Groupe de travail de topologie, S2 2022-2023 : *Théorie des 2-représentations des 2-groupes*

Ivo Dell'Ambrogio - February 3, 2023

Le but sera d'apprendre quelques notions basiques en théorie des 2-représentation des 2-groupes. Les *2-groupes* fournissent un modèle algébrique des 2-types d'homotopie connexes. On peut comprendre un 2-groupe de façon équivalente comme étant : un 2-groupoïde (strict ou faible) à un seul objet, un groupe catégorique (strict ou faible), un groupoïde monoïdal où tout objet admet un inverse bilatéral, ou un module croisé. Les 2-groupes admettent une jolie classification en termes de cohomologie des groupes. Une *2-représentation* est une action, dans un sens strict ou faible, d'un 2-groupe sur un objet d'une 2-catégorie suffisamment linéaire. Le plus souvent, on choisit la 2-catégorie **2Vect** des 2-espaces vectoriels (complexes et de dimension finie) de Kapranov-Voevodsky. Les 2-représentations d'un 2-groupe admettent aussi une classification cohomologique très générale relativement simple. Nous allons étudier la structure de la 2-catégorie $\mathbf{2Rep}_{\mathbb{C}}(\mathcal{G})$ des 2-représentations d'un 2-groupe $\mathcal{G}$. Par exemple, elle hérite de **2Vect** d'une structure symétrique monoïdale. De plus, la catégorie des endomorphismes de son objet unité (la 2-représentation triviale) s'identifie à la catégorie des représentation du groupe $\pi_1\mathcal{G}$, au sens usuel. Il y aussi une théorie des 2-caractères, un produit interne . . .

- Lieu : salle des séminaire du M3, 3ème étage (comme pour le séminaire du topologie)
- Les vendredis à 15h15 (après le séminaire de topologie)
- Durée de chaque exposé : 1h
- Références : [BM06], [Elg07a], [Elg07b], [GK08], [Bar11], . . .
- Notre référence principale est [Elg07a]. Ici, 2-groupe := catégorie monoïdale où tout est inversible, d'où les notations 'shiftées' $\pi_i \rightsquigarrow \pi_{i-1}$, $\mathrm{B}\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}[0]$, etc. De plus, ici tout est faible : 2-cat., 2-foncteur et transformation 2-naturelle := bicat., pseudo-foncteur et transformation pseudo-naturelle. Pour ses calcules, Elgueta utilise **2Mat** (introduit dans [Elg07b]), un modèle strict de la bicatégorie "de matrices" **2Vect** de Kapranov-Voevodsky.

Proposition d'exposés :

Exposé 1 : Les 2-catégories et les 2-groupoïdes

- **Date :** 17 février
- **Orateur :** Iacopo
- **Références :** on pourra copier-coller l'exposé de Kürsat du GT 2020 (on a les transparents :-P). Sinon, pour les bi-trucs : par exemple [JY20] (détaillé et élémentaire), [Lac10] (plus informel et complet), ou [BD20, App. A] (très compact mais avec plein de références).
- **Programme :**
  - Définition des 2-catégories, bicatégories. À un seul objet $\equiv$ catégorie monoïdale.
  - Théorème de cohérence / strictification.
  - Pseudo-foncteurs, 2-foncteurs (stricts), biéquivalences.
  - Définition d'un 2-groupoïde comme bicatégorie où tout 1- et 2-morphisme est inversible. Un 2-groupoïde stricte est un groupoïde enrichi dans les groupoïdes; et aussi, de façon équivalente, un objet groupe dans les catégories ("groupe catégorique").
  - Quelques exemples pertinents : Le 2-groupoïde de Picard (ou "core", sous-2-groupoïde maximal) d'une 2-catégorie. Le 2-groupe (= 2-groupoïde à un seul objet) des auto-équivalences $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{C}}(X)$ d'un objet X d'une 2-catégorie $\mathcal{C}$, et le 2-groupe fondamental d'un espace topologique pointé [Elg07a, §2.1]. Les 2-groupes $G[0]$ ("discret") et $A[1]$ associés à un groupe G et un groupe abélien A [Elg07a, Ex.2.2].

