(1,\alpha)$ les éléments de $\{1\}\times\mathfrak{S}_d\subset\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d$. Les applications suivantes sont des isomorphismes.*

$$\begin{array}{rccl}\theta: & H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I,I)^{(r)})^{\otimes d}\otimes\Bbbk\mathfrak{S}_d & \to & H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d,\otimes^d)^{(r)}) \\ & c_1\otimes\cdots\otimes c_d\otimes\alpha & \mapsto & (1,\alpha)_*(c_1\cup\cdots\cup c_n)\;. \\ \theta': & H^0_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I,I)_{E_r})^{\otimes d}\otimes\Bbbk\mathfrak{S}_d & \to & H^0_{\mathrm{gl}}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d,\otimes^d)_{E_r}) \\ & c_1\otimes\cdots\otimes c_d\otimes\alpha & \mapsto & (1,\alpha)_*(c_1\cup\cdots\cup c_n)\;.\end{array}$$

De plus si $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$ agit à la source des morphismes via la formule :

$$(\sigma,\tau)\cdot(c_1\otimes\cdots\otimes c_d\otimes\alpha)=c_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes c_{\sigma^{-1}(d)}\otimes\tau\alpha\sigma^{-1}\;,$$

et au but des morphismes par fonctorialité, alors θ et θ' sont $\mathfrak{S}_d^{\times 2}$-équivariantes.

Nous pouvons maintenant revisiter la construction de la suite spectrale de torsion de Frobenius de l'exemple 8.15. Cette suite spectrale est la suite spectrale associée au bicomplexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}(1,1)}(P,J^{(r)})$, où J est une résolution injective d'un bifoncteur B bihomogène de poids (d,d) et P est une résolution projective du bifoncteur $\Gamma^{dp^r}\mathrm{gl}$. La première page est de la forme

$$\mathbb{E}_1^{s,t}=H^s_{\mathrm{gl}}(J^{t\,(r)})\simeq H^0_{\mathrm{gl}}((J^t_{E_r})^s)\;,$$

où l'isomorphisme provient du théorème 8.21. La paramétrisation est exacte et préserve les injectifs, le complexe $(J^*_{E_r})^s$ est donc une résolution injective de $(B_{E_r})^s$. On a donc un isomorphisme :

$$\mathbb{E}_2^{s,t}(B)\simeq H^t_{\mathrm{gl}}((B_{E_r})^s)\;.$$

Comme l'isomorphisme du théorème 8.21 est compatible au cup produit et à la torsion de Frobenius, l'identification de la page 2 est compatible avec ces opérations. On obtient donc la version bifoncteurs de [5, Thm 7.1].

Proposition 8.23 (Suite spectrale de torsion de Frobenius, deuxième version)**.** *Pour tout $r\geq 1$, il existe une suite spectrale cohomologique, naturelle en B :*

$$\mathbb{E}_2^{s,t}(B,r)=H^t_{\mathrm{gl}}((B_{E_r})^s)\Rightarrow H^{s+t}_{\mathrm{gl}}(B^{(r)})\;.$$

Cette suite spectrale est compatible aux cup produits et à la torsion de Frobenius, c'est à dire qu'on a des applications :

$$\mathbb{E}_k^{s,t}(B,r)\otimes\mathbb{E}_k^{s',t'}(B',r)\to\mathbb{E}_r^{s+s',t+t'}(B\otimes B')\;,\quad \mathbb{E}_k^{s,t}(B,r)\to\mathbb{E}_k^{s,t}(B,r+1)\;.$$

Au niveau des pages 2, ces applications coïncident respectivement avec le cup produit et l'application induite par $\phi_r : E_r \hookrightarrow E_{r+1}$, et au niveau des aboutissants, ces applications coïncident avec le cup produit et l'application induite en cohomologie par la précomposition par la torsion de Frobenius $I^{(1)}$.

Si B est un foncteur strictement polynomial tel que $H^{>0}_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) = 0$ alors la page 2 de la suite spectrale de la proposition 8.23 est concentrée sur la première ligne. La suite spectrale s'arrête donc à la page 2 et Le morphisme de bord de la suite spectrale induit un isomorphisme, naturel en B et compatible aux cup produits et à la torsion de Frobenius :

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B^{(r)}) \simeq H^0_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) \; .$$

En particulier on obtient le résultat suivant, qui nous sera utile pour faire des calculs dans la section 9.4.2.

Corollaire 8.24. *Soit B un bifoncteur strictement polynomial muni d'une structure d'algèbre $B \otimes B \to B$, $\Bbbk \to B$. Supposons que $H^{>0}_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) = 0$. Alors on a un isomorphisme d'algèbres :*

$$H^*_{\mathrm{gl}}(B) \simeq H^0_{\mathrm{gl}}(B_{E_r}) \; .$$

Plus généralement, le théorème 8.17 nous assure que la suite spectrale de la proposition 8.23 s'arrête toujours à la deuxième page (ce sont les mêmes suites spectrales, avec une identification légèrement différente de la page 2). En considérant la suite la suite spectrale de la proposition 8.23 à la place de celle de l'exemple 8.15, c'est à dire en identifiant la seconde page au moyen de l'isomorphisme du théorème 8.21 plutôt qu'au moyen de l'isomorphisme du théorème 8.13, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 8.25. *Dans le théorème 8.17, l'isomorphisme peut être choisi de telle sorte qu'il soit en plus compatible avec les cup produits et la torsion de Frobenius.*

9 Cohomologie des schémas en groupes réductifs

Dans cette section, nous présentons le théorème d'engendrement fini des algèbres de cohomologie des schémas en groupes réductifs (non nécessairement lisses, ni connexes) sur un corps $\Bbbk$. Nous donnons aussi les grandes lignes de sa démonstration suivant [vdK1] et [3], incluant une démonstration courte de l'existence des classes universelles obtenue dans [7]. Nous donnons ensuite dans la section 9.4 des informations plus quantitatives sur les algèbres de cohomologie : un manière d'estimer la dimension de Krull des algèbres de cohomologie, et un calcul explicite d'algèbre de cohomologie (dans l'esprit des théorème fondamentaux de la théorie des invariants) obtenu dans [5].

Dans cette section, $\Bbbk$ **désigne un corps** et $\overline{\Bbbk}$ sa clôture algébrique. Sauf mention explicite du contraire, les produits tensoriels sont pris sur $\Bbbk$. On rappelle que tous **les schémas en groupes sont implicitement supposés algébriques affines**, comme définis dans la section 5.

9.1 Le théorème d'engendrement cohomologique fini

Soit G un schéma en groupes (algébriques affines) sur $\Bbbk$. Une $\Bbbk G$-algèbre commutative (resp. de type fini) est une $\Bbbk$-algèbre A commutative (resp. de type fini) munie d'une action de G par automorphismes d'algèbres.

Définition 9.1. Un schéma en groupes G possède le propriété d'engendrement fini (EF) si pour toute $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini A, l'algèbre des invariants A^G est une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini.

Les schémas en groupes ayant la propriété (EF) fournissent donc des solutions positives pour le XIV-ème problème de Hilbert. On peut considérer la version cohomologique de la définition précédente.

Définition 9.2. Un schéma en groupes G possède le propriété d'engendrement cohomologique fini (ECF) si pour toute $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini A, l'algèbre de cohomologie $H^*(G, A)$ est une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative de type fini.

Comme A^G est le quotient de $H^*(G, A)$ par l'idéal $H^{>0}(G, A)$, la propriété (ECF) implique la propriété (EF). Le théorème suivant a été conjecturé par van der Kallen [vdK1].

Théorème 9.3. *[3] Soit $\Bbbk$ un corps et G un schéma en groupes sur $\Bbbk$. Alors G a la propriété (ECF) si et seulement si G a la propriété (EF).*

Remarque 9.4. Par changement de base on a un isomorphisme de $\overline{\Bbbk}$-algèbres graduées : $H^*(G, A) \otimes \overline{\Bbbk} \simeq H^*(G_{\overline{\Bbbk}}, A \otimes \overline{\Bbbk})$. En particulier, si $G_{\overline{\Bbbk}}$ a la propriété (ECF) il en va de même de G. Il suffit donc de démontrer le théorème 9.3 pour les corps algébriquement clos.

Remarque 9.5. En caractéristique nulle, tous les groupes ayant la propriété (EF) ont des représentations semisimples. On a donc $H^*(G, A) = A^G$ pour tout A et l'équivalence des propriétés (EF) et (ECF) est triviale.

Remarque 9.6. Supposons que G possède la propriété (ECF). Soit A une $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini et M un A-module noethérien, muni d'une action de G compatible. Alors $H^*(G, M)$ est un $H^*(G, A)$-module noethérien. En effet, si on munit le G-module $S := A \oplus M$ d'une structure de $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini par $(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + bm)$. Alors $H^*(G, S)$ est une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini, d'où on déduit le résultat.

Les schémas en groupes satisfaisant la propriété (EF) sont bien connus. Si G est un schéma en groupes sur $\Bbbk$ alors $G(\overline{\Bbbk})$ est un groupe algébrique affine au sens de [Hum, Spr] et on note $G(\overline{\Bbbk})^0$ la composante connexe de l'élément neutre. On a alors équivalence entre les deux énoncés suivants.

(i) G a la propriété (EF).

(ii) $G(\overline{\Bbbk})^0$ est réductif.

En effet, si G est lisse, Haboush a montré [Hab] (i)$\Leftarrow$(ii). La réciproque est dûe à Popov [Pop]. Pour les schémas en groupes non nécessairement lisses, Waterhouse a montré [Wat2] que G a la propriété (EF) si et seulement si $G(\overline{\Bbbk})^0$ a la propriété (EF). Le théorème 9.3 peut donc se reformuler de la manière suivante.

Théorème 9.7. *Soit $\Bbbk$ un corps et G un schéma en groupes sur $\Bbbk$. Alors G possède la propriété (ECF) si et seulement si $G(\overline{\Bbbk})^0$ est réductif.*

Le théorème de Haboush mentionné ci-dessus résout positivement une conjecture formulée par Mumford. La propriété (EF) est en effet utilisée en théorie géométrique des invariants [Mum]. Le rôle géométrique des algèbres de cohomologie reste pour l'instant énigmatique et le problème suivant est ouvert.

Problème 9.8. *Quels objets géométriques sont reliés aux algèbres de cohomologie des groupes réductifs ?*

On sait depuis Evens [Eve] que les groupes finis ont la propriété (ECF). Motivés par la théorie des variétés supports, Friedlander et Suslin ont étendu [FS] ce résultat aux schémas en groupes finis (i.e. tels que $\Bbbk[G]$ est de dimension finie). Une approche de la théorie des variétés supports consiste en effet à construire une variété algébrique support pour chaque G-module M à partir de la $\Bbbk$-algèbre de type fini $H^*(G, \Bbbk)$ et de son action sur $H^*(G, \mathrm{End}_{\Bbbk}(M))$. Pour les groupes algébriques affines réductifs (donc lisses et connexes) on dispose de l'engendrement fini de la cohomologie mais l'algèbre $H^*(G, \Bbbk)$ présente peu d'intérêt car elle est triviale (cf. section 5.5.3). Une théorie des variétés supports pour les groupes algébriques affines a été récemment proposée par Friedlander [F]. L'approche de Friedlander est complètement indépendante de la cohomologie des groupes algébriques. Les algèbres de cohomologie des groupes réductifs pourraient avoir leur rôle à jouer dans la question suivante.

Problème 9.9. *Quels sont les liens entre les variétés supports et la cohomologie des groupes algébriques ?*

Enfin, un théorème de Franjou et van der Kallen [FvdK] montre que les schémas en groupes de Chevalley ont la propriété (EF) lorsque $\Bbbk$ est un anneau noethérien. Le résultat de Evens [Eve] montre que les groupes finis ont la propriété (ECF) si $\Bbbk$ est un anneau noethérien. Ceci suggère le problème suivant, sur lequel quelques résultats partiels sont disponibles dans [FvdK].

Problème 9.10. *Dans quelle mesure peut-on généraliser le théorème 9.3 sur un anneau de base noethérien ?*

9.2 Démonstration du théorème 9.3

Nous présentons maintenant les grandes lignes de la démonstration du théorème d'engendrement cohomologique fini (théorème 9.3). L'architecture de cette démonstration est due à W. van der Kallen, et présentée dans l'article [vdK1]. L'article de Srinivas et van der Kallen [SvdK] a ensuite retiré certaines contraintes sur la caractéristique, et les classes universelles requises dans la démonstration ont finalement été construites dans [2, 3].

D'après les remarques 9.4 et 9.5, on peut se restreindre à considérer un corps de base algébriquement clos de caractéristique non nulle. On fixe donc dans cette section 9.2 un corps $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ **algébriquement clos de caractéristique** $p > 0$**.**

9.2.1 Restriction au cas $G = GL_n$

Proposition 9.11. *[vdK2, Lm 3.7] Si GL_n possède la propriété (ECF) alors tout sous-schéma en groupes G de GL_n avec la propriété (EF) possède la propriété (ECF).*

Démonstration. Si A est une $\Bbbk G$-algèbre de type fini, alors $\mathrm{ind}_G^{GL_n} A = (A \otimes \Bbbk[GL_n])^G$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini puisque G possède la propriété (EF). Les foncteurs dérivés de l'induction s'interprètent [Jan, I.5.12] comme de la cohomologie de faisceaux quasi-cohérents sur GL_n/G. Mais la propriété (EF) assure que la variété GL_n/G est affine donc cette cohomologie s'annule. On obtient donc un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbres $H^*(G, A) \simeq H^*(GL_n, \mathrm{ind}_G^{GL_n} A)$, qui assure que $H^*(G, A)$ est de type fini. □

Comme tout schéma en groupes peut se plonger dans un GL_n pour n suffisamment grand [Wat1, Thm 3.4], la proposition 9.11 permet de restreindre la démonstration au cas de GL_n. Les schémas en groupes non lisses interviendront cependant dans la démonstration du théorème 9.3 par l'intermédiaire de la suite spectrale de Hochschild-Serre utilisée dans les sections 9.2.4 et 9.2.5 ci-dessous.

Notation. Pour alléger les notations on posera dans la suite $G := GL_n$ et $G_r := (GL_n)_r$ le r-ième noyau de Frobenius de G. Le quotient de G/G_r est isomorphe à G, mais nous prendrons soin de toujours écrire G/G_r par souci de clarté dans les arguments.

9.2.2 Le théorème de Srinivas et van der Kallen

On rappelle que $G = GL_n$. Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 9.3, cf. remarque 9.6. Ce cas particulier est directement démontré dans [SvdK], et constitue un ingrédient crucial pour la démonstration du théorème 9.3.

Théorème 9.12. *[SvdK] Soit A une $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini et M un A-module noethérien, muni d'une action de G telle que l'application $A \otimes M \to M$ est G-équivariante. On suppose que A est munie d'une bonne filtration. Alors $H^*(G, M)$ est un module noethérien sur $H^*(G, A) = H^0(G, A)$.*

9.2.3 Le théorème de Friedlander et Suslin

Morphismes noethériens. La notion de morphisme noethérien est une manière très pratique et économe de s'exprimer, que nous reprenons de [3, 6.2]. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives. On dit que f est *noethérien* s'il fait de B un A-module noethérien à gauche[34]. Le lemme suivant permet de manipuler cette notion.

Lemme 9.13.
1. *Si f et g sont noethériens, alors $f \circ g$ est noethérien.*
2. *Si $f \circ g$ est noethérien alors f est noethérien.*
3. *Si $f : A \to B$ est noethérien et A est une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative de type fini, alors B est une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative de type fini.*
4. *Soit B une algèbre commutative de type fini, et $A \subset B$ une sous-algèbre. On suppose qu'il existe $n > 1$ tel que pour tout $b \in B$, $b^n \in A$. Alors $A \hookrightarrow B$ est noethérien et A est une $\Bbbk$-algèbre de type fini.*

[34]Si A et B sont des algèbres commutatives de type fini, alors un morphisme noethérien est appelé « morphisme fini »en géométrie algébrique.

Cohomologie des schémas en groupes finis. On conserve la notation $G = GL_n$ et G_r le r-ième noyau de Frobenius de GL_n. Notons $\mathbf{S}_r$ la $\Bbbk G$-algèbre graduée commutative de type fini définie par :

$$\mathbf{S}_r = \bigotimes_{i=1}^{r} S^*\left((\mathfrak{gl}_n)^\vee[2p^{i-1}]\right) \ ,$$

où $\mathfrak{gl}_n$ est la représentation adjointe de G, $U^\vee = \mathrm{Hom}_\Bbbk(U, \Bbbk)$ désigne le dual d'un $\Bbbk$-espace vectoriel U, et $(\mathfrak{gl}_n)^\vee[k]$ indique une copie de l'espace vectoriel $(\mathfrak{gl}_n)^\vee$ placé en degré k. L'algèbre $\mathbf{S}_r^{(r)}$ est canoniquement une $\Bbbk G$-algèbre (cf section 5.5.5), et G_r agit trivialement sur $\mathbf{S}_r^{(r)}$. L'action de G factorise donc en une action de G/G_r. On a également une action de G/G_r sur $H^*(G_r, \Bbbk)$ intervenant dans la suite spectrale de Hochschild-Serre à coefficients triviaux associée à la suite exacte courte de schéma en groupes (cf. section 5.4.3)

$$1 \to G_r \to G \to G/G_r \to 1 \ .$$

Théorème 9.14. *[FS] Il existe un morphisme de $\Bbbk(G/G_r)$-algèbres*

$$\psi_{FS} : \mathbf{S}_r^{(r)} \to H^*(G_r, \Bbbk)$$

satisfaisant la propriété suivante. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\Bbbk[G]$-algèbres graduées commutatives. On suppose que B est une $\Bbbk$-algèbre de type fini et que f est noethérien. Alors la composée suivante est un morphisme noethérien :

$$\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes A^{G_r} \xrightarrow{\psi_{FS} \otimes f} H^*(G_r, \Bbbk) \otimes B^{G_r} \xrightarrow{\cup} H^*(G_r, B) \ .$$

L'énoncé du théorème 1.5 de [FS] semble au premier abord plus restrictif que celui du théorème 9.14 pour deux raisons.

Tout d'abord, [FS, Thm 1.5] suppose que l'action de G_r sur A est triviale. Cependant, si A est une $\Bbbk G$-algèbre, alors pour tout $a \in A$ l'élément a^{p^r} est invariant par G_r. L'image du morphisme $A^{(r)} \to A$ induit par l'élévation à la puissance p^r est donc incluse dans A^{G_r}. On peut donc écrire un diagramme commutatif de $\Bbbk$-algèbres dans lequel les morphismes verticaux sont induits par l'élévation à la puissance p^r :

$$\begin{tikzcd} A^{(r)} \arrow[r, "f^{(r)}"] \arrow[d] & B^{(r)} \arrow[d] \\ A^{G_r} \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} .$$

Comme B est une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini, l'application $B^{(r)} \to B$ est noethérienne. L'application $f^{(r)} : A^{(r)} \to B^{(r)}$ est également noethérienne. En effet, le corps $\Bbbk$ étant parfait (algébriquement clos), le changement de base le long de du morphisme de Frobenius induit une correspondance bijective entre les sous-A-modules de B et les sous-$A^{(r)}$-modules de

$B^{(r)}$. L'application composée $A^{(r)} \to A^{G_r} \to B$ est donc noethérienne, donc $f : A^{G_r} \to B$ est noethérienne. On peut alors appliquer [FS, Thm 1.5] avec 'C'$= A^{G_r}$ et 'M'$= B$ pour obtenir la noethérianité annoncée dans le théorème 9.14.

Ensuite, [FS, Thm 1.5] ne fait pas explicitement référence à l'action de G/G_r. Pour voir que l'application du théorème 9.14 est G/G_r-équivariante, il suffit de montrer que ψ_{FS} est G/G_r-équivariante, ou de manière équivalente que sa restriction aux G/G_r-modules $(\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee[2p^{i-1}]$ est G/G_r-équivariante. Si $f \in (\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee[2p^{i-1}] = \mathrm{Hom}_{G_r}(\mathfrak{gl}_n^{(r)}, \Bbbk)[2p^{i-1}]$, on a [FS, p. 215] :

$$\psi_{FS}(f) := f_* e_i^{(r-i)} ,$$

où $e_i^{(r-i)}$ est une certaine classe dans $H^{2p^{i-1}}(G_r, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$. La classe $e_i^{(r-i)}$ est obtenue comme la restriction à G_r d'une classe $e_i^{(r-i)} \in H^{2p^{i-1}}(G, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$, elle est donc invariante sous l'action de G/G_r. L'application ψ_{FS} est donc G/G_r-équivariante car on peut réécrire sa restriction à $(\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee[2p^{i-1}]$ comme la restriction à $\Bbbk e_i^{(r-i)} \otimes ((\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee)^{G_r}$ de la composée G/G_r-équivariante suivante (où l'application de droite est induite par l'accouplement de dualité $\mathfrak{gl}_n^{(r)}$ et $(\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee$) :

$$H^*(G_r, \mathfrak{gl}_n^{(r)}) \otimes H^0(G_r, (\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee) \xrightarrow{\cup} H^*(G_r, \mathfrak{gl}_n^{(r)} \otimes (\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee) \to H^*(G_r, \Bbbk) .$$

La définition du morphisme ψ_{FS} rappelée ici nous servira plus tard dans la démonstration du théorème 9.3.

9.2.4 Filtration de Grosshans en cohomologie

On conserve la notation $G = GL_n$.

La filtration de Grosshans. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$, la hauteur de Grosshans de λ est définie par $\mathrm{ht}(\lambda) = \sum (n - 2i + 1)\lambda_i$. Si M est un G-module, on note $M_{\leq i}$ le plus gros sous-module de M dont tous les poids λ satisfont $\mathrm{ht}(\lambda) \leq i$. La *filtration de Grosshans* de M est la filtration :

$$0 \subset M_{\leq 0} \subset M_{\leq 1} \subset \cdots \subset M_{\leq i} \subset \dots .$$

La filtration de Grosshans d'une $\Bbbk G$-algèbre A possède les propriétés suivantes [Gro], [vdK1].

1. La filtration de Grosshans est une filtration d'algèbres. Si A est une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini, alors $\mathrm{gr}\, A$ l'est également.
2. On a une inclusion de $\Bbbk G$-algèbres

$$\mathrm{gr}\, A \hookrightarrow \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A ,$$

   où le G-module $\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A$ possède une bonne filtration. De plus, si A est de type fini, alors la $\Bbbk$-algèbre $\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A$ est de type fini et un résultat de Mathieu [Mat] assure qu'il existe un entier $r \geq 0$ (dépendant de A) tel que

$$\forall x \in \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A, \quad x^{p^r} \in \mathrm{gr}\, A\ .$$

En particulier, le morphisme d'élévation à la puissance p^r-ième induit un morphisme noethérien G-équivariant

$$(\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)} \xrightarrow{\psi_M} \mathrm{gr}\, A\ .$$

3. Soit $\mathcal{A} \subset A[t]$ la sous-algèbre engendrée par les ensembles $t^i A_{\leq i}$. On a un morphisme d'algèbres $\mathcal{A} \twoheadrightarrow A$ qui envoie t sur 1. Les $\Bbbk$-modules $\mathcal{A}_{\leq i} := \sum_{j\leq i} t^j A_{\leq j}$ définissent une filtration triviale de l'algèbre $\mathcal{A}$, le morphisme $\mathcal{A} \to A$ est compatible aux filtrations et passe au quotient en un morphisme $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A$.

Deux lemmes pour l'analyse des suites spectrales d'algèbres.

Lemme 9.15. *Soit A une $\Bbbk$-algèbre différentielle graduée sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique $p > 0$. Si A est graduée commutative de type fini, alors l'algèbre graduée commutative $H(A)$ est de type fini.*

Rappelons qu'une filtration $\cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \ldots$ d'un $\Bbbk$-module M est dite *Hausdorff* si $\bigcap F_i = \{0\}$ et *exhaustive* si $\bigcup F_i = M$. La filtration est *bornée* si de plus $F_{i+1}/F_i = 0$ pour $i \gg 0$ ou $i \ll 0$.

