# Groupe de travail de topologie, S1 2020-2021 : *Théorie de l'homotopie et catégories supérieures*

November 28, 2020

Le but de ce groupe de travail est de (commencer à) comprendre les idées profondes, et en partie encore conjecturales, qui relient l'homotopie des espaces et les catégories supérieures. Nous mettrons l'accent sur les cas en basse dimension qui sont déjà bien compris, et sur les liens avec la cohomologie. Notre référence principale est l'article de Baez et Shulman [BS07], ainsi que sa bibliographie annotée et quelques livres de texte standards.

- Lieu : salle des séminaire du M3, 3ème étage (comme pour le séminaire du topologie)
- Les vendredis à 15h30 (après le séminaire de topologie)
- Durée de chaque exposé : 1h
- Langue : français ou anglais selon la préférence de l'orateur

Exposés prévus (nous pourrons bien sûr adjuster ce programme le long du chemin) :

## Exposé 1 : Introduction et survol

- **Date :** 6 novembre
- **Orateur :** Ivo
- **Références :** [BS07, Ch. 1] (très soft : j'en suggère la lecture à tout le monde).
- **Programme :**
  - L'hypothèse d'homotopie : équivalence entre les ($n$-)types d'homotopie et les ($n$-)groupoïdes faibles.
  - La 'théorie de Galois' en version topologique: la classification des revêtements.
  - La formulation générale de Grothendieck: une $(n+1)$-équivalence entre les fibrations de $n$-groupoïdes sur une base $B$ et les $(n+1)$-foncteurs de $B$ dans les $n$-groupoïdes.

## Exposé 2 : Les $n$-types d'homotopie

- **Date :** 13 novembre
- **Oratrice :** Sophie
- **Références :** détaillées dans le programme (voir aussi [BS07, §2.3])
- **Programme :**
  - Localisation des catégories. La catégorie homotopique des espaces topologiques comme localisation par les équivalences faibles. (Si nécessaire [GZ67, Ch. 1.1] et [DS95, §6].)
  - Le théorème de Whitehead, la catégorie homotopique comme quotient de la catégorie des CW-complexes. [Hat02, Ch. 4.1]
  - Les $n$-types d'homotopie et les $n$-équivalences homotopiques faibles. (Si nécessaire [EDHP95])
  - L'équivalence entre 1-types et les groupoïdes, par le groupoïde fondamentale d'un espace et l'espace classifiant d'un groupoïde. ([And78, §5]; en alternative, réduire au cas connexe.)

## Exposé 3 : Revêtements et 1-groupoïdes

- **Date :** 20 novembre
- **Orateur :** Iacopo
- **Références :** [Hig05, §13], ou [May99, Ch. 3] (plus sport), [Bro06, Ch. 6 et 10] (plus relax).
- **Programme :**

- Revêtements d'un espace topologique $B$ et revêtements d'un groupoïde $G$.
- L'équivalence entre les revêtements de $B$ et ceux de son groupoïde fundamental $\Pi B$ (pour un espace $B$ pas trop sauvage).
- L'équivalence entre les revêtements d'un groupoïde (= 'fibrations discrètes') et ses représentations. (Cas $n = 0$ de l'équivalence de Grothendieck de l'Introduction.)
- En corollaire, le cas 'usuel' : la classification des revêtements connexes d'un espace connexe $B$ par les sous-groupes du groupe fondamentale de $B$.

## Exposé 4 : Définition des 2-groupoïdes

- **Date :** 27 novembre
- **Orateur :** Kürsat
- **Références :** par exemple [JY20] (détaillé et basique) ou [Lac10] (plus informel et complet).
- **Programme :**
  - Définition des 2-catégories, bicatégories, cohérence. À un seul objet $\equiv$ catégorie monoïdale.
  - Pseudo-foncteurs (lax), biéquivalence, strictification.
  - Définition d'un 2-groupoïde comme bicatégorie où tout 1- et 2-morphisme est inversible. Un 2-groupoïde stricte est un groupoïde enrichi dans les groupoïdes.
  - Quelques exemples pertinents, e.g. le 2-groupe (= 2-groupoïde à un seul objet) des automorphismes $\mathrm{AUT}(G) \subset \mathbf{Gpd}$ d'un groupoïde $G$.

## Exposé 5 : Classification des 2-groupoïdes par les 2-modules croisés

- **Date :** 4 décembre
- **Orateur :** Alexis
- **Références :** [JS86, Intro & §6] ou [BL04] (aussi dans [BHS11]?)
- **Programme :**
  - La 2-catégorie $\mathcal{H}^3$ des triples $(G, M, h)$ consistant d'un groupe $G$, un $G$-module $M$ et un 3-cocycle normalisé $h \colon G^3 \to M$.
  - Le 2-groupe $T(G, M, h)$ associé à un tel triple. Le triple associé à un 2-groupe.
  - La biéquivalence entre $\mathcal{H}^3$ et la 2-catégorie des 2-groupes. Extensions aux 2-groupoïdes (par sommes disjointes), classifications en termes de $[h] \in H^3(G; M)$.
  - Traduction en termes de groupes catégoriques et donc de modules croisés.