Exposé 2 : La classification cohomologique des 2-groupes

- **Date :** 3 mars
- **Orateur :** Alexis
- **Références :** [Elg07a, §2.4] (aussi : [JS86, Intro & §6] ou [BL04]).
- **Programme :**
  - La 2-catégorie **2Grp** des 2-groupes [Elg07a, §2.1].
  - À moins d'une équivalence, tout 2-groupe peut être strictifié ou squelettisé [Elg07a, Thm.2.5], mais pas les deux au même temps.
  - Énoncé de la classification ([Elg07a, Thm.2.6]), comme bijection entre : classes d'équivalence des 2-groupes $\leftrightarrow$ classes d'isomorphismes de triplets $(G, M, [\alpha])$ avec G un groupe, M un G-module, $[\alpha] \in H^3(G; M)$ une classe de cohomologie.
  - Pour la preuve, voir [JS86, §6], où en faite on montre l'existence d'une biéquivalence de bicatégories entre **2Grp** et une 2-catégorie $\mathcal{H}^3$ dont les objets sont les triplets (G, M, h) consistant d'un groupe G, un G-module M et un 3-cocycle normalisé $h\colon G^3 \to M$.
  - Expliquer la classification analogue des *1-morphismes* entre 2-groupes, en termes de 2-cochaînes normalisées [Elg07a, Thm.2.7].

Exposé 3 : Les 2-catégories linéaires et les 2-espaces vectoriels

- **Date :** 17 mars
- **Orateur :** Ivo
- **Références :** voir e.g. [BD20, App.A6 + A.7] pour les 1- et les 2-catégories additives.
- **Programme :**
  - Catégories K-linéaires (= enrichies sur $\operatorname{Mod} K$, où K est un anneau commutatif) et catégories additives (= $\mathbb{Z}$-linéaires et admettant les sommes directes finies). Les foncteurs additifs et K-linéaires. Noter que pour tout foncteur, 'K-linéaire $\Rightarrow$ additif'. La 2-catégorie $\mathbf{CAT}_K$ / $\mathbf{ADD}_K$ des catégories K-linéaires (/ et additives) et les foncteurs K-linéaires.
  - Les 2-catégories localement K-lin. / K-lin. et additives (= enrichies sur $\mathbf{CAT}_K$ / $\mathbf{ADD}_K$).
  - Sommes directes finies dans une (bi- ou) 2-catégorie (voir aussi [Del22b, §2])
  - La 2-catégorie stricte $\mathbf{2Vect}_K$, définie comme sous-2-catégories pleine de $\mathbf{CAT}_K$ des catégories linéaires équivalentes à Vect_K^n pour un $n \in \mathbb{N}$.
  - La bicatégorie $\mathbf{2Vect}_K^{\mathrm{KV}}$ de "matrices d'espaces vectoriels" de Kapranov-Voevodsky, et la biéquivalence $\mathbf{2Vect}_K \simeq \mathbf{2Vect}_K^{\mathrm{KV}}$ obtenue en "choisissant des bases".
  - La 2-catégorie des "2-matrices" d'Elgueta, $\mathbf{2Mat}_K$, et la biéquivalence $\mathbf{2Mat}_K \xrightarrow{\sim} \mathbf{2Vect}_K$ (voir [Elg07a, §4.2] ou [Elg07b]).

Exposé 4 : La classification générale des 2-représentations

- **Date :** 24 mars
- **Orateur :** Ouriel
- **Références :** [Elg07a, Thm. 5.5]
- **Programme :**
  - Définition de la 2-catégorie $\mathbf{2Rep}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G})$ des 2-représentations du 2-groupe $\mathcal{G}$ dans une 2-catégorie $\mathcal{C}$ quelconque [Elg07a, Def.3.1 + Prop.3.2].
  - La classification cohomologique des 2-représentations dans $\mathcal{C}$ quelconque [Elg07a, Prop.3.3].
  - Le cas $\mathcal{G} = G[0]$ où G est un groupe [Elg07a, §3.3].
  - Le cas $\mathcal{G} = A[1]$ où G est un groupe abélien [Elg07a, §3.4].
  - (La décomposition de Postnikov de $\mathbf{2Rep}_{\mathcal{C}}(\mathcal{G})$ [Elg07a, Thm.3.7].)