Lemme 9.16. *Soit A une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative filtrée sur un corps $\Bbbk$. On suppose que la filtration est bornée en chaque degré. Si l'algèbre graduée commutative* $\mathrm{gr}\, A$ *est de type fini, alors A est de type fini.*

L'engendrement fini de $H^*(G, \mathrm{gr}\, A)$. Le théorème suivant constitue une étape intermédiaire dans la démonstration du théorème 9.3.

Théorème 9.17. *[vdK1, Thm 1.1] [SvdK, Cor 1.4] Soit A une $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini. La $\Bbbk$-algèbre de cohomologie $H^*(G, \mathrm{gr}\, A)$ est une algèbre graduée commutative de type fini.*

Démonstration. Nous suivons [vdK1]. On considère la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la suite exacte $1 \to G_r \to G \to G/G_r \to 1$ (cf. section 5.4.3) :

$$E_2^{i,j}(\mathrm{gr}\, A) = H^i(G/G_r, H^j(G_r, \mathrm{gr}\, A)) \Rightarrow H^{i+j}(G, \mathrm{gr}\, A)\ . \qquad (9.1)$$

Si M est un G-module alors G_r agit trivialement sur $M^{(r)}$ en particulier on a $((\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)})^{G_r} = (\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)}$. D'après le théorème de Friedlander et Suslin 9.14 (avec 'B'$= \mathrm{gr}\, A$ et 'A'$= (\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)}$) on a donc un morphisme noethérien

$$\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes (\mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)} \xrightarrow{\psi_{FS}\otimes\psi_M} H^*(G_r, \Bbbk) \otimes (\mathrm{gr}\, A)^{G_r} \xrightarrow{\cup} H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)\ . \qquad (9.2)$$

Comme $\mathbb{k}$ est parfait (algébriquement clos), pour tout G/G_r-module M, l'espace vectoriel $M^{(-r)}$ obtenu par changement de base le long du morphisme $\mathbb{k} \to \mathbb{k}$, $x \mapsto x^{-p^r}$ admet une action de G et on a un isomorphisme gradué, naturel en M

$$H^*(G/G_r, M) \simeq H^*(G, M^{(-r)})^{(r)} .$$

On applique cela au morphisme de $\mathbb{k}(G/G_r)$-algèbres (9.2). La deuxième page de la suite spectrale de Hochschild Serre peut donc se réécrire sous la forme

$$E_2^{i,j}(\mathrm{gr}\, A) = H^i(G, H^j(G_r, \mathrm{gr}\, A)^{(-r)})^{(r)} ,$$

où $H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)^{(-r)}$ est un module noethérien sur $\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A$. D'après [ABW, Thm III.1.5] $\mathbf{S}_r$ admet une bonne filtration, le produit tensoriel $\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A$ admet donc une bonne filtration. Le théorème de Srinivas et van der Kallen 9.12 implique donc le résultat suivant.

Résultat 9.18. *L'application induite par le morphisme* (9.2)

$$(\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)\, G/G_r} \to H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)^{G/G_r} = E_2^{0,*}(\mathrm{gr}\, A) \subset E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$$

fait de $E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$ un module noethérien sur $(\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)\, G/G_r} \simeq (\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^G$ (en particulier $E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$ un module noethérien sur sa colonne d'indice 0).

En particulier on a :

1. $E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$ est une algèbre graduée commutative de type fini (en effet $(\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^{(r)\, G/G_r} \simeq ((\mathbf{S}_r \otimes \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A)^G)^{(r)}$ est une $\mathbb{k}$-algèbre commutative de type fini par la théorie des invariants, cf. section 5.5.4). En conséquence toutes les pages de la suite spectrale de Hochschild-Serre sont de type fini par le lemme 9.15.
2. $E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$ n'a qu'un nombre fini de colonnes non nulles. En conséquence la suite spectrale s'arrête à une certaine page, i.e. on a $E_\infty^{*,*}(\mathrm{gr}\, A) = E_N^{*,*}(\mathrm{gr}\, A)$ pour un certain N.

Ainsi, on obtient que $E_\infty^{*,*}(\mathrm{gr}\, A) = \mathrm{Gr} H^*(G, \mathrm{gr}\, A)$ est une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini, donc $H^*(G, \mathrm{gr}\, A)$ est une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini par le lemme 9.16. □

9.2.5 Classes universelles et engendrement cohomologique fini

Nous conservons les notations des sections précédentes. En particulier $G = GL_n$ et $\mathfrak{gl}_n$ désigne la représentation adjointe de G.

Suite spectrale associée à la filtration de Grosshans. Comme A est filtrée, on a une suite spectrale de $\mathbb{k}$-algèbres :

$$E_1^{i,j}(A) = H^{i+j}(G, \mathrm{gr}_{-i}\, A) \Rightarrow H^{i+j}(G, A) . \quad (9.3)$$

C'est une suite spectrale d'algèbres. Le théorème 9.17 assure que la page initiale de la suite spectrale est une $\mathbb{k}$-algèbre de type fini. En particulier :

1. Pour tout m, il n'y a qu'un nombre fini de $E_1^{m-i,i}(A)$ non nuls[35]. Il n'y a donc pas de problème de convergence, bien que la suite spectrale soit second quadrant.
2. Toutes les pages de la suite spectrale sont des $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives de type fini par le lemme 9.15. Cependant, le nombre de générateurs augmente avec le numéro de la page, et il n'y a à priori aucune raison pour que $E_\infty^{*,*}(A)$ soit une $\Bbbk$-algèbre de type fini.

Pour démontrer que $H^*(G,A)$ est une $\Bbbk$-algèbre graduée commutative de type fini, il suffit donc de démontrer que $E_\infty^{*,*}(A) = E_N^{*,*}(A)$ pour un certain entier N. Il existe une technique standard pour démontrer cela, due à Evens.

Lemme 9.19. *[Eve] Soit $E^{*,*}$ une suite spectrale de $R^{*,*}$-modules. S'il existe k tel que E_k est un $R^{*,*}$-module noethérien, alors il existe N tel que $E_N^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.*

L'algèbre $H^{i+j}(G, \mathrm{gr}_{-i}\mathcal{A})$ est un candidat naturel pour $R^{i,j}$. En effet, l'algèbre $\mathcal{A}$ est trivialement filtrée, et la projection $\mathcal{A} \twoheadrightarrow A$ passe au gradué en un morphisme $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A$. La suite spectrale $E^{*,*}(\mathcal{A})$ est donc triviale, et on a un morphisme de suites spectrales :

$$H^*(G,\mathcal{A}) = E_k^{*,*}(\mathcal{A}) \to E_k^{*,*}(A)\ .$$

Pour pouvoir appliquer le lemme 9.19, et en conclure que $H^*(G,A)$ est une $\Bbbk$-algèbre de type fini, il nous suffit donc de démontrer que la première page de la suite spectrale $E^{*,*}(A)$ est noethérienne sur $H^*(G,\mathcal{A})$, ce qui correspond au résultat suivant.

Résultat 9.20. *L'application $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A$ induit un morphisme noethérien :*

$$H^*(G,\mathcal{A}) \to H^*(G, \mathrm{gr}\, A)\ .$$

Classes universelles et factorisation. L'étape délicate pour démontrer le résultat 9.20 consiste à établir résultat suivant.

Résultat 9.21. *Notons ϕ le morphisme composé induit par la restriction et par $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A$:*

$$\phi : H^*(G,\mathcal{A}) \to H^0(G/G_r, H^*(G_r,\mathcal{A})) \to H^0(G/G_r, H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)).$$

Le morphisme ϕ est noethérien.

[35] En effet, la cohomologie de degré total 0 est concentrée en bidegré $(0,0)$ car $H^0(G, \mathrm{gr}\, A) = H^0(G, \mathrm{gr}_0\, A) = H^0(G,A)$. Si $g_1,\dots,g_n$ sont des générateurs de $E_1(A)$, les produits $g_1^{\alpha_1}\cdots g_n^{\alpha_n}$ ne fournissent donc qu'un nombre fini de bidegrés non nuls en degré total m.

La démonstration de ce résultat utilise deux ingrédients essentiels : le théorème de Friedlander et Suslin 9.14 et l'existence de certaines classes universelles dans la cohomologie de GL_n généralisant les classes universelles de Friedlander et Suslin. Rappelons tout d'abord que si $n \geq 2$, alors $H^2(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(1)})$ est un espace vectoriel de dimension 1 (un générateur explicite est donnée par la classe du vecteur de Witt [vdK1, 4.1]).

Théorème 9.22. *[3] Il existe des classes $c[i] \in H^{2i}(G, \Gamma^i(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$ satisfaisant les conditions suivantes.*

(i) La classe $c[1]$ est la classe du vecteur de Witt.

(ii) Pour tout i, j, notons $\Delta_{i,j} : \Gamma^{i+j}(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \to \Gamma^i(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \otimes \Gamma^j(\mathfrak{gl}_n^{(1)})$ l'inclusion canonique. On a une égalité dans $H^{2i+2j}(G, \Gamma^i(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \otimes \Gamma^j(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$:
$$(\Delta_{i,j})_* c[i+j] = c[i] \cup c[j] \ .$$

Nous indiquons maintenant deux conséquences du théorème 9.22. On suit l'exposition de [vdK1]. On produit tout d'abord de nouvelles classes $c_r[a]^{(j)}$ comme l'image de $c[ap^{r-1}]$ par la composée :

$$H^{2ap^{r-1}}(G, \Gamma^{ap^{r-1}}(\mathfrak{gl}_n^{(1)})) \to H^{2ap^{r-1}}(G, \Gamma^a(\mathfrak{gl}_n^{(r)})) \to H^{2ap^{r-1}}(G, \Gamma^a(\mathfrak{gl}_n^{(r+j)}))$$

où le premier morphisme est induit par l'application provenant de la transformation naturelle $\Gamma^{ap^{r-1}\,(1)} \to \Gamma^{a\,(r)}$ et le deuxième est donné par l'application induite en cohomologie par la torsion de Frobenius. Le calcul de [vdK1, Lm 4.7] montre que le théorème 9.22 fournit une nouvelle construction des classes universelles de Friedlander et Suslin.

Corollaire 9.23. *[FS, Thm 1.2] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$. Pour tout $n > 1$ et tout $r \geq 1$, la classe*
$$c_r[1] \in H^{2p^{r-1}}(G, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$$
est définie sur $\mathbb{F}_p$ et se restreint non trivialement à $H^{2p^{r-1}}(G_1, \mathfrak{gl}_n^{(r)})$.

En conséquence du corollaire 9.23, la restriction du morphisme du théorème de Friedlander et Suslin 9.14
$$\psi_{FS} : \mathbf{S}_r^{(r)} \to H^*(G_r, \Bbbk)$$
à $(\mathfrak{gl}_n^{(r)})^\vee[2p^{i-1}] \subset \mathbf{S}_r^{(r)}$ peut être prise égale au cup produit par $c_i[1]^{(r-i)}$ (au lieu de $e_i^{(r-i)}$). Mais en plus du résultat de Friedlander et Suslin, le théorème 9.22 montre que les cup produits $(c_i[1]^{(r-i)})^{\cup d}$ coïncident avec la classe $(\Delta_{1^d})_*(c_i[d]^{(r-i)})$ dans $H^*(G, (\mathfrak{gl}_n^{(r)})^{\otimes d})$, ce qui permet de montrer le résultat suivant.

Corollaire 9.24. *Pour toute $\mathbb{k}G$-algèbre A, on peut définir un morphisme de $\mathbb{k}$-algèbres graduées*

$$\psi_{vdK} : (\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes A)^G \to H^*(G, A)$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes A)^G \arrow[r, "="] \arrow[d, "\psi_{vdK}"] & (\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes A^{G_r})^{G/G_r} \arrow[d, "\Psi_{FS}\otimes \mathrm{Id}"] \\
H^*(G, A) \arrow[d, "\mathrm{res}"] & (H^*(G_r, \mathbb{k}) \otimes A^{G_r})^{G/G_r} \arrow[d, "\cup"] \\
H^*(G_r, A)^G \arrow[r, "="] & H^*(G_r, A)^{G/G_r}
\end{tikzcd} .$$

Exemple 9.25. Sur le facteur direct $(S^d(\mathrm{gl}_n^{(r)\vee}[2p^{i-1}]) \otimes A)^G$ de $(\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes A)^G$, le morphisme ψ_{vdK} est défini comme la composée :

$$(S^d(\mathrm{gl}_n^{(r)\vee}) \otimes A)^G \to H^*(G, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(r)}) \otimes S^d(\mathrm{gl}_n^{(r)\vee}) \otimes A) \to H^*(G, A)$$

où la première application est donnée par le cup produit par la classe $c_i[d]^{(r-i)}$ de degré $2dp^{i-1}$, et la deuxième par l'accouplement de dualité.

Nous avons désormais en main tous les outils pour démontrer le résultat 9.21. D'après le théorème de Friedlander et Suslin 9.14 (avec 'A'$= \mathcal{A}$ et 'B'$=\mathrm{gr}\, A$) et la théorie des invariants, on a un morphisme noethérien

$$\psi'_{FS} : H^0(G/G_r, \mathbf{S}_r^{(r)} \otimes \mathcal{A}^{G_r}) \to H^0(G/G_r, H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)) .$$

D'après le corollaire 9.24, il existe un morphisme ψ_{vdK} qui s'insère dans un diagramme commutatif de morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres :

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(G/G_r, \mathbf{S}_r^{(r)} \otimes \mathcal{A}^{G_r}) \arrow[dl, dashed, "\psi_{vdK}"'] \arrow[d, "\psi'_{FS}"] \\
H^*(G, \mathcal{A}) \arrow[r, "\phi"] & H^0(G/G_r, H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A))
\end{tikzcd} .$$

Puisque ψ'_{FS} est noethérien, on déduit du diagramme que ϕ est noethérien, ce qui démontre le résultat 9.21.

Fin de la démonstration. On réexamine la suite spectrale de Hochschild-Serre (9.1). On sait que la page 2 de cette suite suite spectrale est noethérienne sur sa colonne d'indice 0 par le résultat 9.18, et que la colonne d'indice zéro est noethérienne sur $H^*(G, \mathcal{A})$ via ϕ par le résultat 9.21. Le lemme 1.6 de [FS] (avec 'B'$= \mathbb{k}$ et 'A'$= H^*(G, \mathcal{A})$) montre donc que $\mathcal{A} \to \mathrm{gr}\, A$ induit une application noethérienne en cohomologie, ce qui prouve le résultat 9.20 et achève la démonstration du théorème 9.3.

9.3 Construction des classes universelles (restreintes)

Nous renvoyons aux articles [2, 3] pour les détails complets sur la construction des classes universelles du théorème 9.22. On construit y les classes universelles dans la cohomologie des bifoncteurs $(\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)} = \Gamma^d \circ \mathrm{gl}^{(1)} \simeq \Gamma^{d\,(1)} \circ \mathrm{gl}$. Les classes universelles désirées pour GL_n s'obtiennent ensuite via l'application d'évaluation

$$H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}) \to H^*(GL_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))\;.$$

La construction des classes est faite « à la main ». On construit tout d'abord une (co)résolution $H^*_{\mathrm{gl}}(-)$-acyclique $C(d)^*$ des bifoncteurs $(\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}$ à partir de la double construction bar de l'algèbre symétrique et des complexes de Troesch. Les constructions $C(d)^*$ sont suffisamment explicites pour qu'on puisse construire des cocycles explicites $z[d]$ dans le complexes $H^0_{\mathrm{gl}}(C(d)^{2d})$ qui représentent les classes $c[d]$ et on vérifie les propriétés requises pour les classes universelles directement sur les cocycles $z[d]$. Cette investigation combinatoire de la cohomologie des bifoncteurs $(\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}$ permet en fait d'obtenir plus de classes que nécessaire pour la démonstration du théorème 9.3. Plus précisément on obtient le résultat suivant.

Théorème 9.26. *[3, Thm 3.1] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$. Il existe des morphismes gradués*

$$\psi_d : \Gamma^d\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \to H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)})\;,$$

pour $d \geq 1$ pour lesquels les conditions suivantes sont satisfaites.

1. *ψ_1 est l'application identité.*
2. *pour tout $d \geq 1$ et tout $n \geq p$, la composée suivante (dans laquelle la deuxième application est induite par évaluation sur la paire $(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$) est injective :*

$$\Gamma^d\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \xrightarrow{\psi_d} H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}) \to H^*(GL_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))\;.$$

En particulier, pour tout $d \geq 1$, ψ_d est injective.

3. *Pour tous les entiers d, e strictement positifs, on a des diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^{d+e}\mathrm{gl})^{(1)}) \arrow[r, "\Delta_{d,e\,*}"] & H^*_{\mathrm{gl}}(\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)} \otimes (\Gamma^e \mathrm{gl})^{(1)}) \\
\Gamma^{d+e}\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \arrow[u, "\psi_{d+e}"] \arrow[r, hook, "\Delta_{d,e}"] & \Gamma^d\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \otimes \Gamma^e\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \arrow[u, "\psi_d \cup \psi_e"']
\end{tikzcd}\;,$$

et

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^d gl)^{(1)} \otimes (\Gamma^e \mathrm{gl})^{(1)}) \arrow[r, "m_{d,e\,*}"] & H^*_{\mathrm{gl}}((\Gamma^{d+e} gl)^{(1)}) \\
\Gamma^d\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \otimes \Gamma^e\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \arrow[r, "m_{d,e}"] \arrow[u, "\psi_d \cup \psi_e"] & \Gamma^{d+e}\big(H^*_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})\big) \arrow[u, "\psi_{d+e}"]
\end{tikzcd} ,$$

où $m_{d,e}$ et $\Delta_{d,e}$ désignent les applications induites par la multiplication et la comultiplication de l'algèbre à puissances divisées.

La deuxième partie de l'article [3] donne une variante de la démonstration du résultat de noethérianité 9.21 (et donc du théorème 9.3). Cette variante est plus technique, mais demande moins de propriétés sur les classes universelles. Plus précisément, cette variante utilise le théorème suivant à la place du théorème 9.22.

Théorème 9.27 (Classes restreintes)**.** *Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$ et $n \geq 2$. Il existe des classes $c[d] \in H^{2d}(GL_n, \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}))$, $d \geq 1$ satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *$c[1]$ est non nulle.*
2. *Notons $\Delta_{(1^d)} : \Gamma^d(\mathfrak{gl}_n^{(1)}) \to (\mathfrak{gl}_n^{(1)})^{\otimes d}$ l'application induite par la comultiplication de l'algèbre de Hopf à puissances divisées. Alors on a une égalité dans $H^*(GL_n, (\mathfrak{gl}_n^{(1)})^{\otimes d})$:*

$$c[1]^{\cup d} = \Delta_{(1^d)_*} c[d] \; .$$

Nous présentons maintenant une démonstration courte du théorème 9.27, obtenue dans [7] comme application du théorème 8.8 qui décrit la cohomologie des bifoncteurs précomposés par le foncteur de Torsion de Frobenius. Cette démonstration se passe complètement des constructions combinatoires explicites de [2, 3], et les remplace par des arguments homologiques plus simples. Néanmoins on remarquera que les constructions explicites de [2, 3] tout comme la démonstration du théorème 8.8 reposent sur les complexes de Troesch (bien qu'utilisés de manière différente dans chacune des approches).

Démonstration du théorème 9.27. Nous suivons [7, section 4]. On peut prendre pour $c[1]$ la classe du vecteur de Witt [vdK1, 4.1]. Le problème est donc de construire les classes $c[d]$, $d \geq 2$. Ramenons ce problème à un problème de cohomologie des bifoncteurs. La classe du vecteur de Witt provient d'une classe $c[1] \in H^2_{\mathrm{gl}}(\mathrm{gl}^{(1)})$ bien définie. Pour démontrer le théorème 9.27, il suffit donc de démontrer qu'il existe des classes $c[d] \in H^{2d}_{\mathrm{gl}}((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)})$ antécédentes de $c[1]^{\cup d}$ par l'application :

$$H^*_{\mathrm{gl}}\left((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}\right) \to H^*_{\mathrm{gl}}\left((\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)}\right) \; . \qquad (a)$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ agit sur le bifoncteur $(\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)}$ en permutant les facteurs du produit tensoriel. Comme l'application $\Delta_{(1^d)} : (\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)} \to (\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)}$ est invariant sous l'action (au but) du groupe symétrique, le morphisme (a) est à valeur dans la partie de $H^*_{\mathrm{gl}}((\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)})$ invariante sous l'action du groupe symétrique. On peut donc réécrire (a) comme un morphisme :

$$H^*_{\mathrm{gl}}\left((\Gamma^d \mathrm{gl})^{(1)}\right) \to H^*_{\mathrm{gl}}\left((\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)}\right)^{\mathfrak{S}_d} . \qquad (b)$$

Comme le cup produit est gradué commutatif, la classe $c[1]^{\cup d}$ est contenue dans la partie de la cohomologie $H^*_{\mathrm{gl}}((\mathrm{gl}^{\otimes d})^{(1)})$ invariante sous l'action du groupe symétrique. Pour démontrer que $c[d]$ existe, il suffit donc de montrer que l'application (b) est surjective.

Le bifoncteur $\mathrm{gl}^{\otimes d} = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\otimes^d, \otimes^d)$ est injectif. D'après le théorème 8.8, le morphisme (b) peut donc se réécrire sous la forme :

$$H^*_{\mathrm{gl}}\left((\Gamma^d \mathrm{gl})_{E_1}\right) \to H^*_{\mathrm{gl}}\left((\mathrm{gl}^{\otimes d})_{E_1}\right)^{\mathfrak{S}_d} = H^0_{\mathrm{gl}}\left((\mathrm{gl}^{\otimes d})_{E_1}\right)^{\mathfrak{S}_d} . \qquad (c)$$

Mais la surjectivité du morphisme

$$H^0_{\mathrm{gl}}\left((\Gamma^d \mathrm{gl})_{E_1}\right) \to H^0_{\mathrm{gl}}\left((\mathrm{gl}^{\otimes d})_{E_1}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

(et par là même celle du morphisme (c)) découle facilement de l'exactitude à gauche du foncteur $H^0_{\mathrm{gl}}(-)$. Ceci achève la démonstration. $\square$

9.4 Informations quantitatives

Le théorème d'engendrement cohomologique 9.3 affirme que les algèbres de cohomologie des groupes réductifs sont de type fini. Le problème suivant se pose naturellement.

Problème 9.28. *Donner des informations quantitatives sur les algèbres de cohomologie des groupes réductifs.*

Par exemple, on aimerait avoir des bornes sur le nombre de générateurs, leur degré cohomologique ou le degré des relations dans l'algèbre, à l'instar de ce qu'on sait faire pour les algèbres de cohomologie des groupes finis [Sym]. On pourrait également demander des calculs explicites (tout en gardant à l'esprit que les calculs explicites complets sont déjà difficiles en théorie des invariants, ils sont donc également difficiles en cohomologie). Dans cette section nous présentons deux résultats quantitatifs. Le premier est un résultat élémentaire (essentiellement contenu dans l'article [3] même s'il n'y est pas explicité), qui donne une borne pour la dimension de Krull des algèbres de cohomologie en fonction de la dimension de Krull d'une algèbre d'invariants. Le deuxième est un calcul explicite complet d'algèbre de cohomologie de GL_n, obtenu dans [5].

9.4.1 Dimension de Krull

Si A est un anneau commutatif, nous notons $\dim A$ sa dimension de Krull (longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers distincts). Le lemme suivant en rappelle deux propriétés basiques.

Lemme 9.29 (Propriétés de la dimension de Krull)**.**

(i) [3, Lm 6.8] Si A et B sont deux $\Bbbk$-algèbres graduées commutatives, avec B de type fini alors $f : A \to B$ est noethérienne si et seulement si B^{pair} est une extension entière de $f(A)^{\mathrm{pair}}$.

(ii) [Eis, Prop 9.2] Si A et B sont des anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un morphisme tel que $f(A) \subset B$ est une extension entière, alors $\dim B = \dim f(A) \leq \dim A$ *(avec égalité si le noyau de f est formé d'éléments nilpotents).*

Le but de cette section est d'expliciter des bornes sur la dimension de Krull des algèbres de cohomologie des groupes réductifs qui peuvent être extraites de la démonstration du théorème 9.3. On a tout d'abord le lemme élémentaire suivant.