## Exposé 6 : Classification des 2-types d'homotopie par les modules croisés

- **Date :** 11 décembre
- **Orateur :** Lorenzo
- **Références :** Réf. originaire [MW50]. Attention au vocabulaire : "$n$-type" = $(n-1)$-type, "complexe" = CW-complexe (connexe et pointé), "which admits $G$ as group of operators" = muni d'une action du groupe $G$, etc. Voir aussi [Bro99, §3] (où le livre [BHS11] pour plus de contexte).
- **Programme :** (pas nécessairement dans cet ordre)
  - Rappels sur les 2-types. Pour un CW-complexe, le 3-squelette suffit. À tout espace (pointé, connexe. . . ) on peut associer fonctoriellement le CW-complexe $|\mathrm{Sing}(X)|$.
  - Structures algébriques : 2-types d'homotopie algébriques $(\pi_1, \pi_2, \mathbf{k})$, suites d'opérateurs, suites croisées, modules croisés. ([MW50, §2])
  - Le 2-type d'homotopie algébrique associé à une suite croisée / module croisé. ([MW50, §2])

– Le module croisé $\mathcal{M} = \big(\pi_2(K, K^1) \overset{\partial}{\to} \pi_1(K^1)\big)$ d'un CW-complexe connexe pointé $K$, obtenu de la suite croisée des groupes d'homotopie relatifs de $K^1 \subset K$. ([MW50, (2.6) ff.])
– Réalisation d'un 2-type d'homotopie algébrique par un CW-complexe. ([MW50, §3] et [Whi49, Thm. 2]; voir aussi [Bro99, §3.1].)
– (Morphismes de types d'homotopie algébriques et leur réalisation par des applications continues. [MW50, §4-5])
– Énoncé, et preuves tant que possible, du résultat de classification des 2-types (les théorèmes 1, 2 et 3 de [MW50, §1]). Idéalement, comparer tout ça avec l'exposé 5 !

**Exposé 7 : La théorie de Schreier**

- **Date :** 18 décembre
- **Orateur :** Jun
- **Références :** Détaillées dans le programme.
- **Programme :**
  – Fibrations (aussi non-discrètes) sur un groupoïde $B$. Cas connexe : extensions de groupes.
  – La biéquivalence entre les fibrations sur $B$ et les pseudo-foncteurs $B \to \mathbf{Gpd}$. Cas connexe : extensions de groupes $1 \to F \to E \to B \to 1$ et pseudo-foncteurs $B \to \mathrm{AUT}(G)$. (Cas $n = 1$ de l'équivalence de Grothendieck de l'Introduction.) (Cas très spécial et facile de [JY20, Ch. 10].)
  – Description explicite en termes de 'cohomologie non-abélienne'. (nLab[1], aussi [Jar09, §4].)
  – Cas classiques : extensions de groupes abéliens par $Ext$, extensions centrales par $H^2$.

## Références


[And78] D. W. Anderson. Fibrations and geometric realizations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(5):765–788, 1978. [J'ai le pdf – Ivo.].

[BHS11] Ronald Brown, Philip J. Higgins, and Rafael Sivera. *Nonabelian algebraic topology*, volume 15 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids, With contributions by Christopher D. Wensley and Sergei V. Soloviev. `http://groupoids.org.uk/pdffiles/NAT-book.pdf`.

[BL04] John C. Baez and Aaron D. Lauda. Higher-dimensional algebra. V. 2-groups. *Theory Appl. Categ.*, 12:423–491, 2004. `https://arxiv.org/abs/math/0307200v3`.

[Bro99] Ronald Brown. Groupoids and crossed objects in algebraic topology. *Homology Homotopy Appl.*, 1:1–78, 1999.

[Bro06] Ronald Brown. *Topology and groupoids*. BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006. Third edition of ıt Elements of modern topology [McGraw-Hill, New York, 1968; MR0227979], With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). [J'ai le pdf - Ivo].

[BS07] John Baez and Michael Shulman. Lectures on $n$-categories and cohomology. `https://arxiv.org/abs/math/0608420`, 2007.

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995. `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/616/DwyerSpalinski.pdf`.


[1] Voir la page `https://ncatlab.org/nlab/show/group+extension`

[EDHP95] Carmen Elvira-Donazar and Luis-Javier Hernandez-Paricio. Closed model categories for the $n$-type of spaces and simplicial sets. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 118, 1995. [J'ai le pdf – Ivo.].

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967. [Je l'ai en fichier .djvu – Ivo.].

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. `http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`.

[Hig05] P. J. Higgins. Categories and groupoids. *Repr. Theory Appl. Categ.*, (7):1–178, 2005. Reprint of the 1971 original [ıt Notes on categories and groupoids, Van Nostrand Reinhold, London; MR0327946] with a new preface by the author. `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/7/tr7abs.html`.

[Jar09] J. F. Jardine. Cocycle categories. In *Algebraic topology*, volume 4 of *Abel Symp.*, pages 185–218. Springer, Berlin, 2009. `https://faculty.math.illinois.edu/K-theory/0782/coc-cat3.pdf`.

[JS86] André Joyal and Ross Street. Braided monoidal categories. Macquarie Mathematical Reports Nr. 860081. `http://web.science.mq.edu.au/~street/JS1.pdf`, 1986.

[JY20] Niles Johnson and Donald Yau. 2-Dimensional categories. `https://arxiv.org/abs/2002.06055`, 2020.

[Lac10] Stephen Lack. A 2-categories companion. In *Towards higher categories*, volume 152 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 105–191. Springer, New York, 2010. `https://arxiv.org/abs/math/0702535`.

[May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999. [J'en ai une copie - Ivo].

[MW50] Saunders MacLane and J. H. C. Whitehead. On the 3-type of a complex. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 36:41–48, 1950.

[Whi49] J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:453–496, 1949.