Exposé 5 : Les 2-représentations dans $\mathbf{2Vect}_K$ (dans les 2-matrices)

- **Date :** 31 mars
- **Orateur :** Nicola
- **Références :** [Elg07a, §5]
- **Programme :**
  - Classification à moins d'équivalence des 2-representations dans $\mathbf{2Mat}_K$ [Elg07a, Thm.5.5].
  - Les 2-représentations de dimension 1 ("caractères"), leur classification [Elg07a, §5.3].
  - L'équivalence entre la catégorie des endomorphismes de la 2-représentation triviale de dimension 1 et la catégorie des représentations usuelles $\mathrm{Rep}_K(\pi_1\mathcal{G})$; plus en général, description de la catégorie Hom entre deux caractères en termes de représentations projectives; voir [Elg07a, Thm.5.33].

Exposé 6 : Le produit tensoriel des 2-représentations

- **Date :** T.B.A.
- **Orateur :** T.B.A.
- **Références :** [BM06, §3], voir aussi [Del22a, Prop.3.11]
- **Programme :** [encore à préciser !]
  - Structure de 2-catégorie symétrique monoïdale : définition.
  - Le produit tensoriel dans **2Vect**.
  - Le produit tensoriel dans $\mathbf{2Rep}(\mathcal{G})$.

Exposé 7 : Théorie des 2-caractères ?

- **Date :** T.B.A.
- **Orateur :** T.B.A.
- **Références :** [GK08], [Bar11] ? . . . [encore à préciser !]
- **Programme :** [encore à préciser !]

Références

[Bar11] Bruce Bartlett. The geometry of unitary 2-representations of finite groups and their 2-characters. *Appl. Categ. Structures*, 19(1):175–232, 2011.

[BD20] Paul Balmer and Ivo Dell'Ambrogio. *Mackey 2-functors and Mackey 2-motives*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2020.

[BL04] John C. Baez and Aaron D. Lauda. Higher-dimensional algebra. V. 2-groups. *Theory Appl. Categ.*, 12:423–491, 2004. `https://arxiv.org/abs/math/0307200v3`.

[BM06] John W. Barrett and Marco Mackaay. Categorical representations of categorical groups. *Theory Appl. Categ.*, 16:No. 20, 529–557, 2006.

[Del22a] Ivo Dell'Ambrogio. Green 2-functors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(11):7783–7829, 2022.

[Del22b] Ivo Dell'Ambrogio. On Krull-Schmidt bicategories. *Theory Appl. Categ.*, 38:Paper No. 8, 232–256, 2022.

[Elg07a] Josep Elgueta. Representation theory of 2-groups on Kapranov and Voevodsky's 2-vector spaces. *Adv. Math.*, 213(1):53–92, 2007.

[Elg07b] Josep Elgueta. A strict totally coordinatized version of Kapranov and Voevodsky's 2-category 2Vect. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 142(3):407–428, 2007.

[GK08] Nora Ganter and Mikhail Kapranov. Representation and character theory in 2-categories. *Adv. Math.*, 217(5):2268–2300, 2008.

[JS86] André Joyal and Ross Street. Braided monoidal categories. Macquarie Mathematical Reports Nr. 860081. `http://web.science.mq.edu.au/~street/JS1.pdf`, 1986.

[JY20] Niles Johnson and Donald Yau. 2-Dimensional categories. `https://arxiv.org/abs/2002.06055`, 2020.

[Lac10] Stephen Lack. A 2-categories companion. In *Towards higher categories*, volume 152 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 105–191. Springer, New York, 2010. `https://arxiv.org/abs/math/0702535`.