Lemme 9.30. *Soit G un schéma en groupes sur un corps $\Bbbk$, satisfaisant la propriété (ECF). Soit A une $\Bbbk G$-algèbre commutative de type fini. Notons I un idéal nilpotent G-stable de A et $\overline{\Bbbk}$ la clôture algébrique de $\Bbbk$. Alors on a :*

$$\dim H^{\mathrm{pair}}(G_{\overline{\Bbbk}}, A \otimes \overline{\Bbbk}) = \dim H^{\mathrm{pair}}(G, A) = \dim H^{\mathrm{pair}}(G, A/I) .$$

Démonstration. Par le lemme de normalisation de Noether, si B est une $\Bbbk$-algèbre commutative de type fini alors $\dim B = \dim B \otimes \overline{\Bbbk}$. La première égalité suit donc de l'isomorphisme $H^*(G_{\overline{\Bbbk}}, A \otimes \overline{\Bbbk}) \simeq H^*(G, A) \otimes \overline{\Bbbk}$ donné par le changement de base. La suite d'algèbres graduées $H^*(G, I) \to H^*(G, A) \xrightarrow{f} H^*(G, A/I)$ est exacte en $H^*(G, A)$. Nous affirmons que le noyau de f est constitué d'éléments nilpotents. En effet, on peut écrire la $\Bbbk$-algèbre I comme $I = \bigcup I_\alpha$ où les I_α sont des sous-algèbres de dimension finie. Pour tout α, l'algèbre $H^*(G, I_\alpha)$ est de degré borné et de dimension finie en chaque degré par [Jan, II.4.7 et II.4.10], en particulier tous ses éléments sont nilpotents. Comme $H^*(G, I) = \lim_\alpha H^*(G, I_\alpha)$ [Jan, I.4.17] et que le noyau de f est égal à l'image du morphisme d'algèbres $H^*(G, I) \to H^*(G, A)$, ceci prouve notre affirmation. Par le théorème 9.3, l'application f est noethérienne. La deuxième égalité découle donc du lemme 9.29. □

Nous cherchons maintenant une borne « concrète » sur la dimension de Krull de $H^{\mathrm{pair}}(GL_n, A)$, ou de manière équivalente sur la dimension de Krull de $H^{\mathrm{pair}}(GL_n, A_{\mathrm{red}})$, où A_{red} désigne le quotient de A par son nilradical (qui est GL_n-stable). Pour cela on considère un GL_n-module $V \subset A_{\mathrm{red}}$ de dimension finie et contenant une famille génératrice A_{red}. On note r un entier tel que pour tout $x \in \mathrm{hull}_\nabla \mathrm{gr}\, A_{\mathrm{red}}$ on a $x^{p^r} \in \mathrm{gr}\, A_{\mathrm{red}}$ (où $\mathrm{gr}\, A_{\mathrm{red}}$ est le gradué de Grosshans de A_{red}). Enfin on note $\mathbf{S}_r = \Bbbk[\mathfrak{gl}_n^{\oplus r}]$ l'algèbre de polynômes sur r copies de la représentation adjointe. Le résultat suivant est une application des méthodes de démonstration du théorème d'engendrement fini 9.3.

Proposition 9.31. *On a :*

$$\dim H^{\mathrm{pair}}(GL_n, A) \leq \dim(\mathbf{S}_r \otimes S(V))^{GL_n} \ .$$

Démonstration. En vertu de la première égalité du lemme 9.30, on peut supposer $\Bbbk$ algébriquement clos, comme on l'a fait dans la démonstration du théorème 9.3. En vertu de la deuxième égalité du lemme 9.30, on peut supposer $A_{\mathrm{red}} = A$. On reprend les notations de la démonstration du théorème 9.3, en particulier $G = GL_{n,\Bbbk}$ et G_r est son r-ième noyau de Frobenius.

On observe tout d'abord que $S(V) \twoheadrightarrow A$ se relève en un morphisme de $\Bbbk G$-algèbres $S(V) \to \mathcal{A}$. D'après le théorème de Friedlander et Suslin 9.14 et la théorie des invariants, on a une application noethérienne

$$\psi''_{FS} : (\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes S(V)^{G_r})^{G/G_r} \to (\mathbf{S}_r \otimes \mathcal{A}^{G_r})^{G/G_r} \to H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)^{G/G_r} \ .$$

D'après le corollaire 9.24, on a une factorisation de ψ''_{FS} de la forme

$$(\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes S(V)^{G_r})^{G/G_r} \xrightarrow{\psi_{vdK}} H^*(G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} H^*(G_r, \mathrm{gr}\, A)^{G/G_r} \ .$$

où ϕ est l'application décrite dans le résultat 9.21. On note $\mathcal{A}_{vdK} \subset H^*(G, \mathcal{A})$ l'image de l'application ψ_{vdK}. En particulier on a

$$\dim \mathcal{A}_{vdK} \leq \dim(\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes S(V)^{G_r})^{G/G_r} \ . \tag{9.4}$$

On reprend ensuite la suite spectrale de Serre (9.1) :

$$E_2^{i,j}(\mathrm{gr}\, A) = H^i(G/G_r, H^j(G_r, \mathrm{gr}\, A)) \Rightarrow H^{i+j}(G, \mathrm{gr}\, A) \ .$$

Le résultat 9.18 montre que la composée suivante est une application noethérienne

$$\mathcal{A}_{vdK} \hookrightarrow H^*(G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} E_2^{0,*}(\mathrm{gr}\, A) \subset E_2^{*,*}(\mathrm{gr}\, A) \ .$$

En appliquant [FS, Lm 1.6] à la suite spectrale de Serre (avec 'B'= $\Bbbk$, 'A'= $\mathcal{A}_{vdK}$) on obtient que le morphisme composé suivant (où le morphisme f est induit par la surjection $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}\, A$) est noethérien :

$$\mathcal{A}_{vdK} \hookrightarrow H^*(G, \mathcal{A}) \xrightarrow{f} H^*(G, \mathrm{gr}\, A) \ .$$

En particulier, la suite spectrale (9.3) associée à la filtration de Grosshans est une suite spectrale de $\mathcal{A}_{vdK}$-modules noethériens, et la composée

$$\mathcal{A}_{vdK} \hookrightarrow H^*(G, \mathcal{A}) \to H^*(G, A)$$

est noethérienne. Par le lemme 9.29, on en déduit donc que :

$$\dim H^{\mathrm{pair}}(G,A) \le \dim \mathcal{A}_{vdK}\ . \tag{9.5}$$

Finalement, on a des morphismes d'algèbres induits par l'élévation à la puissance p^r :

$$(\mathbf{S}_r \otimes S(V))^G \leftarrow (\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes S(V)^{(r)})^G \to (\mathbf{S}_r^{(r)} \otimes S(V)^{G_r})^G\ .$$

Ces morphismes d'algèbres sont noethériens par théorie des invariants et à noyaux nilpotents. D'après le lemme 9.29(ii), les trois algèbres ci-dessus ont même dimension de Krull. En combinant cette observation et les inégalités (9.4) et (9.5) on obtient l'énoncé de la proposition 9.31. □

9.4.2 Un calcul explicite

Le but de cette section est de présenter un calcul complet d'algèbre de cohomologie de GL_n, effectué dans [5, Section 6]. Soit $\mathbb{k}^n$ la représentation standard de GL_n et $\mathbb{k}^{n\,\vee}$ la représentation duale. Les théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants du groupe linéaire [DCP] donnent des générateurs et des relations explicites des $\mathbb{k}$-algèbres d'invariants

$$\mathbb{k}[(\mathbb{k}^n)^{\oplus k} \oplus (\mathbb{k}^{n\,\vee})^{\oplus \ell}]^{GL_n}\ .$$

La représentation $\mathbb{k}[(\mathbb{k}^n)^{\oplus k} \oplus (\mathbb{k}^{n\,\vee})^{\oplus \ell}]$ possède une bonne filtration, comme expliqué à la section 7.3.2. Il n'y a donc pas de cohomologie supérieure et rien à calculer au delà de la théorie des invariants. En revanche, si l'on remplace la représentation standard $\mathbb{k}^n$ par la représentation modifiée par la torsion de Frobenius $V_r := \mathbb{k}^{n\,(r)}$, on obtient une algèbre qui a les mêmes invariants, mais qui possède aussi de la cohomologie de degré supérieur. On peut construire des classes de cohomologie dans cette algèbre de la manière suivante. Pour tout entier h tel que $0 \le h < p^r$, on se fixe un générateur de degré $2h$ de $E_r = \mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{k}}}(I^{(r)}, I^{(r)})$ et on note $c_h \in H^{2h}(GL_n, S^2(V_r^\vee \oplus V_r))$ l'image de ce générateur par la composée :

$$E_r \to \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(V_r, V_r) \simeq H^*(GL_n, V_r^\vee \otimes V_r) \hookrightarrow H^*(GL_n, S^2(V_r^\vee \oplus V_r))\ .$$

Pour tout couple (i,j), on note

$$\iota_{i,j} : V_r^\vee \oplus V_r \to V_r^{\vee\,\oplus k} \oplus V_r^{\oplus \ell}$$

l'application qui envoie $V_r^\vee$ (resp. V_r) sur la i-ème copie de $V_r^\vee$ (resp. la j-ème copie de V_r), et on note

$$(i|j|h) = S^2(\iota_{i,j})(c_h) \in H^{2h}(GL_n, S^2(V_r^{\vee\,\oplus k} \oplus V_r^{\oplus \ell}))\ .$$

En particulier, les éléments $(i|j|0)$ sont les contractions qui apparaissent dans le premier théorème fondamental pour GL_n.

Théorème 9.32. *[5, Thm 6.15] Supposons $n \geq p^r \min\{k, \ell\}$. Alors l'algèbre de cohomologie*

$$H^*(GL_n, S(V_r^{\vee \oplus k} \oplus V_r^{\oplus \ell}))$$

est une algèbre polynomiale librement engendrée par les classes $(i|j|h)$, pour les entiers $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \ell$ et $0 \leq h < p^r$.

Le cas $r = 0$ du théorème correspond à un cas particulier des théorèmes fondamentaux pour GL_n (le cas où il n'y a pas de relations). Si on enlève la restriction sur n, les classes $(i|j|h)$ fournissent toujours des éléments de l'algèbre de cohomologie. On peut également déduire des relations entre ces éléments à partir du second théorème fondamental pour GL_n et d'un calcul explicite de $\mathrm{Ext}^*_{GL_n}(V_r, V_r)$. Nous ne savons cependant pas si les générateurs et les relations produites donnent une description de l'anneau de cohomologie, et le problème suivant est ouvert.

Problème 9.33. *Décrire l'algèbre de cohomologie du théorème 9.32 dans le cas où $n < p^r \min\{k, \ell\}$.*

Nous expliquons maintenant la démonstration du théorème 9.32. L'évaluation sur la paire $(\Bbbk^n, \Bbbk^n)$ induit un morphisme d'algèbres

$$H^*_{\mathrm{gl}}\left(S\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right)\right) \to H^*(GL_n, S(V_r^{\vee \oplus k} \oplus V_r^{\oplus \ell}))\ . \quad (9.6)$$

Comme $n \geq p$, ce morphisme d'algèbre se restreint en un isomorphisme si l'on considère les plus bas poids de l'algèbre symétrique. Explicitement on a un isomorphisme de $\Bbbk$-espaces vectoriels gradués :

$$H^*_{\mathrm{gl}}\left(S^2\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right)\right) \xrightarrow{\simeq} H^*(GL_n, S^2(V_r^{\vee \oplus k} \oplus V_r^{\oplus \ell}))\ . \quad (9.7)$$

Le calcul du $\Bbbk$-espace vectoriel gradué de gauche (donné par exemple par le théorème 8.8 ou 8.13) montre que les classes $(i|j|h)$ forment une base du $\Bbbk$-espace vectoriel gradué de droite. On peut en fait complètement calculer l'algèbre de cohomologie à la source du morphisme d'algèbre (9.6). D'après le corollaire 8.24, c'est une $\Bbbk$-algèbre commutative libre sur l'espace vectoriel gradué $H^*_{\mathrm{gl}}\left(S^2\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right)\right)$. Le théorème 9.32 équivaut donc à montrer que le morphisme d'évaluation (9.6) est un isomorphisme.

Nous voyons alors apparaître le problème suivant. Si k est assez grand, le poids du bifoncteur $S^k\left(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right)$ est plus grand que $2n$, et on ne peut donc pas appliquer le théorème d'isomorphisme 7.15 pour en conclure que le morphisme d'évaluation (9.6) est un isomorphisme en poids total $2kp^r$. Une approche pour contourner ce problème est développée dans [5, Section 6]. Plus précisément, on dit qu'un foncteur $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ est *s-résolu* s'il admet une résolution projective par des facteurs directs des foncteurs de la forme $\Gamma^{d,\Bbbk^s}$. On a alors l'énoncé suivant qui découle du lemme de Yoneda et de la comparaison des extensions entre catégorie des GL_n-modules polynomiaux et catégorie des GL_n-modules.

Proposition 9.34. *[5, Thm 6.10] Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ un foncteur s-résolu. Alors pour tout $G \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ et tout $n \geq s$ l'évaluation sur $\Bbbk^n$ induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F,G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n)) \ .$$

Évidemment tous les foncteurs strictement polynomiaux homogènes de poids d sont d-résolus, mais dans ce cas la proposition 9.34 est équivalente à l'isomorphisme de Friedlander et Suslin. On cherche donc des foncteurs homogènes de poids d qui sont s-résolus pour $s < d$. On dispose des exemples intéressants suivants.

1. En dualisant le complexe de Troesch du théorème 8.11, on obtient des résolutions projectives de $\Gamma^{d\,(r)}$ par des facteurs directs du projectif standard $\Gamma^{dp^r, \Bbbk^{p^r}}$. En d'autres termes, pour tout d le foncteur $\Gamma^{d\,(r)}$ est p^r-résolu.
2. Si F est un foncteur s-résolu, alors le foncteur paramétrisé $F_{\Bbbk^k}$ est ks-résolu.

En utilisant ces observations, on peut démontrer le résultat suivant, qui achève la démonstration du théorème 9.32.

Proposition 9.35. *Pour $n \geq p^r \min\{k, \ell\}$, le morphisme* (9.6) *est un isomorphisme.*

Démonstration. On suppose que $k \geq \ell$ (sinon on fait un raisonnement analogue en utilisant la notion duale de foncteur n-corésolu [5, Def 6.9].). On peut réécrire le bifoncteur $S\left(\mathrm{Hom}_\Bbbk(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right)$ comme un bifoncteur séparable :

$$S\left(\mathrm{Hom}_\Bbbk(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k} \oplus I^{(r)\,\oplus \ell}\right) \simeq S\left(\mathrm{Hom}_\Bbbk(I^{(r)}, \Bbbk)^{\oplus k}\right) \otimes S\left(I^{(r)\,\oplus \ell}\right) \ .$$

La cohomologie des bifoncteurs séparable s'exprime comme des extensions dans $\mathcal{P}_\Bbbk$ d'après l'isomorphisme (6.21). En utilisant de plus un isomorphisme similaire pour la cohomologie de GL_n [Jan, I.4.4], on montre que l'énoncé de la proposition 9.35 est équivalent à montrer que pour tout d l'évaluation sur $\Bbbk^n$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F,G) \simeq \mathrm{Ext}^*_{GL_n}(F(\Bbbk^n), G(\Bbbk^n))$$

pour $F = \Gamma^d(I^{(r)\,\oplus k}) = (\Gamma^{d\,(r)})_{\Bbbk^k}$ et $G = S^d(I^{(r)\,\oplus \ell}) = (S^{d\,(r)})_{\Bbbk^\ell}$. Comme F est $p^r k$-résolu, le résultat découle de la proposition 9.34. □

10 Calcul d'Exts et espaces d'Eilenberg Mac Lane

Dans cette section, nous examinons les calculs d'Ext entre foncteurs exponentiels classiques (i.e. puissances symétriques, puissances extérieures ou puissances divisées). Ces foncteurs (et leurs précompositions par des foncteurs de torsion de Frobenius si $\Bbbk$ est un corps) sont parmi les foncteurs strictement polynomiaux les plus élémentaires. Le calcul des Ext entre ces foncteurs a été l'objet de beaucoup d'attention [Akin, FFSS, Cha3]. Ordonnons les foncteurs « du plus projectif au plus injectif » : $\Gamma < \Lambda < S$. Un des succès de l'article [FFSS] a été le calcul complet des extensions de la forme

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})$$

où $\Bbbk$ est un corps et X et Y sont des foncteurs exponentiels classiques tels que $X \le Y$. Les calculs pour $X > Y$ sont nettement plus difficiles, et ont été effectués[36] dans [Cha3] (en s'appuyant sur les techniques et les résultats de [FFSS]). L'article [8] propose une approche différente des calculs d'Ext entre foncteurs classiques, indépendante de [FFSS, Cha3]. On y calcule complètement les Ext « à paramètre »

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)}) \;,$$

si $\Bbbk$ est un corps. Notre approche donne également des résultats substantiels sur les Ext entre foncteurs classiques pour $\Bbbk = \mathbb{Z}$. C'est cette approche que nous exposons dans cette section.

La section est organisée de la façon suivante. Nous regroupons tout d'abord dans la section 10.1 un certain nombre de propriétés générales des foncteurs exponentiels qui nous servirons dans les calculs, et qui sont susceptibles d'être utiles dans d'autres contextes. Dans la section 10.2, nous montrons que l'on peut munir le foncteur $A \mapsto H_*(K(A,n),\Bbbk)$ (où A est un groupe libre de type fini, et $K(A,n)$ désigne un espace d'Eilenberg Mac Lane) d'une structure de foncteur strictement polynomial. Nous expliquons ensuite comment calculer cette structure de foncteur strictement polynomial à partir des calculs de Cartan [Car] lorsque $\Bbbk$ est un corps. Pour $\Bbbk = \mathbb{Z}$, la description de ce foncteur strictement polynomial reste un problème ouvert (quelques résultats très partiels ont été obtenus dans [9]). Dans la section 10.3, nous démontrons les isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux (où A désigne un groupe abélien libre de type fini)

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*, \Lambda^*)(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk) \simeq H_*(K(A,3),\Bbbk) \;,$$
$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^*, \Gamma^*)(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk) \simeq H_*(K(A,4),\Bbbk) \;.$$

Enfin, la dernière section expose la méthode de calcul des Ext à paramètres $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})$ pour toutes les paires X, Y de foncteurs exponentiels classiques losque $\Bbbk$ est un corps.

[36]Cependant, la démonstration d'un énoncé clé de cet article comporte une lacune (qui devient une erreur en caractéristique 2 [8, Rk 4.7]).

10.1 Foncteurs exponentiels

10.1.1 Définitions

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. Une *$\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre différentielle graduée A* est un foncteur strictement polynomial $A \in \mathcal{P}_\Bbbk$ muni d'une multiplication associative $m : A \otimes A \to A$ d'une unité $\eta : \Bbbk \to A$ et d'une différentielle d'algèbre $\partial : A \to A$ diminuant le degré homologique de 1. Un morphisme de $\mathcal{P}_\Bbbk$ algèbres différentielles graduées est un morphisme de foncteurs strictement polynomiaux $f : A \to A'$ compatible avec les différentielles, les multiplications et les unités.

On définit de même les $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées, les $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres (i.e. $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées concentrées en degré nul), les $\mathcal{P}_\Bbbk$-cogèbres différentielles graduées, etc.

Définition 10.1. Un foncteur exponentiel (gradué) est une $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre (graduée) augmentée, dont les valeurs sont des $\Bbbk$-modules projectifs, et telle que pour tout couple $(V, W) \in \mathrm{P}_\Bbbk^2$ la composée suivante (où ι_V et ι_W désignent les inclusions canoniques de V et W dans $V \oplus W$) soit un isomorphisme :

$$E(V) \otimes E(W) \xrightarrow{E(\iota_V) \otimes E(\iota_W)} E(V \oplus W) \otimes E(V \otimes W) \xrightarrow{\text{mult}} E(V \oplus W)\ .$$

Cette composée sera désignée sous le nom d'*isomorphisme exponentiel.* Un foncteur exponentiel est dit (gradué) commutatif si l'algèbre E est (graduée) commutative.

Exemple 10.2. Les foncteurs (non gradués) algèbre symétrique S, algèbre extérieure Λ et algèbre à puissances divisées Γ sont des foncteurs exponentiels. De plus, S et Γ sont commutatifs, mais Λ ne l'est pas.

Soit E est un foncteur exponentiel. Nous donnons des conséquences directes de la définition 10.1. Tout d'abord le $\Bbbk$-module $E(0)$ est muni d'une structure de $\Bbbk$-algèbre augmentée, dont la multiplication induit un isomorphisme $E(0) \otimes E(0) \simeq E(0)$. On a donc $E(0) = \Bbbk$. L'unité du foncteur exponentiel coïncide donc avec l'application $E(0) \to E$ induite par les applications $0 \to V$ pour tout $\Bbbk$-module projectif de type fini V.

Par définition, la multiplication de E permet de construire l'isomorphisme exponentiel de E. Réciproquement, on observe que la multiplication de E est égale à la composée suivante, où $\Sigma : V \oplus V \to V$ est donnée par la somme et le premier morphisme est l'isomorphisme exponentiel de E :

$$E(V) \otimes E(V) \xrightarrow{\simeq} E(V \oplus V) \xrightarrow{\Sigma} E(V)\ .$$

L'isomorphisme exponentiel détermine également une structure de cogèbre sur E. Précisément, la comultiplication est la composée suivante, où $\delta : V \to V \oplus V$ envoie v sur (v, v) :

$$E(V) \xrightarrow{E(\delta)} E(V \oplus V) \simeq E(V) \otimes E(V)\ .$$

La counité $E \to E(0) = \Bbbk$ est déterminée par les applications canoniques $V \to 0$ pour tout $\Bbbk$-module projectif de type fini V.

Exemple 10.3. Dans le cas des foncteurs exponentiels S, Λ et Γ, les comultiplications déterminées par l'isomorphisme exponentiel sont les comultiplications usuelles.

Comme dans le cas de la multiplication, la comultiplication de E détermine l'isomorphisme exponentiel qui est égal à la composée :

$$E(V \oplus W) \to E(V \oplus W)^{\otimes 2} \xrightarrow{E(\mathrm{pr}_V)\otimes E(\mathrm{pr}_W)} E(V) \otimes E(W)\ .$$

Ces considérations impliquent l'énoncé suivant.

Lemme 10.4. *[8, lm 5.4] Soit $f : E \to E'$ un morphisme entre deux foncteurs exponentiels. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) f est un morphisme d'algèbres.

(ii) f commute avec les isomorphismes exponentiels.

(iii) f est un morphisme de cogèbres.

10.1.2 Foncteurs exponentiels et calculs d'Ext

Le lemme suivant est une déclinaison de l'adjonction somme-diagonale, très utile dans les calculs.

Lemme 10.5. *Soit E un foncteur exponentiel (gradué) et soient F et G deux foncteurs strictement polynomiaux tels que les valeurs du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E,F)$ sont $\Bbbk$-plates. La composée suivante induite par la comultiplication de E est un isomorphisme :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E,F) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E,G) \xrightarrow{\otimes} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E\otimes E, F\otimes G) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E, F\otimes G).$$

De plus, si E est gradué commutatif, le diagramme suivant dont les flèches verticales sont induites par les morphismes $\tau(x\otimes y) = y\otimes x$, commute à un signe $(-1)^{ij}$ près :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_i,F) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_j,G) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\tau"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_{i+j}, F\otimes G) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_{i+j},\tau)"] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_j,G) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_i,F) \arrow[r, "\simeq"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E_{i+j}, G\otimes F)
\end{tikzcd}\ .$$

Démonstration. La commutativité du diagramme est une vérification directe. Notons $E(\Sigma)$ le bifoncteur $(V,W) \mapsto E(V\oplus W)$. Le morphisme composé peut se réécrire comme la composée

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E,F)\otimes\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E,G) &\to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk(2)}(E\boxtimes E, F\boxtimes G)\\ &\xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk(2)}(E(\Sigma), F\boxtimes G) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E, F\otimes G)\end{aligned}$$

où le premier morphisme est induit par le produit tensoriel, le deuxième par l'isomorphisme exponentiel de E, le troisième par l'adjonction somme diagonale. Comme le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(E, F)$ est à valeurs $\Bbbk$-plates, le premier morphisme est un isomorphisme (si E est remplacé par un projectif standard le produit tensoriel induit un isomorphisme par le lemme de Yoneda, et le cas général se déduit en prenant une présentation de E par des projectifs standard, l'hypothèse de $\Bbbk$-platitude permettant d'assurer l'exactitude du produit tensoriel). □

Si $\Bbbk$ est un corps, on peut dériver les isomorphismes du lemme précédent pour obtenir le résultat suivant, qui est une version à paramètre de [FFSS, Thm 1.7] (l'hypothèse sur $\Bbbk$ est utilisée pour assurer l'exactitude du produit tensoriel sur $\Bbbk$, donc une forme simple de la formule de Künneth).

Lemme 10.6. *Soit $\Bbbk$ un corps. Soit E un foncteur exponentiel (gradué). La composée suivante (induite la comultiplication de E) est un isomorphisme (bi)gradué :*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E, F) \otimes \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E, G) \xrightarrow{\otimes} \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E \otimes E, F \otimes G) \to \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(E, F \otimes G).$$

10.1.3 Filtrations des foncteurs exponentiels

Dans ce paragraphe, $\Bbbk$ est un corps. Nous exposons le contenu de [8, section 14]. L'objet est de montrer que certaines filtrations des $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées sont automatiquement scindées. Les énoncés supposent que la filtration de la $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre graduée A est finie dans le sens suivant.

Définition 10.7. Soit A une $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre graduée filtrée, dont on note $A_{i,d}$ la composante homogène de degré i et de poids d. Soit $\cdots \subset F_k \subset F_{k+1} \subset \cdots$ une filtration d'algèbre de A. La filtration est *finie* si elle est Hausdorff et exhaustive, et si de plus pour chaque composante homogène de degré i et de poids d on a $\mathrm{gr}_k(A_{i,d}) = 0$ pour $k \gg 0$ et $k \ll 0$.

Par exemple, les filtrations associées à une suite spectrale premier quadrant sont finies (c'est dans ce cadre que nous aurons besoin d'appliquer les énoncés de trivialisation des filtrations). De plus, une filtration exhaustive et séparée de A est automatiquement finie si on suppose que les composantes homogènes $A_{i,d}$ ont des valeurs de dimension finie [8, Lm 14.1(i)].

Proposition 10.8. *[8, Prop 14.5] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique impaire, soit A une $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre graduée commutative. On suppose que A est munie d'une filtration d'algèbre* finie*, et que* $\mathrm{gr}\, A$ *est une algèbre d'une des deux formes suivantes :*

$$(i)\ \Gamma(F_{\mathrm{pair}}) \otimes \Lambda(F_{\mathrm{impair}})\ , \quad (ii)\ S(F_{\mathrm{pair}}) \otimes \Lambda(F_{\mathrm{impair}})\ .$$

où F est un foncteur strictement polynomial gradué additif. Alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées $A \simeq \mathrm{gr}\, A$.

Démonstration. Nous donnons les étapes de la démonstration pour le cas (ii), légèrement plus difficile, et renvoyons à [8] pour les détails complets.

La première étape consiste à montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\mathrm{gr}\, A, \mathrm{gr}\, A) = 0$. C'est pour démontrer cette annulation que nous avons besoin de supposer la caractéristique impaire (en caractéristique 2 on a par exemple $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\mathbb{F}_2}}(\Lambda^{1\,(1)}, \Lambda^2) = \mathbb{F}_2$). La démonstration donnée dans [8] repose sur les calculs de Cartan, mais il est possible de donner une démonstration directe élémentaire de cette annulation à l'aide de l'adjonction somme-diagonale et de suites exactes longues en Ext [9, Appendix A].

Ce résultat d'annulation et la finitude de la filtration impliquent qu'il existe un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux $\phi : A \simeq \mathrm{gr}\, A$. De plus, si on considère la filtration triviale sur $\mathrm{gr}\, A$ donnée par $F_k(\mathrm{gr}\, A) := \bigoplus_{i \le k} \mathrm{gr}\,_i A$ alors ϕ est compatible aux filtrations et $\mathrm{gr}\,(\phi)$ est l'application identité de $\mathrm{gr}\, A$. Il faut ensuite construire un isomorphisme similaire à ϕ, mais en plus compatible aux produits.

Comme F est additif, $\mathrm{gr}\, A$ est un foncteur exponentiel. On en déduit [8, Lm 14.3] que A est également un foncteur exponentiel. En particulier, $\mathrm{gr}\, A$ et A sont des $\mathcal{P}_\Bbbk$ cogèbres graduées commutatives, et construire un morphisme compatible aux produits équivaut à construire un morphisme compatible aux coproduits par le lemme 10.4. Mais $\mathrm{gr}\, A$ est la cogèbre commutative graduée libre sur F [LV, Chap 1]. On peut donc construire des morphismes à valeurs dans $\mathrm{gr}\, A$ par propriété universelle. On considère l'application $\pi' : A \to F$ composée de ϕ, et de la projection de $\pi : \mathrm{gr}\, A \twoheadrightarrow F$ de noyau la somme directe

$$\Bbbk \oplus \Gamma^{>1}(F_{\mathrm{pair}}) \oplus \Lambda^{>1}(F_{\mathrm{impair}}) \oplus \Gamma^{>0}(F_{\mathrm{pair}}) \otimes \Lambda^{>0}(F_{\mathrm{impair}})\ .$$

Par propriété universelle (remarque : A est conilpotente car c'est un foncteur exponentiel, elle est donc connexe pour la graduation par le poids), il existe un unique morphisme de $\mathcal{P}_\Bbbk$-cogèbres graduées ψ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dashed, "\psi"] \arrow[dr, two heads, "\pi'"'] & & \mathrm{gr}\, A\ . \\ & F \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

La filtration de A est compatible aux coproduits (car le coproduit de A est construit à partir du produit, qui est compatible à la filtration). Et si l'on munit $\mathrm{gr}\, A$ de la filtration triviale, comme le morphisme $A \twoheadrightarrow F \hookrightarrow \mathrm{gr}\, A$ préserve les filtrations, il en va de même du morphisme ψ. De plus, $\mathrm{gr}\,(\psi)$ est égal à l'identité de $\mathrm{gr}\, A$. En effet $\mathrm{gr}\,(\psi)$ est l'unique morphisme de cogèbres s'insérant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{gr}\,A \arrow[rr, dashed, "\mathrm{gr}\,(\psi)"] \arrow[dr, two heads, "\pi"] & & \mathrm{gr}\,A \,. \\ & F \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Comme la filtration est finie, on en déduit que ψ est un isomorphisme. □

Les deux énoncés suivants sont démontrés de même manière que la proposition 10.8.

Proposition 10.9. *[8, Prop 14.7] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 2, soit A une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée commutative, filtrée. On suppose que la filtration est finie, et que $\mathrm{gr}\,A$ est une algèbre de la forme $\Gamma(F)$ ou $S(F)$ où F est un foncteur strictement polynomial gradué additif. Alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées $A \simeq \mathrm{gr}\,A$.*

Proposition 10.10. *[8, Prop 14.8] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 2, soit A une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée strictement anticommutative[37]. On suppose que A est munie d'une filtration d'algèbre finie, et que $\mathrm{gr}\,A$ est une algèbre de la forme $\Lambda(F)$ où F est un foncteur gradué de la forme $E \otimes I^{(r)}$ où E est un espace vectoriel gradué. Alors il existe un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées $A \simeq \mathrm{gr}\,A$.*

10.1.4 Une propriété de reconnaissance

Soit $\Bbbk$ un corps. On note $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ la catégorie des foncteurs ordinaires, c'est à dire des foncteurs $\mathcal{V}_{\Bbbk}^{f} \to \mathcal{V}_{\Bbbk}$. Une $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre graduée A est un foncteur des $\Bbbk$-espaces vectoriels de dimension finie dans les algèbres graduées. Les foncteurs strictement polynomiaux donnent par oubli des foncteurs ordinaires. En particulier le foncteur d'oubli induit un foncteur

$$\mathcal{U} : \mathcal{P}_{\Bbbk}\text{-alg. graduées} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}\text{-alg. graduées}\,.$$

Deux $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres (graduées) non isomorphes peuvent être isomorphes comme $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbres. Par exemple si $\Bbbk = \mathbb{F}_p$, S et $S^{(1)}$ sont deux $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ algèbres sont non isomorphes (la première a S^1 comme composante homogène de poids 1, la seconde a une composante homogène de poids 1 nulle), mais isomorphes comme $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbres. On appelle algèbre graduée à poids une $\Bbbk$-algèbre bigraduée dont le premier degré est appelé degré homologique et dont le second degré est baptisé poids. L'évaluation sur $\Bbbk^n$ induit un foncteur :

$$\mathrm{ev}_{\Bbbk^n} : \mathcal{P}_{\Bbbk}\text{-alg. graduées} \to \text{Alg. graduées à poids}\,.$$

[37]Une $\Bbbk$-algèbre graduée A est strictement anticommutative si $x^2 = 0$ pour tout $x \in A$.

Par exemple les deux $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres S et $S^{(1)}$ sont non isomorphes comme algèbres graduées à poids. Cependant l'exemple suivant montre qu'il n'est pas possible en général de reconstituer une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée à partir de la donnée de la $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre sous-jacente et des poids.

Exemple 10.11. Si $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$, on note $S(F)$ l'algèbre symétrique sur F. Supposons $\Bbbk = \mathbb{F}_2$. Les foncteurs $F = \Lambda^2 \otimes I^{(2)}$ et $G = \Lambda^{2(1)} \otimes I^{(1)}$ de $\mathcal{P}_{6,\mathbb{F}_2}$ sont non isomorphes, mais les foncteurs ordinaires sous-jacents sont isomorphes. En particulier, les $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres $S(F)$ et $S(G)$ sont non isomorphes comme $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres, mais elles sont isomorphes comme $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbres et comme algèbres à poids.

Le résultat suivant montre cependant que dans certains cas favorables, la structure de $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre graduée et la structure d'algèbre à poids sont suffisantes pour déterminer la $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée dont elles proviennent.

Proposition 10.12. *[8, Thm 9.3] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$. Soit $F \in \mathcal{F}_{\Bbbk}$ un foncteur additif gradué. Alors les $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres dont la $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre graduée sous-jacente est isomorphe à $\Gamma(F_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(F_{\text{impair}})$ sont de la forme*

$$\Gamma(G_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(G_{\text{impair}}) ,$$

où le foncteur strictement polynomial gradué G est une somme directe de foncteurs de torsion de Frobenius en chaque degré.

Démonstration. Soit A une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée telle que $\mathcal{U}A$ soit de la forme indiquée. Alors on remarque tout d'abord que A est un foncteur exponentiel.

Les primitifs et les indécomposables d'un foncteur exponentiel sont toujours additifs [8, Lm 9.2]. On peut classifier les foncteurs strictement polynomiaux additifs : ce sont des sommes directes de foncteurs de torsion de Frobenius. Une démonstration de ce fait utilisant la classification des $GL_{n,\Bbbk}$-modules simples est donnée dans [8, Lm 9.1]. Une autre démonstration, purement interne à la catégorie des foncteurs strictement polynomiaux est donnée dans [10, Prop 3.5]. Ainsi, si F et G sont additifs et homogènes de même poids, l'évaluation sur $\Bbbk$ induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(F(\Bbbk), G(\Bbbk))$. En particulier, toute injection entre foncteurs strictement polynomiaux additifs admet une rétraction.

Dans la situation qui nous occupe, notons $P(A)$ resp. $Q(A)$ les primitifs et les indécomposables de A. La forme de $\mathcal{U}A$ montre qu'on a une injection $P(A) \hookrightarrow Q(A)$. D'après les considérations précédentes, cette injection admet un rétracte. En particulier l'inclusion $P(A) \hookrightarrow A$ admet un rétracte $\pi : A \twoheadrightarrow P(A)$. Mais $\Gamma(P(A)_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(P(A)_{\text{impair}})$ est la cogèbre graduée commutative libre sur $P(A)$. Par propriété universelle, π s'étend en un morphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-cogèbres graduées

$$\phi : A \to \Gamma(P(A)_{\text{pair}}) \otimes \Lambda(P(A)_{\text{impair}}) .$$

Comme π est une rétracte de l'inclusion $P(A) \hookrightarrow A$, le morphisme ϕ est un isomorphisme. D'après le lemme 10.4, c'est également un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées.

Pour finir, on utilise le fait que l'on sait que $F := P(A)$ est une somme de foncteurs de torsion de Frobenius, d'après la classification des foncteurs strictement polynomiaux additifs. □

On a un énoncé du même type sur un corps de caractéristique $p = 2$.

Proposition 10.13. *[8, Thm 9.4] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 2. Soit $F \in \mathcal{F}_{\Bbbk}$ un foncteur additif gradué. Alors les $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres dont la $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre graduée sous-jacente est isomorphe à $\Gamma(F)$ sont de la forme $\Gamma(G)$ où le foncteur strictement polynomial gradué G est une somme directe de foncteurs de torsion de Frobenius en chaque degré.*

10.2 Constructions bar itérées et espaces EML

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, S la $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre symétrique (concentrée en degré zéro) et $\overline{B}^n(S)$ la $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre différentielle graduée obtenue en prenant la construction bar itérée sur S. Le but de cette section est de présenter des résultats partiels pour le problème suivant, dont la réponse joue un rôle dans les calculs d'Ext entre foncteurs strictement polynomiaux.

Problème 10.14. *Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. Calculer l'homologie de $\overline{B}^n(S)$ comme $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée.*

Rappelons les résultats élémentaires présentés dans la section 7.2.3. Notons $\Gamma\langle 2\rangle$ (resp. $\Lambda\langle 1\rangle$) la $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée dont la partie homogène de poids d est égale à Γ^d, concentrée en degré $2d$ (resp. Λ^d, concentrée en degré d). On a des isomorphismes de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées :

$$H_*(\overline{B}(S)) \simeq \Lambda\langle 1\rangle\ , \quad H_*(\overline{B}^2(S)) \simeq \Gamma\langle 2\rangle\ . \tag{10.1}$$

Il s'agit donc de calculer $H_*(\overline{B}^n(S))$ pour $n \geq 3$. Dans la suite de cette section, nous rappelons tout d'abord le lien entre le problème 10.14 et le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg Mac Lane. Pour $\Bbbk = \mathbb{F}_p$, nous expliquons comment calculer l'homologie de $\overline{B}^n(S)$ à partir des calculs de Cartan [Car] en suivant la méthode de [8]. Nous mentionnons ensuite les résultats très partiels pour $\Bbbk = \mathbb{Z}$ obtenus dans [8, 9]. Si $\Bbbk = \mathbb{Z}$, le problème 10.14 reste ouvert en général.

10.2.1 Un lien avec les espaces d'Eilenberg et Mac Lane

Notons $\mathrm{Sym}_{\Bbbk}(A) := S(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk = S_{\Bbbk}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk)$. On peut considérer $\mathrm{Sym}_{\Bbbk}$ comme une $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$-algèbre concentrée en degré zéro. Le problème suivant est une version légèrement affaiblie du problème 10.14.

Problème 10.15. *Soit* $\Bbbk$ *un anneau commutatif. Calculer l'homologie de* $\overline{B}^n(\mathrm{Sym}_\Bbbk)$ *comme* $\mathcal{P}_\mathbb{Z}$*-algèbre graduée.*

Si A un groupe abélien et n un entier strictement positif, l'espace d'Eilenberg Mac Lane $K(A,n)$ est le CW-complexe dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux, sauf le n-ième, égal à A. Dold et Puppe ont construit [DP, Satz 4.16], [DP, 6.26-6.27] des isomorphismes gradués suivants, qui permettent de relier le problème 10.15 à des calculs de topologie algébrique :

$$H_*(\overline{B}^n(\mathrm{Sym}_\Bbbk(A))) \simeq L_*\mathrm{Sym}_\Bbbk(A,n) \simeq H_*(K(A,n),\Bbbk)\ . \qquad (10.2)$$

Dans ces isomorphismes, le terme du milieu désigne les foncteurs dérivés à la Dold et Puppe (précisément définis à la section 11). Le premier isomorphisme est naturel en A, et le deuxième est naturel en A si l'on se restreint aux groupes abéliens A libres de type fini.

Remarque 10.16. Le deuxième isomorphisme (10.2) construit par Dold et Puppe n'est pas naturel vis-à-vis d'un groupe abélien quelconque. Le problème vient du fait que la construction de [DP] utilise le théorème de Dold-Thom appliqué à un espace de Moore $M(A,n)$. Mais il n'y a pas de construction fonctorielle en A des espaces de Moore en général. En effet, la suite de Baratt-Puppe donne une suite exacte courte de groupes (ou de groupes abéliens si $n \geq 3$) :

$$1 \to \mathrm{Ext}_\mathbb{Z}(A, \pi_{n+1}M(B,n)) \to [A,B]_* \xrightarrow{H_n} \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A,B) \to 1\ .$$

Une construction fonctorielle de $M(A,n)$ impliquerait que cette suite est scindée, ce qui n'est pas le cas, par exemple on peut montrer que le groupe des classes d'homotopie des endomorphismes $M(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Cependant si A est un groupe abélien libre, le terme Ext disparaît. Ceci assure que l'on peut effectivement construire $M(A,n)$ fonctoriellement en A, si l'on se restreint aux groupes abéliens libres.

Dans [8], nous donnons une construction algébrique directe d'un isomorphisme du type (10.2) pour un groupe abélien libre A. Cette construction directe a l'avantage de montrer que l'isomorphisme est compatible aux produits (et à d'autres opérations cohomologiques : suspensions, puissances divisées, transpotences, qui nous seront utiles dans la suite). Pour tout anneau commutatif $\Bbbk$, la $\Bbbk$-algèbre d'homologie singulière $H_*(K(A,n),\Bbbk)$ (munie du produit de Pontryagin) est isomorphe (naturellement en A) à l'homologie la bar construction itérée $\overline{B}^n(\Bbbk A)$ de la $\Bbbk$-algèbre de groupe $\Bbbk A$ [EML1] :

$$H_*(K(A,n),\Bbbk) \simeq H_*\left(\overline{B}^n(\Bbbk A)\right) \qquad (10.3)$$

Nous construisons alors un isomorphisme d'algèbres graduées entre l'homologie des constructions bar $\overline{B}^n(\Bbbk A)$ et $\overline{B}^n(\mathrm{Sym}_\Bbbk(A))$. Pour cela, on définit d'abord un morphisme (non naturel en A)

$$f : \mathrm{Sym}_\Bbbk(A) = S(A)\otimes_\mathbb{Z}\Bbbk = S_\Bbbk(A\otimes_\mathbb{Z}\Bbbk) \to \Bbbk A$$

de la façon suivante. On définit la restriction de f à $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk = S^1_{\Bbbk}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk)$ comme une section $\Bbbk$-linéaire (non naturelle) du morphisme canonique $\Bbbk A \twoheadrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk$. Une telle section existe car $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk$ est un $\Bbbk$-module libre. Puis on étend f en un morphisme d'algèbres commutatives en utilisant la propriété universelle de l'algèbre symétrique. On a alors l'énoncé suivant, plus précis que l'isomorphisme (10.2).

Proposition 10.17. *[8, Prop. 8.1] Le morphisme de $\Bbbk$-algèbres différentielles graduées*

$$\overline{B}^n(f) : \overline{B}^n(\mathrm{Sym}_{\Bbbk}(A)) \to \overline{B}^n(\Bbbk A)$$

est un quasi-isomorphisme. Il n'est pas naturel en A, mais si $\Bbbk$ est un corps, il induit une application naturelle en A au niveau de l'homologie.

10.2.2 Calculs sur un corps

Nous expliquons maintenant comment calculer l'homologie des $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées $\overline{B}^n(S)$ sur un corps de caractéristique $p > 0$, à partir des calculs de Cartan [Car]. On procède en plusieurs étapes.

Étape 1. On commence par le cas $\Bbbk = \mathbb{F}_p$. Dans ce cas, Cartan a calculé [Car] la $\Bbbk$-algèbre graduée $H_*(\overline{B}^n(\Bbbk A))$, naturellement en A, donc d'après la proposition 10.17 la $\mathcal{F}_{\Bbbk}$-algèbre graduée $H_*(\overline{B}^n(S))$.

De façon explicite, les constructions bar des algèbres différentielles graduées commutatives sont équipées d'opérations homologiques de suspension σ de puissances divisées γ_k et de transpotence ϕ_p, naturelles en A :

$$\begin{aligned}
\sigma &: H_i(\overline{B}^n A) \to H_{i+1}(\overline{B}^{n+1} A)\\
\gamma_k &: H_i(\overline{B}^n A) \to H_{ki}(\overline{B}^n A)\\
\phi_p &: H_{2i}(\overline{B}^n A) \to H_{p2i+2}(\overline{B}^n A)
\end{aligned}$$

(en caractéristique impaire, les puissances divisées ne sont définies que sur la partie de degré pair de l'homologie). Pour chaque entier n Cartan définit [Car, Exp. 9, Section 1] un ensemble de mots p-admissibles (de première espèce) de hauteur n composés de lettres σ, ϕ_p et γ_p. Chaque mot p-admissible de hauteur n indique une opération cohomologique composée (naturelle vis-à-vis du $\Bbbk$-espace vectoriel V)

$$V = S^1(V) \subset H_0\left(\overline{B}^0(S(V))\right) \longrightarrow H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right) ,$$

dont l'image est isomorphe à V. On note $M_n(V)$ le sous-foncteur additif gradué de $H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right)$ obtenu comme somme directe des images des opérations cohomologiques indexées par les mots admissibles de première espèce. Comme $H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right)$ est une algèbre à puissances divisées l'inclusion

$$M_n(V) \hookrightarrow H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right)$$

se prolonge en un isomorphisme d'algèbres, naturel en V (le membre de gauche est l'algèbre à puissance divisées libre sur $M_n(V)$) :

$$\Gamma(M_n(V)_{\mathrm{pair}}) \otimes \Lambda(M_n(V)_{\mathrm{imp.}}) \to H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right) \ (p \text{ impair}), \tag{10.4}$$
$$\Gamma(M_n(V)) \to H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right) \ (p=2). \tag{10.5}$$

Les théorèmes de Cartan [Car, Exp. 9 et 10, thm fondamental] affirment que ces morphismes sont des isomorphismes.

Étape 2. Les calculs de Cartan donnent les $\mathcal{F}_{\mathbb{F}_p}$-algèbres $H_*\left(\overline{B}^n(S)\right)$. D'après la propriété de reconnaissance des propositions 10.12 et 10.13, il suffit de déterminer les poids pour récupérer les $\mathcal{P}_{\mathbb{F}_p}$-algèbres $H_*\left(\overline{B}^n(S)\right)$.

On retourne donc aux définitions des opérations cohomologiques et on montre [8, Prop 10.5] que si A est une algèbre différentielle graduée à poids, alors la suspension σ préserve les poids, la transpotence multiplie les poids par p et la k-ième puissance divisée multiplie les poids par k. D'après la construction des morphismes (10.4) et (10.5) ci-dessus en termes d'opérations cohomologiques, on en déduit une description de $H_*\left(\overline{B}^n(S(V))\right)$ comme algèbre graduée à poids. En appliquant le théorème on obtient donc une description des $\mathcal{P}_{\mathbb{F}_p}$-algèbres $H_*\left(\overline{B}^n(S)\right)$.

Étape 3. On utilise ensuite le foncteur de changement de base pour obtenir le résultat sur un corps $\Bbbk$ quelconque. On obtient le résultat suivant.

Théorème 10.18. *[8, Thm 10.14] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique p, et $n \geq 3$. A chaque mot p-admissible*[38] *ω de première espèce de hauteur n on associe un foncteur $I^{(r_\omega)}\langle\deg(\omega)\rangle$, c'est à dire une copie de $I^{(r_\omega)}$ placée en degré homologique $\deg(\omega)$, où r_ω est le nombre de lettres égales à ϕ_p ou γ_p dans ω, et $\deg(\omega)$ est le degré*[39] *du mot ω. On note $M(n) = \bigoplus I^{(r_\omega)}\langle\deg(\omega)\rangle$ où la somme est prise sur tous les mots p-admissibles de hauteur n. On a des isomorphismes de $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées :*

$$\Gamma(M(n)_{\mathrm{pair}}) \otimes \Lambda(M(n)_{\mathrm{impair}}) \simeq H_*\left(\overline{B}^n(S)\right) \qquad (p \text{ impair}),$$
$$\Gamma(M(n)) \simeq H_*\left(\overline{B}^n(S)\right) \qquad (p=2).$$

10.2.3 Calculs sur $\mathbb{Z}$

Dans [Car], Cartan a calculé l'homologie entière des espaces d'Eilenberg Mac Lane. Le résultat est cependant beaucoup plus compliqué à exprimer

[38] Si p impair, un p-mot admissible de hauteur n et de première espèce est un mot formé de lettres σ, ϕ_p, γ_p satisfaisant les règles suivantes : (i) il y a n lettres égales à σ ou à ϕ_p, (ii) le mot commence par la lettre σ ou ϕ_p et finit par $\sigma\sigma$ et (iii) chaque lettre γ_p ou ϕ_p du mot possède un nombre pair de lettres σ à sa droite. Pour $p=2$, un 2-mot admissible de hauteur n est un mot formé de n lettres σ et de lettres γ_p, commençant par σ et finissant par $\sigma\sigma$.

[39] Si ω est un mot, son degré est défini récursivement par les règles suivantes. Le mot vide est de degré zéro. De plus $\deg(\sigma\omega) = \deg(\omega)+1$, $\deg(\phi_p\omega) = p\deg(\omega)+2$ et $\deg(\gamma_p\omega) = p\deg(\omega)$.

que dans le cas de l'homologie à coefficients dans un corps. En effet dans le cas de l'homologie à coefficients dans un corps, l'homologie est un objet universel (l'algèbre universelle à puissances divisées). A contrario, l'homologie entière n'est pas clairement un objet universel, ni même un quotient bien identifié d'un objet universel, ce qui complique singulièrement la situation.

Deux descriptions de l'homologie entière des espaces d'Eilenberg Mac Lane apparaissent dans [Car]. Une description compacte et non fonctorielle [Car, Exp. 11, Thm 1] et une description fonctorielle mais énorme [Car, Exp. 11, Thm 6]. Dans [8, Section 11] nous avons calculé l'homologie de $\overline{B}^n(S(A))$ non fonctoriellement mais en identifiant les composantes données par le poids à partir de la première description. Ce résultat est cependant très insuffisant pour déterminer le foncteur strictement polynomial $A \mapsto H_*(\overline{B}^n(S(A)))$.

Nous avons obtenu quelques descriptions très partielles de ce foncteur strictement polynomial dans [9]. De manière plus précise, nous avons décrit complètement la $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$-algèbre d'homologie pour l'entier $n = 3$ dans [9, Thm 6.3], et nous avons décrit complètement la partie de poids inférieur ou égal à 4 pour n quelconque dans [9, Thm 10.1]. La description de l'homologie entière de $\overline{B}^n(S)$ comme $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$-algèbre graduée reste un problème ouvert.

10.3 Algèbres de convolution

Nous rappelons la notion classique d'algèbre de convolution (cf. par exemple [LV, Chap 2]), que nous énonçons dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux. Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif, A une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre différentielle graduée et C une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-cogèbre (concentrée en degré zéro). On note C_d la partie homogène de poids d de C et $A_{i,d}$ la partie homogène de A de degré homologique i et de poids d. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)$ a une structure de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-ADG définie de la manière suivante.

- La partie homogène de poids d et de degré i de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)$ est égale à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C_d, A_{i,d})$.
- La différentielle est induite par la différentielle de A :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, \partial) : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)\ .$$

- L'unité est $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\epsilon, \eta) : \Bbbk = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Bbbk, \Bbbk) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)$ et le produit est le produit de convolution, donné par la composée :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)^{\otimes 2} \xrightarrow{\otimes} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C^{\otimes 2}, A^{\otimes 2}) \xrightarrow{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Delta, m)} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)\ .$$

Si de plus A est augmentée et C a une unité, alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\eta, \epsilon)$ définit une augmentation sur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C, A)$. Les exemples élémentaires suivants découlent du lemme 10.5.

Lemme 10.19. *On a des isomorphismes de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres :*

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Gamma) \simeq \Gamma \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,S)\,,\\
&\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda) \simeq \begin{cases}\Gamma & si\ 2=0\ dans\ \Bbbk,\\ \Lambda & si\ 2\neq 0\ dans\ \Bbbk.\end{cases}\\
&\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda,\Lambda) \simeq \Gamma\,.
\end{aligned}$$

Démonstration. Les trois premiers isomorphismes sont démontrés à partir des isomorphismes $\mathfrak{S}_d$-équivariants $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\otimes^d, S) \simeq \otimes^d$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^d,\otimes^d) \simeq \otimes^d$ provenant du lemme 10.5, de l'exactitude à gauche du foncteur Hom interne et du fait que chacun des foncteurs Γ, Λ et S est le (co)noyau d'une application entre sommes directes de produits tensoriels. La démonstration du dernier isomorphisme est similaire. □

Si A est une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée, on définit de même une structure d'algèbre graduée sur $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)$ de la façon suivante.

- La partie homogène de poids d et de degré homologique k de $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)$ est la somme directe

$$\bigoplus_{j-i=k} \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C_d, A_{i,d})\,.$$

  (La graduation est en accord avec la convention usuelle sur les degrés homologiques et cohomologiques : si B est un objet gradué $B^i = B_{-i}$).
- L'unité est $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\epsilon,\eta)$ et le produit est donné par la composée :

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)^{\otimes 2} \xrightarrow{\otimes} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C^{\otimes 2},A^{\otimes 2}) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Delta,m)} \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)\,.$$

Si C est commutative et si A est graduée commutative, alors les algèbres $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(C,A)$ sont graduées commutatives.

L'observation élémentaire suivante permet de réduire de trois à un le nombre de degrés à considérer dans les calculs d'Ext entre foncteurs exponentiels classiques (le poids est implicitement porté par la structure strictement polynomiale des foncteurs, et nous n'avons pas à nous en soucier spécifiquement).

Observation 10.20. Soient X et Y des foncteurs exponentiels classiques (i.e. l'un des foncteurs S, Λ, ou Γ, éventuellement précomposé par un foncteur de torsion de Frobenius si $\Bbbk$ est un corps). Alors les graduations sur X et Y sont déterminées par le poids. Comme il n'y a pas d'Ext entre foncteurs homogènes de poids distincts, la $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée $\underline{\mathrm{Ext}}(X,Y)$ détermine complètement l'algèbre trigraduée $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^*,Y^*)$ (munie du produit de convolution).

Remarque 10.21. Dans [FFSS], les auteurs considèrent les algèbres trigraduées $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})$ où X et Y sont des foncteurs exponentiels classiques sur un corps $\Bbbk$. Il définissent également un coproduit sur ces extensions. Dans [8, Prop 5.8], nous montrons que la $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}(X^{(r)}, Y^{(s)})$ est un foncteur exponentiel. La comultiplication sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})$ définie dans [FFSS] correspond à la comultiplication canoniquement associée au foncteur exponentiel. En d'autres termes, la $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}(X^{(r)}, Y^{(s)})$ détermine complètement la *bigèbre* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{*\,(r)}, Y^{*\,(s)})$, et il n'est donc pas nécessaire de chercher à calculer la comultiplication. Ceci est bien entendu valable uniquement si l'on considère les Ext à paramètres, car nous avons besoin de la multiplication *et* de la fonctorialité de $\underline{\mathrm{Ext}}(X^{(r)}, Y^{(s)})$ pour reconstituer la comultiplication.

Supposons que la $\mathcal{P}_\Bbbk$-cogèbre C soit un foncteur exponentiel. Soit A une $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre différentielle graduée augmentée, d'idéal d'augmentation $\overline{A}$. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, \overline{A})$ est l'idéal d'augmentation de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, A)$ et on a des morphismes (induits par le produit tensoriel et la comultiplication de C) :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, \overline{A})^{\otimes n} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, \overline{A}^{\otimes n}) \ . \tag{10.6}$$

Si les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, \overline{A})$ prennent des valeurs $\Bbbk$-plates, le lemme 10.5 montre que les morphismes 10.6 sont des isomorphismes. L'énoncé suivant est alors une vérification directe à partir de la définition des algèbres de convolution, et de la définition de la construction bar.

Proposition 10.22 (Propriété d'échange)**.** *[8, Prop 7.2] Soit A une $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre différentielle graduée augmentée, et C un foncteur exponentiel, tels que le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(C, \overline{A})$ prenne des valeurs $\Bbbk$-plates. Les isomorphismes* (10.6) *pour $n \geq 0$, induisent un isomorphisme de complexes de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$\overline{B}(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, A)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, \overline{B}(A)) \ .$$

Si de plus C est commutatif et A est graduée commutative, cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres différentielles graduées commutatives augmentées.

La propriété d'échange est la propriété clé qui permet de reformuler les calculs d'Ext entre foncteurs exponentiels classiques en termes de constructions bar itérées de l'algèbre symétrique. On note $\Gamma\langle 4\rangle$ (resp. $\Lambda\langle 3\rangle$) la $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre différentielle graduée dont la partie homogène de poids d est égale à Γ^d, concentrée en degré homologique $4d$ (resp. Λ^d, concentrée en degré homologique $3d$).

Théorème 10.23. *[8, Thm 7.5] Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. Les $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S, \Lambda\langle 3\rangle)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S, \Gamma\langle 4\rangle)$ sont respectivement isomorphes à l'homologie des $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres différentielles graduées $\overline{B}^3(S)$ et $\overline{B}^4(S)$.*

Démonstration. Nous montrons le cas de $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda\langle 3\rangle)$, l'autre cas est similaire. D'après la section 7.2.3 on a un quasi-isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres différentielles graduées augmentées (où $\Lambda\langle 3\rangle$ est munie d'une différentielle nulle)

$$\Lambda\langle 3\rangle \hookrightarrow \overline{B}(S\langle 2\rangle)\ .$$

Mais $\overline{B}(S\langle 2\rangle)$ est un complexe d'injectifs, sa partie homogène de poids d est une résolution injective de Λ^d. L'algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda\langle 3\rangle)$ est donc isomorphe à l'homologie du complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\overline{B}(S\langle 2\rangle))$.

De plus, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,S\langle 2\rangle)\simeq\Gamma\langle 2\rangle$ d'après le lemme 10.19. C'est une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$ algèbre dont les valeurs sont projectives de type fini sur $\Bbbk$, on peut donc appliquer la proposition 10.22. On obtient que $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda\langle 3\rangle)$ est isomorphe à l'homologie de $\overline{B}(\Gamma\langle 2\rangle)$ donc à l'homologie de $\overline{B}^3(S)$ (d'après le quasi-isomorphisme (7.8) et le fait que la construction bar préserve les quasi-isomorphismes). □

Remarque 10.24. On peut démontrer de même que le foncteur gradué $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Lambda,\Lambda\langle 1\rangle)$ est isomorphe à l'homologie de la construction bar $\overline{B}(\Lambda)$ sur un anneau commutatif $\Bbbk$. On connaît l'homologie de ce complexe bar d'après la section 7.2.3. En particulier on a $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Lambda^d,\Lambda^d)=\Gamma^d$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Lambda^d,\Lambda^d)=0$ pour $i>0$ et tout $d\geq 0$. Ce résultat d'annulation peut également se démontrer à partir de la structure de catégorie de plus haut poids de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$.

10.4 Extensions entre foncteurs exponentiels classiques

Nous décrivons maintenant la méthode de calcul des extensions entre foncteurs exponentiels classiques (ou leurs précompositions par des foncteurs de torsion de Frobenius si $\Bbbk$ est un corps) donnée dans [8].

10.4.1 Calculs sans torsion de Frobenius

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. On cherche tout d'abord à calculer les extensions de la forme

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^*,Y^*)\ .$$

On ordonne les foncteurs exponentiels classiques « du plus projectif au plus injectif » : $\Gamma<\Lambda<S$. Si $X\leq Y$ alors $\underline{\mathrm{Ext}}^{>0}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^*,Y^*)=0$. Si $X=\Gamma$, cela résulte de la projectivité de Γ, si $Y=S$ cela résulte de l'annulation fournie par la proposition 7.8 et si $X=Y=\Lambda$ cela résulte de la remarque 10.24. Si $X\leq Y$, le calcul se réduit donc à un calcul évident de Hom. Il n'y a donc que les cas $X>Y$ à calculer, c'est à dire les deux cas suivants :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^*,\Lambda^*)\simeq\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Lambda^*,\Gamma^*)\quad\text{et}\quad\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^*,\Gamma^*)\ .$$

D'après l'observation 10.20, le calcul de ces algèbres trigraduées est équivalent au calcul de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres de convolution simplement graduées, et quitte à regraduer, on peut se restreindre à considérer les $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres de convolution (simplement graduées) :

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda\langle 3\rangle) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Gamma\langle 4\rangle)\;. \tag{10.7}$$

D'après le théorème 10.23 ces algèbres de convolution sont données par l'homologie des constructions bar itérées $\overline{B}^3(S)$ et $\overline{B}^4(S)$.

Si $\Bbbk$ est un corps, ces $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées sont complètement calculées dans le théorème 10.18. En caractéristique 2 on obtient le résultat suivant.

Théorème 10.25. *[8, Thm 10.17] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p=2$. On note $I^{(r)}[i]$ un copie du r-ième foncteur de torsion de Frobenius, placé en degré cohomologique i. On a des isomorphismes de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées (rappelons que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^d,Y^d)$ est la composante homogène de poids d et de degré i des algèbres graduées de gauche) :*

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Lambda)\simeq\Gamma\left(\bigoplus_{k\geq 0} I^{(k)}[p^k-1]\right)\;,$$

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S,\Gamma)\simeq\Gamma\left(\bigoplus_{k,\ell\geq 0} I^{(k+\ell)}[2p^{k+\ell}-p^k-1]\right)\;.$$

Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique impaire, il faut faire attention aux signes lorsque l'on regradue. Les algèbres de cohomologie des constructions bar itérées sont graduées commutatives, donc les algèbres (10.7) les sont également. Mais si l'on regradue ces algèbres, cette commutativité graduée n'est pas forcément conservée. De façon plus précise, l'algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}(S,\Gamma)$ s'obtient en n'effectuant que des décalages de degrés pairs, elle conserve donc la commutativité graduée. Par contre, l'algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}(S,\Lambda)$ n'est pas graduée commutative, et certains signes font leur apparition pour décrire la structure d'algèbre (ces signes sont étudiés en détails dans [8, Section 6]). On est conduit à introduire les notations suivantes. Si W et W' sont des espaces vectoriels gradués, on note $\Lambda(W)\otimes^1{}^t\Gamma(W')$ l'espace vectoriel gradué $\Lambda(W)\otimes\Gamma(W')$, muni du produit défini de la façon suivante. Si $x_1\in\Lambda^{d_1}(W)$, $x_2\in\Lambda^{d_2}(W)$, $y_1\in\Gamma^{e_1}(W')$ et $y_2\in\Gamma^{e_2}(W')$ sont des éléments homogènes de degrés respectifs i_1,i_2,j_1,j_2, alors on a

$$(x_1\otimes y_1)\cdot(x_2\otimes y_2):=(-1)^{i_2j_1+e_2d_1+e_1e_2}(x_1x_2)\otimes(y_1y_2)\;.$$

(L'exposant '^{1}' sur le produit tensoriel indique le signe additionnel e_2d_1, et le symbole '^{t}' indique le signe additionnel e_1e_2).

Théorème 10.26. *[8, Thm 10.16] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique p impaire. On note $I^{(r)}[i]$ un copie du r-ième foncteur de torsion de Frobenius,* *placé en degré cohomologique i. On a des isomorphismes de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées (rappelons que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^d, Y^d)$ est la composante homogène de poids d et de degré i des algèbres graduées de gauche) :*

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S, \Lambda) \simeq \Gamma\left(\bigoplus_{k\geq 0} I^{(k)}[p^k - 1]\right) \otimes^{1\, t}\Gamma\left(\bigoplus_{k\geq 0} I^{(k+1)}[p^{k+1} - 2]\right),$$

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S, \Gamma) \simeq \Gamma\left(\bigoplus_{k\geq 0} I^{(k)}[2p^k - 2] \oplus \bigoplus_{k,\ell\geq 0} I^{(k+\ell+2)}[2p^{k+\ell+2} - 2p^{k+1} - 2]\right) \otimes$$
$$\Lambda\left(\bigoplus_{k,\ell\geq 0} I^{(k+\ell+1)}[2p^{k+\ell+1} - 2p^k - 1]\right).$$

Si $\Bbbk = \mathbb{Z}$, on ne sait pas calculer complètement les $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres d'homologie de $\overline{B}^n(S)$. Cependant, pour $n = 3$ on sait d'après les calculs de Cartan que la partie p-primaire de la cohomologie de $K(A, 3)$ ne contient que de la p-torsion. On en déduit le résultat suivant. On rappelle qu'un groupe abélien A est dit élémentaire s'il existe un nombre premier p tel que A est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.

Théorème 10.27. *[8, Thm 11.8] On a $\underline{\mathrm{Ext}}^0_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S, \Lambda) \simeq \Lambda^d$. Pour tout $i > 0$ tout $d \geq 0$ et tout $m > 0$, le groupe abélien $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Lambda^d)(\mathbb{Z}^m)$ est une somme finie de groupes abéliens élémentaires de rang fini.*

Ce théorème permet de calculer complètement les groupes abéliens $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Lambda^d)(\mathbb{Z}^m)$ à l'aide de la formule des coefficients universels. On a en effet pour tout $i \geq 0$ une suite exacte courte de foncteurs strictement polynomiaux à valeurs dans les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie :

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Lambda^d) \otimes \mathbb{F}_p \to \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{\mathbb{F}_p}}(S^d, \Lambda^d) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_p, \underline{\mathrm{Ext}}^{i+1}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Lambda^d)) \to 0\,.$$

La situation pour $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Gamma^d)$ est complètement différente. En effet, l'homologie de $K(A, 4)$ contient des éléments de torsion entière arbitrairement élevée, ce qui implique le résultat suivant.

Proposition 10.28. *[8, Prop 11.10] Pour tout nombre premier p et tout entier r on peut trouver des entiers d et i tels que le groupe abélien $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S^d, \Gamma^d)$ contienne un élément d'ordre p^r.*

Dans [8, Section 11.5], nous donnons une description des algèbres graduées à poids $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S, \Lambda)(A)$ et $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}}(S, \Gamma)(A)$ pour tout groupe abélien A. Cette description est cependant non fonctorielle, complexe et difficile à exploiter, à l'instar de [Car, Thm 11.1]. Nous renvoyons à [8, Thm 11.20 et 11.21] pour des énoncés complets. Les résultats de l'article [9] permettent de donner quelques énoncés plus explicites et plus fonctoriels. Par exemple, nous décrivons [9, Thm 10.1] la partie homogène de poids 4 de l'homologie de $\overline{B}^n(S)$ comme foncteur strictement polynomial. Les cas $n = 3$ et $n = 4$ se traduisent en termes de calculs d'Ext comme nous l'indiquons dans l'exemple suivant.

Exemple 10.29. Pour tout nombre premier p et tout $r \geq 0$, on note $I_p^{(r)} \in \mathcal{P}_{p^r,\mathbb{Z}}$ le foncteur strictement polynomial obtenu comme composée du r-ième foncteur de torsion de Frobenius $I^{(r)} \in \mathcal{P}_{p^r,\mathbb{F}_p}$ avec le foncteur homogène de poids un $A \mapsto A/pA$. On note également par Φ^4 le conoyau de l'inclusion canonique $\Lambda^4_{\mathbb{F}_2} \circ I_2^{(0)} \hookrightarrow \Gamma^4_{\mathbb{F}_2} \circ I_2^{(0)}$. On a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_\mathbb{Z}}(S^4, \Lambda^4) \simeq \begin{cases} \Lambda^4 & \text{si } i = 0\ , \\ \Phi^4 & \text{si } i = 1\ , \\ \Lambda^2_{\mathbb{F}_2} \circ I_2^{(1)} \ \oplus\ I \otimes I_3^{(1)} & \text{si } i = 2\ , \\ I_2^{(2)} & \text{si } i = 3\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_\mathbb{Z}}(S^4, \Gamma^4) \simeq \begin{cases} \Gamma^4 & \text{si } i = 0\ , \\ \Gamma^2_{\mathbb{Z}} \otimes I_2^{(1)} & \text{si } i = 2\ , \\ \Gamma^2_{\mathbb{F}_2} \circ I_2^{(1)} & \text{si } i = 3\ , \\ \Gamma^2_{\mathbb{Z}} \circ I_2^{(1)} \ \oplus\ I \otimes I_3^{(1)} & \text{si } i = 4\ , \\ I_2^{(2)} & \text{si } i = 6\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

On remarque en particulier que le groupe abélien gradué $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\mathbb{Z}}(S^4, \Gamma^4)$ possède de la 4-torsion en degré 4 uniquement, et que celle-ci est fournie par le foncteur strictement polynomial $A \mapsto \Gamma^2_\mathbb{Z}((A/2)^{(1)})$.

10.4.2 Calculs avec torsion de Frobenius

Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$. Dans [8, Section 15.1] nous décrivons les algèbres de convolution

$$\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{(r)}, Y^{(s)})\ . \tag{10.8}$$

pour tous les $r \geq 0$, $s \geq 0$ et toutes les paires (X, Y) de foncteurs exponentiels classiques. Comme le dual d'un foncteur exponentiel classique est un foncteur exponentiel classique, il suffit d'examiner le cas où $r \geq s$. On pose donc $t = r - s$ avec $t \geq 0$. On obtient par exemple l'énoncé suivant, qui implique le théorème E.2 énoncé au début du mémoire. En effet, la partie de degré i et de poids dp^r de l'algèbre (10.8) est égale au foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{d\,(r)}, Y^{dp^t\,(s)})$. Ainsi, les générateurs $I^{(n+t+s)}[i]$ dans l'énoncé ci-dessous sont des sous-foncteurs du foncteur $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{n\,(t+s)}, Y^{np^t\,(s)})$.

Théorème 10.30. *[8, Thm 15.4] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique p impaire et s, t des entiers positifs. Notons $I^{(n)}[i]$ une copie du foncteur de n-ième torsion de Frobenius, placée en degré cohomologique i. La $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbre graduée $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(S^{(t+s)}, \Gamma^{(s)})$ est isomorphe au produit tensoriel*

$$\begin{aligned}&\Gamma\left(\bigoplus_{0\le i<p^s, 0\le k} I^{(k+s+t)}[(2i+2)p^{k+t}-2]\right)\\ &\otimes \Gamma\left(\bigoplus_{0\le i<p^s, 0\le k,\ell} I^{(k+\ell+2+s+t)}[(2i+2)p^{k+\ell+2+t}-2p^{k+1}-2]\right)\\ &\otimes \Lambda\left(\bigoplus_{0\le i<p^s, 0\le k,\ell} I^{(k+\ell+1+s+t)}[(2i+2)p^{k+\ell+1+t}-2p^{k}-1]\right) .\end{aligned}$$

Nous renvoyons à [8] pour les énoncés pour les autres paires de foncteurs exponentiels classiques. Mentionnons que nos résultats pour les paires (X, Y) avec $X \le Y$ (pour l'ordre $\Gamma < \Lambda < S$) coïncident avec les résultats de [FFSS]. Pour les paires $X > Y$ on observe des différences avec les calculs de [Cha3]. Cependant, certains énoncés intermédiaires de [Cha3] sont à prendre avec précaution [8, Rk 4.7].

Nous présentons maintenant les grandes lignes du calcul des algèbres de convolution (10.8). Notre méthode traite toutes les paires (X, Y) simultanément. On part du fait que les algèbres $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X, Y)$ ont déjà été calculées dans la section 10.4.1 (et ce calcul est trivial si $X \le Y$).

Étape 1 : $s = 0$ et $t \ge 0$. L'énoncé suivant montre que les $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X^{(t)}, Y)$ sont isomorphes, à une regraduation près, aux $\mathcal{P}_\Bbbk$-algèbres graduées $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(X, Y)^{(t)}$. Sa démonstration suit la même démarche que la démonstration du théorème 8.13, en remplaçant les complexes de Troesch par les constructions bar itérées de S.

Proposition 10.31. *[8, Prop 12.1] Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique $p > 0$, soit $F \in \mathcal{P}_\Bbbk$, et soit Y un foncteur exponentiel classique. On pose $\alpha(S) = 0$, $\alpha(\Lambda) = 1$, $\alpha(\Gamma) = 2$. Alors pour tout i on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux :*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, Y^d)^{(t)} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^{i+\alpha(Y)d(p^t-1)}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(t)}, Y^{p^t d}) .$$

De plus, si F est une $\mathcal{P}_\Bbbk$-cogèbre, ces isomorphismes sont compatibles aux produits de convolution.

Étape 2 : $s \ge 0$ et $t \ge 0$, à filtration près. On utilise la suite spectrale de torsion de Frobenius de la proposition 8.23 (ou son analogue dans les foncteurs strictement polynomiaux à une variable [5]) :

$$E_2^{*,*}(F, G) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F, G_{E_s}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(F^{(s)}, G^{(s)}) .$$

En remplaçant G par le foncteur à paramètre $G_{V^{(s)}}$, cette suite spectrale se réécrit sous la forme d'une suite spectrale de foncteurs strictement polynomiaux :

$$(\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F,G)_{E_s})^{(s)} \Rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(F^{(s)},G^{(s)}) \;.$$

De plus, cette suite spectrale est compatible aux produits et s'arrête à la page 2 d'après le théorème 8.17 (dans le cas particulier qui nous intéresse, cet arrêt a été d'abord démontré dans [5, Thm 8.11]). On a donc un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées

$$(\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(t)},Y)_{E_s})^{(s)} \simeq \mathrm{gr}\,\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(s+t)},Y^{(s)}) \;,$$

où l'on prend le degré total sur le membre de gauche, c'est à dire la somme du degré cohomologique des Ext et du degré cohomologique obtenu en paramétrisant le foncteur par l'espace vectoriel gradué $E_s = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(I^{(s)},I^{(s)})$.

Étape 3 : $s \geq 0$ et $t \geq 0$, sans filtration. Dans cette dernière étape, on montre que les filtrations apparaissant à l'étape précédente sont triviales. Pour cela, on reprend les étapes précédentes. Supposons tout d'abord que p est impair. Les algèbres $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X,Y)$ sont toutes isomorphes (éventuellement après regraduation) à une $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbre graduée commutative de la forme

$$(i)\quad \Gamma(F_{\mathrm{pair}})\otimes\Lambda(F_{\mathrm{impair}})\;,\qquad (ii)\quad S(F_{\mathrm{pair}})\otimes\Lambda(F_{\mathrm{impair}})\;,$$

où F est un foncteur strictement polynomial gradué qui est une somme de foncteurs de torsion de Frobenius en chaque degré. Comme les algèbres $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(t)},Y)$ sont isomorphes, à une regraduation près, aux algèbres $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X,Y)^{(t)}$ elles sont également de la forme (i) ou (ii). On en déduit que les algèbres $(\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(t)},Y)_{E_s})^{(s)}$ sont encore de la forme (i) ou (ii). D'après la proposition 10.8 on a donc un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$-algèbres graduées :

$$(\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(t)},Y)_{E_s})^{(s)} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(s+t)},Y^{(s)}) \;. \tag{10.9}$$

La démarche est la même en caractéristique $p = 2$, en remarquant que les algèbres $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X,Y)$ sont cette fois de la forme

$$(i)\quad \Gamma(F)\;,\qquad (ii)\quad S(F)\;,\qquad (iii)\quad \Lambda(F)\;,$$

où F est un foncteur strictement polynomial gradué qui est une somme de foncteurs de torsion de Frobenius en chaque degré, et F est homogène dans le cas (iii). On en déduit que les algèbres $(\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(t)},Y)_{E_s})^{(s)}$ sont encore de cette forme. Dans les cas (i) et (ii), on peut appliquer la proposition 10.9 pour obtenir un isomorphisme (10.9). Le cas (iii) ne survient que pour les paires $(X,Y) = (\Gamma,\Lambda)$ ou (Λ,S). Dans ce cas, on doit montrer en plus que l'algèbre $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(X^{(s+t)},Y^{(s)})$ est strictement anticommutative pour pouvoir utiliser la proposition 10.10. Ceci est fait en montrant [8, Lm 15.5] que cette algèbre s'identifie une sous-algèbre de $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(\Lambda^{(s+t)},\Lambda^{(s)})$ ou $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{P}_{\Bbbk}}(S^{(s+t)},S^{(s)})$. Ceci achève le calcul.

11 Dérivation à la Dold-Puppe et Dualité de Ringel

La notion de foncteur dérivé pour les foncteurs non additifs entre catégories abéliennes a été introduite par Dold et Puppe dans [DP]. Cette notion trouve des applications en topologie algébrique. Elle sert par exemple à décrire l'homologie des espaces d'Eilenberg et Mac Lane, ou la première page de la suite spectrale de Curtis [Cur] :

$$E^1_{s,t} = L_t\mathcal{L}^s(A,n) \Longrightarrow \pi_{t+1}M(A,n+1)\ ,$$

où $M(A,n+1)$ désigne un espace de Moore associé au groupe abélien A, et $L_t\mathcal{L}^s(A,n)$ les foncteurs dérivés du foncteur d'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}$ (vu comme un foncteur des groupes abéliens dans les groupes abéliens). Dans la section 11.1, nous étudions les foncteurs dérivés des foncteurs strictement polynomiaux. Nous interprétons la dérivation des foncteurs comme un opérateur

$$L_X : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})\ .$$

Nous expliquons également un résultat de [10] qui montre que le simple fait de savoir qu'un foncteur est strictement polynomial permet d'obtenir des informations sur la $\mathbb{Z}$-torsion de ses foncteurs dérivés.

Dans la section 11.2, nous rappelons la dualité de Ringel, qui provient de la théorie des représentations des algèbres quasi-héréditaires [Rin, Don4]. Cette dualité provient de la théorie des modules basculants. Dans le cadre des foncteurs strictement polynomiaux, elle se formule comme un opérateur (la notation Θ est reprise de l'article [Cha2]) :

$$\Theta : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})\ .$$

Nous démontrons dans la section 11.3 que ces deux opérateurs sont isomorphes à une suspension près. Ce résultat obtenu dans [6] possède de nombreuses applications, car les techniques de calcul développées par les topologues algébristes pour les foncteurs dérivés sont très différentes des techniques développées en théorie des représentations. Dans la section 11.4 nous détaillons des applications du théorème à l'étude des foncteurs composés. Nous obtenons par exemple un résultat de connexité originalement dû à Curtis dans le corollaire 11.19 et une obstruction à l'existence de bonnes filtrations sur certains foncteurs composés dans le corollaire 11.22. La section 11.5 est ensuite consacrée à la compatibilité des opérateurs L_X, Θ et de l'isomorphisme aux produits tensoriels.

L'apport principal de cette partie du mémoire par rapport à [6] est de travailler dans la catégorie dérivée non bornée et de supprimer les hypothèses sur l'anneau de base $\Bbbk$. Ces améliorations ont été influencées par [Kra]. Le théorème 11.16 et son application à la connexité des foncteurs dérivés de l'algèbre de Lie libre sont également nouveaux.

11.1 Foncteurs strictement polynomiaux dérivés

11.1.1 Notations

Nous renvoyons à [DP, McL2, Wei] pour un exposé sur les techniques simpliciales usuelles. Si X est un objet simplicial dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{C}X$ le complexe des chaînes de X, et $\mathcal{N}X$ le sous-complexe homotopiquement équivalent [McL2, VIII.6] des chaînes normalisées. On note $\pi_*X = H_*(\mathcal{N}X)$. Un morphisme $f : X \to Y$ est une équivalence faible si π_*f est un isomorphisme, ou de façon équivalente si $\mathcal{N}f$ est un quasi-isomorphisme. D'après la correspondance de Dold-Kan, le complexe des chaînes normalisées induit une équivalence de catégories préservant les homotopies : $\mathcal{N} : s\mathcal{A} \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ où $s\mathcal{A}$ désigne la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathcal{A}$. Le foncteur inverse est noté $\mathcal{K}$.

On identifie les complexes de chaînes et les complexes de cochaînes par la convention usuelle $C^i = C_{-i}$, et on note $\mathbf{D}_{>n}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée dont les objets sont les complexes C tel que $H_{<n}(C) = H^{>-n}(C) = 0$. On note $\mathrm{Ho}(s\mathcal{A})$ la catégorie homotopique des objets simpliciaux dans $\mathcal{A}$ (modulo les équivalences faibles) et $\mathrm{Ho}_{>n}(s\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine des objets n-connexes (i.e. des X tels que $\pi_iX = 0$ pour $i \leq n$). Pour tout $n \geq -1$, les foncteurs $\mathcal{N}$ et $\mathcal{K}$ induisent des équivalences de catégories :

$$\mathcal{N} : \mathrm{Ho}_{>n}(s\mathcal{A}) \leftrightarrows \mathbf{D}_{>n}(\mathcal{A}) : \mathcal{K} \; .$$

11.1.2 Dérivation à la Dold et Puppe

Dans cette section nous résumons certains des aspects principaux du formalisme des foncteurs dérivés de [DP]. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne avec assez de projectifs. Une résolution simpliciale projective d'un complexe $C \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ est la donnée d'un objet simplicial P dans $\mathcal{A}$, projectif en chaque degré, et d'un quasi-isomorphisme $f : \mathcal{N}P \to C$. La correspondance de Dold-Kan assure l'existence des résolutions simpliciales : si C est un complexe et Q un complexe de projectifs muni d'un quasi-isomorphisme $Q \to C$, on peut prendre $P = \mathcal{K}Q$, muni du quasi-isomorphisme $\mathcal{N}P = Q \to C$. La correspondance de Dold-Kan assure également qu'une telle résolution simpliciale est unique dans $s\mathcal{A}$ à équivalence d'homotopie près, que tout morphisme $f : C \to D$ se relève en un morphisme $\overline{f} : P \to Q$ et que $\overline{f}$ est unique à homotopie près.

Si $\mathcal{B}$ est une deuxième catégorie abélienne et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur, on définit les foncteurs dérivés de F sur un complexe C de résolution projective simpliciale P par :

$$L_*F(C) := \pi_*F(P) \; .$$

Si A est un objet de $\mathcal{A}$, on note $L_*F(A, n)$ les foncteurs dérivés du complexe $A[-n]$, i.e. du complexe égal à A concentré en degré homologique n. Les foncteurs dérivés définissent des foncteurs :

$$L_iF : \mathbf{D}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}\ , \qquad L_iF(-,n) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\ .$$

Si F est un foncteur additif, les foncteurs dérivés $L_*F(A,0)$ coïncident avec les foncteurs dérivés classiques à la Cartan-Eilenberg (comme décrit par exemple dans [Wei, Chap 2]). Les foncteurs dérivés des foncteurs non additifs apparaissent naturellement en topologie algébrique en lien avec les produits symétriques d'espaces [Do] ou l'homotopie des sphères [Cur].

Remarque 11.1. Quillen a étendu le formalisme de Dold et Puppe dans son algèbre homotopique [Qui1]. Selon sa terminologie, $L_*F(C)$ est le foncteur dérivé de $F : s\mathcal{A} \to s\mathcal{B}$ pour la structure de modèle projective sur $s\mathcal{A}$.

La définition d'un foncteur polynomial donnée dans la section 4.1.5 reste valable sans changement pour un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie additive et $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne. Nous donnons maintenant des énoncés reliant les notions de foncteur dérivé et de foncteur polynomial. On conserve la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ avec assez de projectifs et la catégorie abélienne quelconque $\mathcal{B}$. Le résultat suivant est une conséquence de [DP, Hilfssatz 6.10].

Proposition 11.2. *Soit $n > 0$. Pour tout $i \in [kn, kn+n[$, et tout $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ les foncteurs suivants sont polynomiaux de degré inférieur ou égal à k*

$$L_iF : \mathbf{D}_{>n-1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}\ , \qquad L_iF(-,n) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\ .$$

Si F est lui-même polynomial, on obtient en outre des propriétés de finitude sur ses foncteurs dérivés.

Proposition 11.3. *[DP, Hilfssatz 4.23] Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur polynomial et X un objet simplicial dans $\mathcal{A}$ tel que $(\mathcal{N}X)_i = 0$ pour $i > k$. Alors $(\mathcal{N}FX)_i = 0$ pour $i > k\deg(F)$.*

Corollaire 11.4. *[DP, Satz 4.22] Supposons $\mathcal{A}$ de dimension homologique h. Pour tout objet simplicial X dans $\mathcal{A}$ tel que $\pi_iX = 0$ pour $i > k$ et tout foncteur polynomial $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on a $L_iF(X) = 0$ pour $i > k(\deg(F) + h)$.*

11.1.3 Dérivation des foncteurs strictement polynomiaux

Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et $X \in s\mathrm{P}_\Bbbk$ un $\Bbbk$-module simplicial projectif de type fini en chaque degré. Si F est un foncteur strictement polynomial homogène de poids d, on peut paramétriser F par X pour obtenir un objet simplicial $F_X \in s\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. Plus précisément la partie de degré n de F_X est le foncteur à paramètre F_{X_n} les opérateurs de faces sont données par les morphismes $F(d_i^X \otimes V) : F(X_n \otimes V) \to F(X_{n-1} \otimes V)$ et les dégénérescences par les morphismes $F(s_i^X \otimes V)$. En particulier on a :

$$\pi_iF_X(V) = L_iF(X \otimes V) \tag{11.1}$$

Remarque 11.5. De même on peut définir un objet cosimplicial F^X tel que $F^X(V)^n = F(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(X_n, V))$. Plus généralement, on peut paramétriser F pas un objet n-simplicial X pour obtenir un objet n-simplicial F_X ou un objet n-cosimplicial F^X.

L'exemple suivant permet d'interpréter les constructions bar des foncteurs exponentiels en termes de paramétrisation par des objets simpliciaux. Il s'obtient par un calcul explicite à partir de la définition de $\overline{B}$, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{N}$.

Exemple 11.6. Soit E un foncteur exponentiel (non gradué), et soit $K(1) = \mathcal{K}(\Bbbk[-1])$. On a un isomorphisme de complexes :

$$\overline{B}E \simeq \mathcal{N}E_{K(1)} \ .$$

Plus généralement, on peut paramétriser des complexes de foncteurs strictement polynomiaux par un objet simplicial $X \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$. Plus précisément, si C est un complexe dans $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$, on définit un objet bigradué

$$(C_X)_{i,j} := (C_i)_{X_j}$$

équipé d'une structure simpliciale provenant de la structure simpliciale de X (avec opérateurs de faces $d_k : (C_X)_{i,j} \to (C_X)_{i,j-1}$, dégénérescences $s_k : (C_X)_{i,j} \to (C_X)_{i,j+1}$), et d'une différentielle $\delta : (C_X)_{i,j} \to (C_X)_{i-1,j}$ induite par la différentielle de C. En appliquant les chaînes normalisées de la structure simpliciale on obtient un bicomplexe, dont nous notons $L_X C$ le complexe total :

$$L_X C := \mathrm{Tot}\,(\mathcal{N}C_X) \ .$$

Cette construction définit un foncteur exact :

$$L_X : \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \ .$$

Lemme 11.7. *Soit $X \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$ un $\Bbbk$-module simplicial tel que $(\mathcal{N}X)_i = 0$ pour $i \gg 0$. Alors le foncteur L_X induit un foncteur triangulé au niveau des catégories dérivées :*

$$L_X : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \ .$$

Démonstration. D'après la proposition 11.3, l'hypothèse $(\mathcal{N}X)_i = 0$ pour $i \gg 0$ assure que le bicomplexe $\mathcal{N}C_X$ est borné dans la direction horizontale. Le foncteur L_X préserve donc les quasi-isomorphismes par l'argument usuel de suite spectrale [Wei, Chap 5, Thm 5.2.12] (la finitude de $\mathcal{N}C_X$ dans la direction horizontale assure qu'il n'y a pas de problème de convergence). □

11.1.4 Application à la torsion des foncteurs dérivés

Rappelons le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{F}_{\Bbbk}$ où $\mathcal{F}_{\Bbbk}$ est la catégorie des foncteurs de source $\mathrm{P}_{\Bbbk}$ et de but $\Bbbk$-Mod. On dit qu'un foncteur strictement polynomial est de degré d si son image par le foncteur oubli (encore notée F) est de degré d (au sens d'Eilenberg et Mac Lane). Si F est de poids d alors F est polynomial de degré $\leq d$[40], mais on n'a pas égalité en général.

Dans l'article [10], nous donnons une méthode générale pour contrôler la torsion entière de certains invariants homologiques. Cette méthode repose sur la comparaison entre le degré et le poids des foncteurs strictement polynomiaux. Nous expliquons ici l'application de cette méthode au contrôle de la $\mathbb{Z}$-torsion des foncteurs dérivés au sens de Dold et Puppe.

Si $F \in \mathcal{P}_{\Bbbk}$, et $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier entier, on note ${}_{(p)}F$ la partie de torsion p-primaire de F :

$$ {}_{(p)}F(V) = \{x \in F(V) \ : \ \exists r \geq 0 \quad p^r x = 0\} \ . $$

On définit l'exposant de ${}_{(p)}F$ comme le plus petit entier $r \geq 0$ tel que pour tout $V \in \mathrm{P}_{\Bbbk}$ et tout $x \in {}_{(p)}F(V)$ on a $p^r x = 0$. On note $\alpha_p(d) \in \mathbb{N}$ la somme des chiffres d'un entier d dans son écriture en base p. Le degré, le poids et la torsion entière d'un foncteur strictement polynomial sont reliés par l'énoncé suivant.

Théorème 11.8. *[10, Prop 1.1, Thm 1.2] Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$.*

1. *Si $\deg(F) < d$ alors les valeurs de F sont des groupes abéliens de torsion.*
2. *Si ${}_{(p)}F \neq 0$ alors $\alpha_p(d) \leq \deg({}_{(p)}F) \leq d$ et le degré de ${}_{(p)}F$ est égal à $\alpha_p(d)$ modulo $(p-1)$.*
3. *Si de plus $\deg({}_{(p)}F) < d$, l'exposant de ${}_{(p)}F$ est inférieur ou égal à*

$$ \frac{\deg F - \alpha_p(d)}{p-1} + 1 \ . $$

La démonstration du théorème 11.8 commence par la classification des foncteurs strictement polynomiaux additifs. Ceux-ci sont essentiellement donnés par les foncteurs de torsion de Frobenius (cf. remarque 8.1), ce qui démontre le lien entre degré et poids pour les foncteurs additifs. On étend ensuite ce lien à tous les foncteurs strictement polynomiaux en étudiant leurs effets croisés. En ce qui concerne la torsion entière, le lemme de Yoneda permet de ramener le problème à l'étude de la torsion entière des quotients du foncteur Γ^d. Le résultat découle alors de propriétés arithmétiques élémentaires des coefficients binomiaux. Nous renvoyons à l'article [10] pour les détails complets sur la démonstration.

Corollaire 11.9. *[10, Thm 4.11] Soit $F \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ et soit $X \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$ un $\Bbbk$-module simplicial $(n-1)$-connexe, $n \geq 1$. Alors pour tout $i < nd$ le groupe abélien*

[40] En effet, comme le quotient d'un foncteur de degré k est de degré inférieur ou égal à k, il suffit de vérifier cette propriété pour les projectifs standard. Un calcul direct (similaire à celui de l'exemple 4.4) montre que les projectifs standard sont de degré exactement d.

$L_iF(X)$ est un groupe de torsion. Plus précisément, si $i < n\alpha_p(d)$ alors la partie p-primaire ${}_{(p)}L_iF(X)$ est nulle. Si $i \in [kn, (k+1)n[$ alors l'exposant de la partie p-primaire de ${}_{(p)}L_iF(X)$ est inférieur ou égal à

$$\frac{k-\alpha_p(d)}{p-1} + 1\ .$$

Démonstration. D'après l'égalité (11.1) et la proposition 11.2, le foncteur strictement polynomial $\pi_i F_X \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ est polynomial de degré inférieur ou égal à $\frac{i}{n}$. L'énoncé découle donc directement du théorème 11.8 □

11.2 Dualité de Ringel

Nous avons montré à la section 7.2.3 que le foncteur Λ^d admet une résolution projective de longueur finie. Le foncteur dérivé $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\Lambda^d, -)$ est donc défini sur la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ toute entière.

Définition 11.10. Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et d un entier positif. On appelle opérateur de dualité de Ringel le foncteur triangulé

$$\Theta := \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, -) : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})\ .$$

Exemple 11.11. On a les calculs élémentaires d'Ext à paramètres suivants (le premier découle de la propriété d'annulation 7.8 et du lemme de Yoneda, le second de la remarque 10.24) :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, S^d) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, S^d) \simeq \Lambda^d\ ,$$
$$\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, \Lambda^d) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, \Lambda^d) \simeq \Gamma^d\ .$$

Ces calculs se reformulent en $\Theta(S^d) \simeq \Lambda^d$ et $\Theta(\Lambda^d) \simeq \Gamma^d$.

Le nom de « Dualité de Ringel » provient de la théorie des représentations. Soit $\Bbbk$ un corps et A une $\Bbbk$-algèbre quasi-héréditaire. Les algèbres quasi-héréditaires sont caractérisées [CPS2] comme les $\Bbbk$-algèbres A de dimension finie telles que A-Mod admet une structure de catégorie de plus haut poids (cf. section 4.2.4 pour l'axiomatique des catégories de plus haut poids). Un théorème de Ringel [Rin] assure qu'il existe un unique (à isomorphisme près) A-module T satisfaisant les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout A-module M, on a $\mathrm{Ext}^{>0}_A(T, M) = 0$ si et seulement si M admet une filtration dont le gradué associé est une somme directe de modules costandard.

(ii) Le module T est basique, c'est à dire est une somme directe de modules indécomposables deux à deux non isomorphes.

Le module T s'appelle le module basculant caractéristique de A. Ringel montre qu'il satisfait les propriétés suivantes.

1. Le dual de Ringel de A, c'est à dire l'algèbre d'endomorphismes $A' = \mathrm{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$ est une algèbre quasi-héréditaire, et on a $(A')' \simeq A$.
2. On a une équivalence de catégories triangulées donnée par le foncteur

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathbf{D}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{D}(A') \ .$$

Le cas de l'algèbre de Schur $A = S(n, d)$ a été étudié explicitement par Donkin [Don4]. Si $n \geq d$ le module basculant caractéristique pour $S(n, d)$ est $T = \Lambda^d(\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^n))$ et on a un isomorphisme $S(n, d)' \simeq S(n, d)$. Le diagramme commutatif suivant, dont les dont les isomorphismes verticaux sont induits par l'évaluation sur $\Bbbk^n$ montre que l'opérateur Θ correspond à la dualité de Ringel pour les algèbres de Schur.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[d, "\simeq"] & & \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbf{D}(S(n,d)) \arrow[r, "\mathbf{R}\mathrm{Hom}(T,-)"] & \mathbf{D}(S(n,d)') \arrow[r, "\simeq"] & \mathbf{D}(S(n,d))
\end{tikzcd} \ .$$

11.3 La dualité de Ringel comme opérateur de dérivation

Dans l'article [6], nous avons donné une relation entre l'opérateur de dérivation des foncteurs strictement polynomiaux et l'opérateur de dualité de Ringel. Cette relation est donnée en supposant l'anneau de base $\Bbbk$ principal. Cette restriction sur l'anneau de base était nécessaire car nous avions formulé le résultat dans la catégorie dérivée bornée des foncteurs strictement polynomiaux (l'hypothèse $\Bbbk$ principal permettait d'avoir une catégorie $\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ de dimension homologique finie et de disposer de résolutions injectives et projectives finies). Nous donnons ici l'énoncé pour la catégorie dérivée totale $\mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ sur un anneau commutatif $\Bbbk$ quelconque. Les structures monoïdales seront traitées à la section 11.5.

On rappelle que l'opérateur de décalage $[k]$ est défini sur les complexes par $C[k]_i = C_{k+i}$ ou $C[k]^i = C^{i-k}$, et la différentielle de $C[k]$ est donnée par $d_{C[k]} = (-1)^k d_C$.

Théorème 11.12. *[6, Thm 5.5] Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif et soit d un entier positif. Soit $K(n) \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$ un $\Bbbk$-module simplicial tel que $\pi_i K(n) \simeq \Bbbk$ si $i = n$ et $\pi_i K(n) = 0$ sinon, et tel que $(\mathcal{N}K(n))_i = 0$ pour $i \gg 0$. Alors les deux foncteurs triangulés suivants sont isomorphes :*

$$L_{K(n)} \ , \ \Theta^n[-nd] \ : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \ .$$

Avant de démontrer le théorème 11.12, nous en donnons quelques conséquences concrètes. Si $n = 1$ ou $n = 2$, le théorème implique[41] des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux, naturels en F :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, F)(V) \simeq L_{d-i}F(V, 1) \;, \tag{11.2}$$

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(S^d, F)(V) \simeq L_{2d-i}F(V, 2) \;. \tag{11.3}$$

Le corollaire 11.21 ci-après permet également de donner des interprétations des foncteurs dérivés $L_iF(V, n)$, pour $n \geq 3$, en termes d'Ext. Par exemple :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, F \circ \otimes^n)(V) \simeq L_{nd-i}F(V^{\otimes d}, n) \;. \tag{11.4}$$

Démonstration du théorème 11.12. Nous suivons la démonstration de [6]. Soit P une résolution projective finie de Λ^d et notons

$$\widetilde{\Theta} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(P, -) : \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \;.$$

De même on considère l'opérateur de dérivation $L_{K(n)}$ au niveau de la catégorie $\mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$. Pour démontrer le théorème 11.12, nous allons exhiber une transformation naturelle $\widetilde{\Theta}^n[-nd] \to L_{K(n)}$ telle que pour tout $C \in \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$, le morphisme de complexes $\widetilde{\Theta}^n(C)[-nd] \to L_{K(n)}C$ soit une équivalence d'homotopie.

On réduit tout d'abord la construction au cas $n = 1$. Par la correspondance de Dold-Kan, l'objet $K(n)$ du théorème 11.12 est unique à équivalence d'homotopie près. Si on remplace $K(n)$ par $K(n)'$, on a donc une équivalence d'homotopie $K(n) \to K(n)'$ qui induit une équivalence d'homotopie $L_{K(n)}C \to L_{K(n)'}C$ naturelle en C. On peut donc choisir un modèle spécifique pour $K(n)$. Pour le reste de la démonstration on fixe $K(1) = \mathcal{K}(\Bbbk[-1])$ et $K(n) = K(1)^{\otimes n}$. Le théorème d'Eilenberg-Zilber fournit alors une équivalence d'homotopie, naturelle en C (on peut prendre pour ∇ la transformation naturelle donnée par les shuffles [McL2, VIII Thm 8.8])

$$L_{K(n)}C \xrightarrow{\nabla} \underbrace{L_{K(1)} \circ \cdots \circ L_{K(1)}}_{n \text{ fois}} C \;.$$

Par définition $\widetilde{\Theta}^n(C)[-nd]$ est isomorphe au complexe obtenu en appliquant n-fois l'opérateur $\widetilde{\Theta}[-d]$ à C. De plus, comme les opérateurs $\widetilde{\Theta}[-d]$ et $L_{K(1)}$ sont additifs, ils préservent les homotopies. Pour démontrer le

[41] Le premier isomorphisme s'obtient directement en prenant l'homologie. Pour démontrer le deuxième, on utilise que Θ est une équivalence de catégories (proposition 11.13). On note $\underline{\mathrm{HExt}}^*_{\mathcal{P}_\Bbbk}(C, D)$ les groupes d'hyperExt à paramètre entre deux complexes de foncteurs strictement polynomiaux. On a des isomorphismes naturels en F :

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(S^d, F) \simeq \underline{\mathrm{HExt}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Theta^{-1}(\Lambda^d), F) \simeq \underline{\mathrm{HExt}}^i_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, \Theta(F)) \simeq H^i(\Theta^2(F)) \;,$$

et le terme de droite est isomorphe au foncteur $L_{2d-i}F(-, 2)$.

théorème 11.12, il suffit donc de construire une équivalence d'homotopie $\widetilde{\Theta}(C)[-d] \to L_{K(1)}C$ naturelle en C.

L'opérateur $\widetilde{\Theta}$ ne dépend pas de la résolution projective P à une équivalence d'homotopie près. On peut donc supposer que l'on a pris pour P la résolution projective explicite (7.6) décrite à la section 7.2.3. D'après l'exemple 11.6, cette résolution est donnée par

$$P \simeq (\mathcal{N}S^d_{K(1)})^\sharp[d] \simeq (\mathcal{N}'\Gamma^{d,K(1)})[d] ,$$

où $\mathcal{N}'$ désigne les cochaînes normalisées de l'objet cosimplicial $\Gamma^{d,K(1)}$. On a alors une chaîne d'isomorphismes naturels en C :

$$\begin{aligned} L_{K(1)}C &= \mathrm{Tot}\,(\mathcal{N}C_{K(1)}) \\ &\simeq \mathrm{Tot}\,\Big(\mathcal{N}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Gamma^d, C_{K(1)})\Big) \qquad \text{par Yoneda} \\ &\simeq \mathrm{Tot}\,\Big(\mathcal{N}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Gamma^{d,K(1)}, C)\Big) \qquad \text{par adjonction} \\ &= \mathrm{Tot}\,\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}((\mathcal{N}'\Gamma^{d,K(1)}), C)\Big) \\ &= \mathrm{Tot}\,\Big(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(P[-d], C)\Big) \\ &= \widetilde{\Theta}(C)[-d] . \end{aligned}$$

Le théorème 11.12 est donc démontré. □

L'intérêt du théorème 11.12 réside dans ses nombreuses applications potentielles. En effet, les techniques simpliciales disponibles du coté des foncteurs dérivés n'ont pas vraiment d'analogue du coté de la théorie des représentations de GL_n, et inversement les techniques de théorie des représentations (catégories de plus haut poids, théorie des blocs) n'ont pas d'équivalent du coté des foncteurs dérivés. Un échantillon d'applications est donné dans [6, Section 6]. Nous reprenons et développons certaines de ces applications dans la suite. Comme première application, nous donnons une nouvelle mise en forme de la démonstration de [Kra, Thm 4.9].

Proposition 11.13. *La dualité de Ringel est une équivalence de catégories.*

Démonstration. On utilise la version dérivée du produit monoïdal $\bullet : \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \times \mathcal{P}_{d,\Bbbk} \to \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$. Nous montrons que l'inverse de Θ est donné par le foncteur

$$\Lambda^d \bullet^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) \to \mathbf{D}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk}) .$$

Notons P une résolution projective finie de Λ^d. On un zigzag de quasi-isomorphismes $\mathcal{N}P_{K(1)}[d] \to \mathcal{N}(\Lambda^d_{K(1)})[d] \leftarrow \Gamma^d$ donc une équivalence d'homotopie $\mathcal{N}P_{K(1)}[d] \to \Gamma^d$. Si C est un complexe de foncteurs strictement polynomiaux, alors d'après le théorème 11.12, $\Lambda^d \bullet^{\mathbf{L}} \Theta(C)$ est quasi-isomorphe au complexe

$$P \bullet (\mathcal{N}C_{K(1)}[d]) = \mathcal{N}(P \bullet C)_{K(1)}[d] \simeq (\mathcal{N}P_{K(1)}[d]) \bullet C .$$

Le dernier complexe est homotopiquement équivalent à $\Gamma^d \bullet C \simeq C$. On a donc démontré que $\Lambda^d \bullet^{\mathbf{L}} -$ est un inverse à gauche de Θ. On démontre de la même façon que c'est un inverse à droite. $\square$

11.4 Application à l'étude des foncteurs composés

Dans cette section nous nous concentrons sur l'application du théorème 11.12 à l'étude des foncteurs composés. En particulier nous obtenons un résultat de connexité originalement dû à Curtis dans le corollaire 11.19 et une obstruction à l'existence de bonnes filtrations sur les pléthysmes dans le corollaire 11.22. Nous renvoyons à l'article [6] pour d'autres applications (calculs concrets, résultats d'annulation de foncteurs dérivés provenant de la théorie des blocs de $\mathcal{P}_{\Bbbk}$, etc.).

Pour l'étude des foncteurs composés, nous aurons besoin des deux énoncés techniques suivants. Deux foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux $F, F' \in s\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ sont *faiblement équivalents* si on a un isomorphisme $F \simeq F'$ dans $\mathrm{Ho}(s\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$, ou de manière équivalente s'il existe un zigzag d'équivalences faibles $F \leftarrow P \to G$. Si de plus $F, F' \in s\mathcal{P}^f_{d,\Bbbk}$, c'est à dire si F et F' prennent des valeurs projectives de type fini en chaque degré, alors on peut choisir $P \in s\mathcal{P}^f_{d,\Bbbk}$.

Lemme 11.14. *[6, Lm 6.11] Soient $F, F' \in s\mathcal{P}^f_{d,\Bbbk}$ deux foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux faiblement équivalents. Alors pour tout foncteur strictement polynomial G, les foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux $G \circ F$ et $G \circ F'$ sont faiblement équivalents.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer que si un morphisme $f : P \to F$ dans $s\mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ est une équivalence faible (avec P_i prenant des valeurs $\Bbbk$-projectives en chaque degré i) alors $G(f)$ est une équivalence faible. Pour cela il nous suffit de vérifier que pour tout $\Bbbk$-module projectif de type fini V, le morphisme $\pi_* G(f_V) : \pi_* G(P(V)) \to \pi_* G(F(V))$ est un isomorphisme. Mais $\mathcal{N} f_V : \mathcal{N}P(V) \to \mathcal{N}F(V)$ est un quasi-isomorphisme entre complexes de $\Bbbk$-modules projectifs, donc une équivalence d'homotopie. Donc f_V est une équivalence d'homotopie entre $\Bbbk$-modules simpliciaux (Note : bien que f_V soit naturelle en V, son inverse homotopique ne l'est pas nécessairement. Le morphisme $f : P \to F$ n'est donc pas nécessairement une équivalence d'homotopie). Ainsi, pour chaque V, le morphisme de $\Bbbk$-modules simpliciaux $G(f_V)$ est une équivalence d'homotopie, d'où le résultat. $\square$

On note $K(n)$ un $\Bbbk$-module simplicial satisfaisant les hypothèses du théorème 11.12, c'est à dire $\Bbbk$-projectif en chaque degré, tel que $\pi_i K(n) \simeq \Bbbk$ si $i = n$ et $\pi_i K(n) = 0$ sinon, et tel que $(\mathcal{N}K(n))_i = 0$ pour $i \gg 0$. Un tel $\Bbbk$-module simplicial est unique à homotopie près. L'énoncé suivant est extrait de la démonstration de [6, Thm 6.7].

Lemme 11.15. *Soit $n \geq 0$. Soit $F, F' \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ deux foncteurs strictement polynomiaux tels que $H^*(\Theta^n(F))$ est concentrée en degré k et $H^k(\Theta^n(F)) \simeq F'$. Alors pour tout $\Bbbk$-module simplicial $X \in s\mathrm{P}_\Bbbk$ les foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux $K(nd-k)\otimes F'_X$ et $F_{K(n)\otimes X}$ sont faiblement équivalents.*

Démonstration. Les complexes dont l'homologie est concentrée en un degré sont formels. D'après le théorème 11.12, l'hypothèse de l'énoncé est donc équivalente à l'existence d'un zigzag de quasi-isomorphismes $F'[-k+nd] \leftarrow Q \to \mathcal{N}F_{K(n)}$. D'après la formule explicite du foncteur $\mathcal{K}$, on a $\mathcal{K}(F'[k-nd]) \simeq \mathcal{K}(nd-k)\otimes F'$. En appliquant le foncteur $\mathcal{K}$ au zigzag précédent on obtient donc un zigzag d'équivalences faibles.

$$K(nd-k)\otimes F' \leftarrow \mathcal{K}(Q) \to F_{K(n)}$$

Si on paramétrise ce zigzag par X, les morphismes obtenus sont encore des équivalences faibles (par le théorème d'Eilenberg-Zilber et un argument de suites spectrales). On obtient donc le résultat voulu. □

On rappelle que pour toute partition λ on peut définir un foncteur de Schur S_λ (cf section 4.2.2). On note $W_\lambda = S_{\lambda^\sharp}$ le foncteur dual. Par exemple $S^d = S_{(d)}$, $\Lambda^d = S_{(1,\dots,1)} = W_{(1,\dots,1)}$ et $\Gamma^d = W_{(d)}$.

Théorème 11.16. *Soient S_{λ^i}, $1 \leq i \leq n$ des foncteurs de Schur indexés par des partitions λ^i de poids respectifs d_i. Soit $X \in s\mathrm{P}_\Bbbk$ un $\Bbbk$-module simplicial, $\Bbbk$ projectif de type fini en chaque degré et connexe. Alors le foncteur strictement polynomial simplicial*

$$F := (S_{\lambda^1}\circ\cdots\circ S_{\lambda^n})_X$$

a même type d'homotopie faible que le foncteur strictement polynomial simplicial (prendre la structure simpliciale diagonale)

$$F' := K(d_1)\otimes\left((W_{\widetilde{\lambda^1}})_{K(d_2-1)}\circ\cdots\circ(W_{\widetilde{\lambda^{n-1}}})_{K(d_n-1)}\circ(W_{\widetilde{\lambda^n}})_{\Omega X}\right)\ ,$$

où $\widetilde{\lambda^i}$ désigne la partition conjuguée de λ^i et $\Omega X := \mathcal{K}((\mathcal{N}X)[1])$.

Démonstration. La structure de catégorie de plus haut poids implique que pour tout corps $\Bbbk$, $\underline{\mathrm{Ext}}^{>0}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(\Lambda^d, S_\lambda) = 0$. Par changement de base, on déduit que cette annulation est valable sur tout anneau $\Bbbk$. Un calcul élémentaire [6, Lm 6.3] montre que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_\Bbbk}(\Lambda^d, S_\lambda) = W_{\widetilde{\lambda}}$. On a donc

$$H_*(\Theta(S_\lambda)) = H_0(\Theta(S_\lambda)) \simeq W_{\widetilde{\lambda}}\ .$$

D'après les lemmes 11.14 et 11.15, on en conclut que si G est un foncteur strictement polynomial, G' un foncteur strictement polynomial simplicial et

λ est une partition de poids d, alors pour tout $k \geq 0$ les foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux

$$G \circ (S_\lambda)_{K(1)} \circ (K(k-1) \otimes G') \quad \text{et} \quad G_{K(d)} \circ W_{\widetilde{\lambda}} \circ (K(k-1) \otimes G')$$

(munis des structures simpliciales diagonales) ont même type d'homotopie faible. On observe que ces foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux peuvent se réécrire sous les formes respectives :

$$(i)\ G \circ (S_\lambda)_{K(k)} \circ G' \quad \text{et} \quad (ii)\ G_{K(d)} \circ (W_{\widetilde{\lambda}})_{K(k-1)} \circ G' \ .$$

Pour démontrer que F et F' ont même type d'homotopie faible, on applique à répétition le fait que les foncteurs du type (i) et (ii) ont même type d'homotopie faible. De façon plus précise, on a une équivalence d'homotopie $X \simeq K(1) \otimes \Omega X$. Le foncteur strictement polynomial simplicial F a donc même type d'homotopie faible que le foncteur

$$(S_{\lambda^1} \circ \cdots \circ S_{\lambda^{n-1}})_{K(d_n)} \circ (W_{\widetilde{\lambda^n}})_{\Omega X}$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$(S_{\lambda^1} \circ \cdots \circ S_{\lambda^{n-2}}) \circ (S_{\lambda^{n-1}})_{K(d_n)} \circ (W_{\widetilde{\lambda^n}})_{\Omega X} \ .$$

On itère ensuite $n-1$ fois ce raisonnement. La i-ième itération agit sur le terme $S_{\lambda^{n-i-1}} \circ (S_{\lambda^{n-i}})_{K(d_{n-i+1})}$ et le transforme en un terme $(S_{\lambda^{n-i-1}})_{K(d_i)} \circ (W_{\widetilde{\lambda^{n-i}}})_{K(d_{n-i+1}-1)}$. On obtient ainsi le résultat. □

Deux foncteurs strictement polynomiaux simpliciaux F et F' faiblement équivalents ont des groupes d'homotopie isomorphes. Le corollaire suivant s'obtient donc à partir du cas $n=1$, $X = K(1) \otimes K(n)$ du théorème 11.16. L'énoncé généralise un résultat de Bott [Bot] (qui a démontré le cas où $\Bbbk$ est un corps de caractéristique nulle). Il généralise également également les formules de décalage usuelles de Quillen [Qui2] et Bousfield [Bou] (qui correspondent aux partitions $\lambda = (d)$ et $\lambda = (1, \dots, 1)$).

Corollaire 11.17. *[6, Prop 6.4] Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. et soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une partition de poids $\sum \lambda_i = d$. Pour tout $n \geq 0$ et tout i, on a un isomorphisme de foncteurs strictement polynomiaux*

$$L_{i+d} S_\lambda(V, n+1) \simeq L_i W_{\widetilde{\lambda}}(V, n) \ .$$

Une autre application du théorème 11.16 concerne la connexité des foncteurs dérivés des composées de foncteurs de Schur.

Corollaire 11.18. *Si $X \in s\mathrm{P}_\Bbbk$ est m-connexe (pour $m \geq 0$) alors le foncteur F du théorème 11.16 est $(m + \sum_{i=1}^n (d_i - 1))$-connexe.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour F'. Dans ce cas, le résultat découle du théorème d'Eilenberg-Zilber et du fait suivant. Si C est un bicomplexe n-connexe pour la différentielle horizontale et m-connexe pour la différentielle verticale, alors le complexe total est $(n+m+1)$-connexe. □

Notons $\mathcal{L}^d$ la partie homogène de poids d de l'algèbre de Lie libre. On obtient en particulier le résultat suivant, qui joue un rôle important dans démonstration de la convergence de la suite spectrale de Curtis [Cur].

Corollaire 11.19. *[Cur, (1.2)] Si $X \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$ est m-connexe, alors $\mathcal{L}^d(X)$ est $(m + \lfloor \log_2(d) \rfloor)$-connexe, où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a.*

Démonstration. Le foncteur $\mathcal{L}^d$ est filtré, et le gradué associé est une somme directe finie de composées de foncteurs de Schur. Pour montrer la connexité de $\mathcal{L}^d(X)$, il suffit de montrer que l'évaluation de ces foncteurs composés sur X produit un $\Bbbk$-module simplicial de la connexité demandée. D'après le corollaire 11.18, la connexité du $\Bbbk$-module simplicial

$$(S_{\lambda^1} \circ \cdots \circ S_{\lambda^n})(X)$$

est $m + \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$, où d_i est le poids de λ^i. Mais on a $d = \prod d_i$, et pour tout entier $r \geq 1$, on a $r - 1 \geq \log_2(r)$. On a donc

$$m + \sum_{i=1}^n (d_i - 1) \geq m + \sum_{i=1}^n \log_2(d_i) = m + \log_2(d) \ .$$

On obtient bien la connexité désirée. □

La démonstration du théorème suivant utilise l'interprétation en termes de foncteurs dérivés de Θ^n. Elle est similaire à celle du théorème 11.16 (on remplace un foncteur de Schur par un foncteur G vérifiant des hypothèses analogues).

Théorème 11.20. *[6, Thm 6.7] Soit $\Bbbk$ un anneau commutatif. Soit $n \geq 1$ et $G \in \mathcal{P}_{d,\Bbbk}$ un foncteur strictement polynomial satisfaisant les conditions suivantes.*

(i) Les valeurs du foncteur G sont $\Bbbk$-projectives.

(ii) On a $H^{>0}(\Theta^n(G)) = 0$ et les valeurs de $H^0(\Theta^n(G))$ sont des $\Bbbk$-modules projectifs.

Alors pour tout $F \in \mathrm{P}_{e,\Bbbk}$, on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée :

$$\Theta^n(F \circ G) \simeq \Theta^{nd}(F) \circ H^0(\Theta^n(G)) \ .$$

Donnons quelques cas d'application du théorème. Si $n = 1$, les foncteurs G admettant une filtration de Schur (i.e une filtration dont le gradué associé est un somme directe de foncteurs de Schur) vérifient les conditions du théorème. Si $n = 2$, les foncteurs S^d_V vérifient les conditions du théorème. Enfin, les facteurs directs de $\otimes^d$ vérifient les conditions du théorème pour tout $n \geq 1$. En particulier on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 11.21. *[6, Cor 6.8] Soit $\Bbbk$ un corps. Soit λ une partition de poids d. Pour tout $F \in \mathcal{P}_{e,\Bbbk}$, on a des isomorphismes de foncteurs strictement polynomiaux gradués, naturels en F :*

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{de,\Bbbk}}(\Lambda^{de}, F \circ \otimes^d) &\simeq H^*(\Theta^d F) \circ \otimes^d \ ,\\
\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{de,\Bbbk}}(\Lambda^{de}, F \circ S_\lambda) &\simeq H^*(\Theta^d F) \circ W_{\widetilde{\lambda}} \ ,\\
\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{de,\Bbbk}}(S^{de}, F \circ \otimes^d) &\simeq H^*(\Theta^{2d} F) \circ \otimes^d \ ,\\
\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathcal{P}_{de,\Bbbk}}(S^{de}, F \circ S^d) &\simeq H^*(\Theta^{2d} F) \circ \Gamma^d \ .
\end{aligned}$$

Mentionnons pour finir une application concrète du corollaire 11.21. Le fait suivant était soupçonné par Boffi [Bof]. Rappelons qu'une bonne filtration d'un foncteur strictement polynomial F est une filtration dont le gradué associé est une somme directe de foncteurs de Schur.

Corollaire 11.22. *[6, Cor 6.10] Soit $\Bbbk = \mathbb{Z}$. Les foncteurs $S^k \circ S^d$ et $S^k \circ \Lambda^d$, pour $k \geq 2$ et $d \geq 3$ n'admettent pas de bonne filtration.*

Démonstration. Si on avait une telle filtration, alors d'après la structure de catégorie de plus haut poids on aurait l'annulation

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{>0}_{\mathcal{P}_{de,\Bbbk}}(\Lambda^{dk}, S^k \circ S^d) = 0 \ .$$

Montrons qu'un telle annulation est impossible. D'après le corollaire 11.21, on aurait une annulation de $H^*(\Theta^d(S^k))$ en degré non nuls. D'après le théorème 11.12 on aurait donc une annulation de $L_*S^k(A,d)$ en degrés différents de dk. Par théorème des coefficients universels on aurait donc une annulation de $L_*S^k_{\mathbb{F}_p}(A \otimes \mathbb{F}_p, d)$ en degrés différents de dk. Mais $L_*S^k(A,d)$ s'identifie à la partie de poids k de l'homologie de la construction bar $\overline{B}^d(S_{\mathbb{F}_p}(A \otimes \mathbb{F}_p))$. Si $p = 2$, cette homologie est non nulle en degrés différents de dk d'après le théorème 10.18. □

11.5 Produits

Soit $X \in s\mathrm{P}_\Bbbk$. Considérons les restrictions des opérateurs L_X et Θ à la catégorie $\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ des complexes bornés supérieurement, c'est à dire des complexes C tels que $C^i = 0$ pour $i \gg 0$ ou de manière équivalente, $C_i = 0$ pour $i \ll 0$. Les foncteurs L_X et Θ sont définis pour tout d, ils s'étendent par additivité en des foncteurs triangulés

$$L_X, \Theta \ : \ \mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk) \to \mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk) \ .$$

On définit également un foncteur

$$\Sigma : \mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk) \to \mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk) \ ,$$

dont la restriction à chaque $\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ est égale à la suspension $[-d]$.

Le théorème 11.12 implique que les foncteurs triangulés $L_{K(n)}$ et $(\Sigma\circ\Theta)^n$ sont isomorphes. Dans l'article [6] on étudie la compatibilité de cet isomorphisme avec les produits tensoriels. De façon précise, le produit tensoriel fournit un produit monoïdal symétrique sur $\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk)$

$$-\otimes^{\mathbf{L}} - : \mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk)\times\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk)\to\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk)\ ,$$

dont l'unité est le complexe composé du foncteur constant $\Bbbk$ concentré en degré 0. Le produit tensoriel dérivé est un foncteur triangulé en chaque variable, et le diagramme suivant (dont les flèches sont les isomorphismes canoniques) commute à un signe (-1) près :

$$\begin{tikzcd}
(C[1])\otimes^{\mathbf{L}}(D[1]) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & (C\otimes^{\mathbf{L}}(D[1]))[1] \arrow[d, "\simeq"] \\
((C[1])\otimes^{\mathbf{L}} D)[1] \arrow[r, "\simeq"] & (C\otimes^{\mathbf{L}} D)[2]
\end{tikzcd}\ .$$

La catégorie $\mathbf{D}(\mathcal{P}_\Bbbk)$ est donc une catégorie tensorielle triangulée [Bal].

Nous définissons maintenant une structure de foncteur monoïdal sur L_X. Soient X et Y sont deux $\Bbbk$-modules simpliciaux, dont on note $\mathcal{C}X$ et $\mathcal{C}Y$ les chaînes non normalisées. On a une équivalence d'homotopie

$$\nabla : (\mathcal{N}X)\otimes(\mathcal{N}Y)\subset(\mathcal{C}X)\otimes(\mathcal{C}Y)\to\mathcal{C}(X\otimes Y)\twoheadrightarrow\mathcal{N}(X\otimes Y)$$

naturelle en X,Y, fournie par les shuffles [McL2, VIII Thm 8.8]. Plus généralement, soient X et Y deux objets bigradués, munis d'une différentielle agissant sur le premier indice, et d'une structure simpliciale agissant sur le deuxième indice. On munit l'objet bigradué $(X\otimes Y)_{k,\ell}=\bigoplus_{i+j=k}X_{i,\ell}\otimes Y_{j,\ell}$ de la structure simpliciale diagonale (agissant sur le deuxième indice) et de la différentielle ∂ qui envoie un élément $x\otimes y$ de $X_{i,k}\otimes Y_{j,\ell}$ sur l'élément

$$\partial(x\otimes y)=(\partial_X x)\otimes y+(-1)^i x\otimes\partial_Y(y)\ .$$

On définit alors un morphisme de complexes de chaînes, naturel en X,Y :

$$\overline{\nabla} : \mathrm{Tot}\,(\mathcal{N}X)\otimes\mathrm{Tot}\,(\mathcal{N}Y)\to\mathrm{Tot}\,\mathcal{N}(X\otimes Y)$$

qui envoie un élément $x\otimes y\in X_{i,k}\otimes\otimes Y_{j,\ell}$ sur $(-1)^{kj}\nabla(x\otimes y)$. En particulier pour $X\in s\mathrm{P}_\Bbbk$ on a un morphisme de complexes, naturel en $C,D\in\mathrm{Ch}(\mathcal{P}_\Bbbk)$:

$$\overline{\nabla} : (L_X C)\otimes(L_Y D)\to L_X(C\otimes D)\ .$$

Notons $\Bbbk$ le foncteur constant considéré comme un complexe de foncteurs strictement polynomiaux concentré en degré 0. On remarque que $L_X(\Bbbk)=\mathcal{N}(\Bbbk_X)=\Bbbk$. Le résultat suivant est une application du théorème d'Eilenberg-Zilber.

Proposition 11.23. *[6, Prop 4.6, Thm 4.7] Soit $X \in s\mathrm{P}_{\Bbbk}$. Le foncteur*

$$(L_X, \overline{\nabla}, \mathrm{Id}) : (\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_{\Bbbk}), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk) \to (\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_{\Bbbk}), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk)$$

est un foncteur monoïdal symétrique (triangulé). De plus, les foncteurs monoïdaux symétriques triangulés $L_X \circ L_Y$ et $L_{X\otimes Y}$ sont isomorphes.

Esquisse de démonstration. La démonstration est donnée dans [6] pour $X = K(n)$ et $Y = K(m)$, mais elle s'applique à X et Y quelconques. Pour la deuxième partie de l'énoncé, on observe que $L_X \circ L_Y(C)$ est le complexe total du tricomplexe $\mathcal{N}(\mathcal{N}((C_i)_{X_j})_{Y_k})$, alors que le complexe $L_{X\otimes Y}(C)$ est le complexe total du bicomplexe $\mathcal{N}(C_i)_{X_j\otimes Y_j}$. On définit donc $\zeta : L_X \circ L_Y(C) \to L_{X\otimes Y}(C)$ telle que la restriction de ζ en degré (i,j,k) est donnée par la formule usuelle des shuffles [McL2, VIII Thm 8.8]. C'est une équivalence d'homotopie par le théorème d'Eilenberg-Zilber. Il faut ensuite vérifier la commutativité de plusieurs diagrammes, dont le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(L_X L_Y C) \otimes (L_X L_Y D) \arrow[rr, "\zeta^{\otimes 2}"] \arrow[d, "\overline{\nabla}"] & & L_{X\otimes Y} C \arrow[dd, "\overline{\nabla}"] \\
L_X(L_Y C \otimes L_Y D) \arrow[d, "L_X(\overline{\nabla})"] & & \\
L_X L_Y (C \otimes D) \arrow[rr, "\zeta"] & & L_{X\otimes Y}(C \otimes D)
\end{tikzcd} .$$

La stratégie de la démonstration est celle du moindre effort. Comme tous les foncteurs commutent aux suspensions, il faut vérifier la commutativité pour C et D tels que $C_i = D_i = 0$ pour $i < 0$ (Note :on utilise ici de manière cruciale qu'on travaille avec des complexes tels que $C_i = 0$ pour $i \ll 0$). De tels complexes proviennent d'un foncteur strictement polynomial simplicial par la correspondance de Dold-Kan. On interprète donc le diagramme dans le monde simplicial, et la commutativité suit directement du théorème d'Eilenberg-Zilber. □

On peut aussi définir une structure de foncteur monoïdal sur Θ et Σ. Pour tout $C \in \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ et tout $D \in \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{e,\Bbbk})$ on définit un isomorphisme de complexes (le signe assure que c'est bien un morphisme de complexes) :

$$\begin{array}{cccc} \xi_{d,e} : & (C[-d])_i \otimes (D[-e])_j & \to & (C\otimes D)[-d-e]_{i+j} \\ & x \otimes y & \mapsto & (-1)^{e(i+d)} x \otimes y \end{array} .$$

Par additivité les $\xi_{d,e}$ définissent des isomorphismes naturels $\Sigma(C) \otimes \Sigma(D) \to \Sigma(C \otimes D)$. L'énoncé suivant découle directement de la définition.

Proposition 11.24. *Le triplet $(\Sigma, \xi, \mathrm{Id})$ définit un foncteur monoïdal (triangulé) de la catégorie $(\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_{\Bbbk}), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk)$.*

Pour définir la structure monoïdale de Θ, on fixe une résolution projective P^d de chaque puissance extérieure Λ^d. Pour tout $C \in \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{d,\Bbbk})$ et $D \in \mathrm{Ch}(\mathcal{P}_{e,\Bbbk})$ la composée suivante définit un morphisme $\square_{d,e} : \Theta(C) \otimes \Theta(D) \to \Theta(C \otimes D)$ naturel en C, D :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d,\Bbbk}}(P^d, C) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{e,\Bbbk}}(P^e, D) \xrightarrow{\otimes} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d+e,\Bbbk}}(P^d \otimes P^e, C \otimes D)\\ \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_{d+e,\Bbbk}}(P^{d+e}, C \otimes D) .\end{aligned}$$

où le deuxième morphisme est induit par une application relevant la comultiplication $\Lambda^{d+e} \to \Lambda^d \otimes \Lambda^e$. Par additivité, les $\square_{d,e}$ définissent une transformation naturelle $\square : \Theta(C) \otimes \Theta(D) \to \Theta(C \otimes D)$. L'énoncé suivant est une vérification triviale (il sera renforcé au corollaire 11.27).

Lemme 11.25. *Le triplet* $(\Theta, \square, \mathrm{Id})$ *définit un foncteur monoïdal faible*[42] *(triangulé) de la catégorie* $(\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk)$.

On observe que ni Σ ni Θ ne sont des foncteurs monoïdaux *symétriques*, mais que leur composée $\Sigma \circ \Theta$ est bien un foncteur symétrique. On démontre ensuite l'énoncé suivant en reprenant la démonstration du théorème 11.12 en faisant attention aux signes.

Théorème 11.26. *[6, Thm 5.5] Les foncteurs monoïdaux triangulés*

$$(L_{K(n)}, \overline{\nabla}, \mathrm{Id}) \ , \ (\Sigma \circ \Theta, \square, \mathrm{Id})^{\circ n} : (\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk) \to (\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk)$$

sont isomorphes.

On peut donc utiliser les propriétés de $L_{K(1)}$ pour déduire une propriété importante de Θ.

Corollaire 11.27. *[6, Prop 3.3] Pour tout anneau commutatif* $\Bbbk$*, le triplet* $(\Theta, \square, \mathrm{Id})$ *définit un foncteur monoïdal (au sens fort, i.e.* $\square$ *est un isomorphisme) de* $(\mathbf{D}_+(\mathcal{P}_\Bbbk), \otimes^{\mathbf{L}}, \Bbbk)$.

[42] Foncteur « lax monoidal »en anglais.

Table des matières

Bibliographie

[Akin] K. Akin, Extensions of symmetric tensors by alternating tensors. J. Algebra 121 (1989), no. 2, 358–363.

[ABW] K. Akin, D. A. Buchsbaum, J. Weyman, Schur functors and Schur complexes. Adv. in Math. 44 (1982), no. 3, 207–278.

[AB2] K. Akin, D. A. Buchsbaum, Characteristic-free representation theory of the general linear group. II. Homological considerations. Adv. in Math. 72 (1988), no. 2, 171–210.

[AJ] H.H. Andersen, J.C. Jantzen, Cohomology of induced representations for algebraic groups. Math. Ann. 269 (1984), no. 4, 487–525.

[AJS] H. H. Andersen, J. C. Jantzen, W. Soergel, Representations of quantum groups at a pth root of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p. Astérisque No. 220 (1994).

[Bal] P. Balmer, Tensor triangular geometry. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, 85–112, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Bue] T. Bühler, Exact Categories, Expositiones Mathematicae 28 (2010) 1–69, doi : 10.1016/j.exmath.2009.04.004

[Bof] G. Boffi, On some plethysms. Adv. Math. 89 (1991), no. 2, 107–126.

[Bot] R. Bott, On the Chern-Weil homomorphism and the continuous cohomology of Lie-groups. Advances in Math. 11 (1973), 289–303.

[Bor1] A. Borel, Linear algebraic groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bor2] A. Borel, Essays in the history of Lie groups and algebraic groups. History of Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI ; London Mathematical Society, Cambridge, 2001. xiv+184 pp.

[Bou] A.K. Bousfield, Homogeneous functors and their derived functors, Brandeis University (1967).

[BM] L. Breen, R. Mikhailov, Derived functors of non-additive functors and homotopy theory, Algebr. and Geom. Topology 11, 327-415 (2011) `arXiv 0910.2817`

[Car] H. Cartan, Séminaire Henri Cartan de l'École Normale supérieure, 1954/1955. Algèbres d'Eilenberg Mac Lane et homotopie, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1955 (French). Available online : www.numdam.org

[Cha1] M. Chałupnik, Extensions of strict polynomial functors. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 5, 773–792.

[Cha2] M. Chałupnik, Koszul duality and extensions of exponential functors. Adv. Math. 218 (2008), no. 3, 969–982.

[Cha3] M. Chałupnik, Derived Kan Extension for strict polynomial functors, `arXiv 1106.3362`. Nouvelle version en préparation.

[Che1] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie : groupes algébriques, théorèmes généraux sur les algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1968. (réédition de Théorie des groupes de Lie, II-III, Actualités Sci. Ind. 1152 et 1226, Hermann & Cie, Paris)

[Che2] C. Chevalley, Classification des groupes algébriques semi-simples. Collected works. Vol. 3. Edité par et avec une préface de P. Cartier. Avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck et M. Lazard. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[CPS] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Detecting rational cohomology of algebraic groups, J. London Math. Soc. (2) 28 (1983), no. 2, 293–300.

[CPS2] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Finite-dimensional algebras and highest weight categories. J. Reine Angew. Math. 391 (1988), 85–99.

[CPS3] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Integral and graded quasi-hereditary algebras. I. J. Algebra 131 (1990), no. 1, 126–160.

[Con] B. Conrad, Reductive group schemes (notes for "SGA3 summer school"). *http ://math.stanford.edu/ conrad/papers/luminysga3smf.pdf*

[Cur] E. Curtis, Some relations between homotopy and homology. Ann. of Math. (2) 82 1965 386–413.

[Day] B. Day, On closed categories of functors. 1970 Reports of the Midwest Category Seminar, IV pp. 1–38 Lecture Notes in Mathematics, Vol. 137 Springer, Berlin.

[DCP] C. de Concini, C .Procesi, A characteristic free approach to invariant theory. Advances in Math. 21 (1976), no. 3, 330–354.

[CPSvdK] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, W. van der Kallen, Rational and generic cohomology. Invent. Math. 39 (1977), no. 2, 143–163.

[Dja] A. Djament, Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. J. K-Theory 10 (2012), no. 1, pp 87–139.

[DV] A. Djament, C. Vespa, Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. (French) [Homology of orthogonal and symplectic groups with twisted coefficients] Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 43 (2010), no. 3, 395–459.

[Do] A. Dold, Homology of symmetric products and other functors of complexes. Ann. of Math. (2) 68 1958 54–80.

[DP] A. Dold, D. Puppe, Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier Grenoble 11 1961 201–312.

[Don1] S. Donkin, Blocks of rational representations of a semisimple algebraic group. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 3 (1980), no. 2, 867–869.

[Don2] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras. I. J. Algebra 104 (1986), no. 2, 310–328.

[Don3] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras. II. J. Algebra 111 (1987), no. 2, 354–364.

[Don4] S. Donkin, On tilting modules for algebraic groups. Math. Z. 212 (1993), no. 1, 39–60.

[Don5] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras. IV. The blocks of the Schur algebras. J. Algebra 168 (1994), no. 2, 400–429.

[Dot] S. Doty, Schur-Weyl duality in positive characteristic. Representation theory, 15–28, Contemp. Math., 478, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[ERZ] S. Eilenberg A. Rosenberg, D. Zelinsky, On the dimension of modules and algebras. VIII. Dimension of tensor products. Nagoya Math. J. 12 1957 71–93.

[EML1] S. Eilenberg, S. MacLane, On the groups $H(\Pi, n)$. I. Ann. of Math. (2) 58, (1953). 55–106.

[EML2] S. Eilenberg, S. MacLane, On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. Ann. of Math. (2) 60, (1954). 49–139.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Eve] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224–23.

[FF] V. Franjou, E. Friedlander, Cohomology of bifunctors. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 97 (2008), no. 2, 514–544.

[FFSS] V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 2, 663–728.

[FLS] V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, Autour de la cohomologie de MacLane des corps Finis, Invent. Math. 115 (1994), 513–538.

[FvdK] V. Franjou, W. van der Kallen, Power reductivity over an arbitrary base. Doc. Math. 2010, Extra volume : Andrei A. Suslin sixtieth birthday, 171–195.

[FP] V. Franjou, T. Pirashvili, On the Mac Lane cohomology for the ring of integers, Topology 37 (1998), no. 1, p. 109–114.

[F] E. Friedlander, Support varieties for rational representations, preprint.

[FS] E. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field, Invent. Math. 127 (1997) 209–270.

[FH] W. Fulton, J. Harris, Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[FMT] Y. Félix, L. Menichi, J.-C. Thomas, Gerstenhaber duality in Hochschild cohomology. J. Pure Appl. Algebra 199 (2005), no. 1-3, 43–59.

[FHT] Y. Félix, S. Halperin, J.C. Thomas, Rational homotopy theory. Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Gab] Gabriel, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90 1962 323–448.

[Gre] J. A. Green, Polynomial representations of GL_n. Lecture Notes in Mathematics, 830. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[Gro] F. D. Grosshans, Algebraic homogeneous spaces and invariant theory, Lecture Notes in Mathematics, 1673. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Hab] W. J. Haboush, Reductive groups are geometrically reductive. Ann. of Math. (2) 102 (1975), no. 1, 67–83.

[HLS] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. Amer. J. Math. 115 (1993), no. 5, 1053–1106.

[Hil2] D. Hilbert, Ueber die vollen Invariantensysteme. Math. Ann. 42 (1893), no. 3, 313–373.

[Hum] J. Humphreys, Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[Hum2] J. Humphreys, Modular representations of finite groups of Lie type. London Mathematical Society Lecture Note Series, 326. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xvi+233 pp. ISBN : 978-0-521-67454-6 ; 0-521-67454-9

[Jam] G. D. James, The representation theory of the symmetric groups. Lecture Notes in Mathematics, 682. Springer, Berlin, 1978.

[Jan] J. C. Jantzen, Representations of algebraic groups. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Jan2] J. C. Jantzen, Character formulae from Hermann Weyl to the present. Groups and analysis, 232–270, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 354, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[JP] M. Jibladze, T. Pirashvili, Cohomology of algebraic theories. J. Algebra 137 (1991), no. 2, 253–296.

[vdK1] W. van der Kallen, Cohomology with Grosshans graded coefficients, In : Invariant Theory in All Characteristics, Edited by : H. E. A. Eddy Campbell and David L. Wehlau, CRM Proceedings and Lecture Notes, Volume 35 (2004) 127-138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[vdK2] W. van der Kallen, A reductive group with finitely generated cohomology algebras. Algebraic groups and homogeneous spaces, 301–314, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.

[vdK3] W. van der Kallen, An integrality theorem of Grosshans over arbitrary base ring, Transform Groups (2014) Volume 19, Issue 1, pp. 283-287.

[vdK4] Lectures on bifunctors and finite generation of rational cohomology algebras, `ArXiv :1208.3097v4`

[Kel] B. Keller, Derived categories and their uses. Handbook of algebra, Vol. 1, 671–701, North-Holland, Amsterdam, 1996.

[Kra] H. Krause, Koszul, Ringel and Serre Duality for strict polynomial functors, Compos. Math. 149 (2013), no. 6, 996–1018.

[LV] J.L. Loday, B. Valette, Algebraic operads, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 346, Springer-Verlag (2012).

[Lus] G. Lusztig, Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups. The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), pp. 313–317, Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.

[McD] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[McL] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.

[McL2] S. Mac Lane, Homology. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Mar] S. Martin, Schur algebras and representation theory. Cambridge Tracts in Mathematics, 112. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Mat] O. Mathieu, Filtrations of G-modules. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 23 (1990), no. 4, 625–644.

[Mit] B. Mitchell, Rings with several objects. Advances in Math. 8, 1–161. (1972).

[Mum] D. Mumford, Geometric invariant theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34 Springer-Verlag, Berlin-New York 1965 vi+145 pp.

[Nag] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1963/1964), 369–377.

[Pir] T. Pirashvili, Introduction to functor homology. Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology, 1–26, Panor. Synthèses, 16, Soc. Math. France, Paris, 2003.

[PW] T. Pirashvili, F. Waldhausen, Mac Lane homology and topological Hochschild homology. J. Pure Appl. Algebra 82 (1992), no. 1, 81–98.

[Pop] V. L. Popov, On Hilbert's theorem on invariants. (Russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 249 (1979), no. 3, 551–555. Traduit dans Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 1318–1322.

[Qui1] D. Quillen, Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967.

[Qui2] D. Quillen, On the (co-)homology of commutative rings, in Applications of Categorical Algebra, Proc. Symp. Pure Math. 17 (1970), 65–87.

[Qui3] D. Quillen, Higher algebraic K-theory. I. Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin 1973.

[Rin] C. M. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences. Math. Z. 208 (1991), no. 2, 209–223.

[Rob] N. Roby, Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 80 1963 213–348.

[Ros] M. Rosenlicht, Some rationality questions on algebraic groups. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 43 (1957), 25–50.

[Sch] I. Schur, Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe, 1927, in Gesammelte Abhandlungen. Vol III (eds. Alfred Brauer und Hans Rohrbach) Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, pp. 68–85.

[Sco] A. Scorichenko, Stable K-theory and Functor Homology over a Ring, Thèse, Evanston, 2000.

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck, Schémas en groupes (SGA 3) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962-1964, nouv. édition in Documents mathématiques 7 et 8 (2011).

[Spr] T. A. Springer, Linear algebraic groups. Reprint of the 1998 second edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[SvdK] V. Srinivas, W. van der Kallen, Finite Schur filtration dimension for modules over an algebra with Schur filtration, Transform. Groups 14 (2009), no. 3, 695–711.

[SFB] A. Suslin, E. Friedlander, C. Bendel, Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology. J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no. 3, 693–728.

[Sym] P. Symonds, On the Castelnuovo-Mumford regularity of the cohomology ring of a group. J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 1159–1173.

[Tot] B. Totaro, Projective resolutions of representations of GL(n). J. Reine Angew. Math. 482 (1997), 1–13.

[Tr] A. Troesch, Une résolution injective des puissances symétriques tordues. (French) [Injective resolution of twisted symmetric powers] Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no. 5, 1587–1634.

[Wat1] W. C. Waterhouse, Introduction to affine group schemes, Graduate Texts in Mathematics, 66. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[Wat2] W. C. Waterhouse, Geometrically reductive affine group schemes, Arch. Math. 62 (1994), 306–307.

[Wei] C. Weibel, An introduction to homological algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Wey] H. Weyl, The classical groups. Their invariants and representations. Fifteenth printing. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

[Wil] G. Williamson, Schubert calculus and torsion, ArXiv 1309.5055.

[Wils] R. Wilson, The finite simple groups. Graduate Texts in Mathematics, 251. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009.

[1] A. Touzé, Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007)

[2] A. Touzé, Universal classes for algebraic groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 219–249.

[3] A. Touzé, W. van der Kallen, Bifunctor cohomology and Cohomological finite generation for reductive groups, Duke Math. J. 151 (2010), no. 2, 251–278.

[4] A. Touzé, Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint, Adv. Math. 225 (2010) 33–68.

[5] A. Touzé, Troesch complexes and extensions of strict polynomial functors, Ann. Sci. E.N.S. 45 (2012), no. 1, 53–99.

[6] A. Touzé, Ringel duality and derivatives of non-additive functors. J. Pure Appl. Algebra 217 (2013), no. 9, 1642–1673.

[7] A. Touzé, A construction of the universal classes for algebraic groups with the twisting spectral sequence. Transform. Groups 18 (2013), no. 2, 539–556.

[8] A. Touzé, Bar complexes and extensions of classical exponential functors, accepté pour publication aux annales de l'institut Fourier. (arXiv :1012.2724)

[9] L. Breen, R. Mikhailov, A. Touzé, Derived functors of the divided powers, soumis (arXiv :1312.5676)

[10] A. Touzé, A functorial control of integral torsion in homology, soumis (arXiv :1310.2877)

[11] A. Touzé, Applications of functor (co)homology, in An Alpine Expedition through Algebraic Topology, Contemp. Math. 617, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[12] J. Hong, A. Touzé, O. Yacobi, Polynomial functors and categorifications of Fock space, soumis (arXiv :1111.5317).