

Groupe de travail: K-Théorie et homologie cyclique

Antoine Touzé

25 octobre 2019

Le but du groupe de travail est d'expliquer un théorème classique de Goodwillie, qui permet de calculer la K -théorie relative (rationalisée) en termes d'homologie cyclique relative (rationalisée) dans des cas de faveur. Référence :

T. Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, Ann. Math. 1986.

Horaires et lieu : Les exposés durent 1h, et se déroulent en salle Duhem, le vendredi après le séminaire.

NB : les exposés sont en anglais ou en français, au choix de l'orateur/trice.

Exp 1 : Introduction à la K-théorie d'un anneau

Date, Orateur(trice) : 15 Novembre 2019, Sophie ou Thomas.

L'objectif de cet exposé est de faire des rappels généraux les groupes de K-théorie d'un anneau. On se basera sur les livres

Weibel, The K-book, Chap III sec 1.

Loday, Cyclic homology, Chap 11.

On exposera les points suivants :

- Définition à la Quillen ($GL(R)$, $BGL(R)$, construction $+$) des groupes de K-théorie supérieure.
- Suite longue associée à un morphisme d'anneaux $f : R \rightarrow S$. (III.1.11)
- Problèmes de fonctorialité, construction de Volodin (III, 1.9 (v))
- Un exemple : Énoncé de la K-théorie des corps finis. (III. 1.13)

Exp 2 : Introduction à l'homologie cyclique d'un anneau

Date, Orateur(trice) : 22 Novembre 2019, Thomas ou Sophie.

L'objectif est de présenter l'homologie cyclique d'un anneau, et ses diverses variantes (Homologie de Hochschild, Homologie cyclique (usuelle, périodique, négative)).

On s'appuiera sur

Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, début de la section I.3 (pp. 363-364-365)

Goodwillie, cyclic homology, derivations and the free loop space

Loday, Cyclic homology

Weibel, an introduction to homological algebra (Chap 9, sec. 9.6)

On exposera les points suivants :

- Définition de l'homologie de Hochschild, de l'homologie cyclique, de l'homologie cyclique négative et de l'homologie cyclique périodique pour des objets cycliques. (NB : pour la définition d'objet cyclique, on peut prendre le paragraphe I de Goodwillie, cyclic homology etc.)
- Suites exactes longues associées à ces homologies (Diagramme (I.3.1) page 364 de l'article de Goodwillie, Relative etc.).
- Suite exacte longue associée à une suite exacte courte d'objets cycliques. (voir page 334 du Weibel, sous la déf 9.6.7)
- Exemple des anneaux, suite exacte longue associée à un morphisme surjectif d'anneaux $f : R \rightarrow S$.
- Exemples de calcul (au moins l'exemple 9.6.14, p. 336 de Weibel).

Exp 3 : Homologie cyclique des anneaux simpliciaux

Date, Orateur : 29 Novembre 2019, Ivan.

L'objectif est de présenter l'homologie cyclique des anneaux simpliciaux. La construction est la même que pour les anneaux, en prenant une totalisation en plus. On se basera principalement sur

Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, sec I.3.

On exposera les points suivants (en n'oubliant pas de rappeler ce qui s'impose sur les anneaux simpliciaux) :

- Définition de l'homologie de Hochschild, de l'homologie cyclique, de l'homologie cyclique négative et de l'homologie cyclique périodique pour des anneaux simpliciaux.
- Définition des suites exactes longues associées.
- Lemmes I.3.3, I.3.4, I.3.5 du papier de Goodwillie. (c'est le point principal de l'exposé)

Exp 4 : K-théorie des anneaux simpliciaux

Date, Orateur : 6 décembre 2019, Lorenzo.

L'objectif est de présenter la K-théorie des anneaux simpliciaux. On se basera principalement sur

Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, sec I.2.

On exposera les points suivants :

- Définition de la K-théorie d'un anneau simplicial.
- Suite exacte longue associée à un morphisme d'anneaux $f : R \rightarrow S$.
- Lemmes I.2.1 et I.2.2 du papier de Goodwillie.

Exp 5 : Trace de Dennis

Date, Orateur : 13 décembre 2019, Jun.

L'objectif est de présenter la construction de la Trace de Dennis, et de réduire la démonstration au cas d'un idéal de carré nul. On se basera sur

Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology

On exposera les points suivants :

- Construction de la Trace de Dennis (II.1 et II.2)
- Énoncé du théorème II.3.4 à montrer, réduction au cas $I^2 = 0$ (section III.1) (si le temps le permet)

Exp 6 : Démonstration du théorème de Goodwillie

Date, Orateur : 10 Janvier 2020, Aurélien.

Dans cet exposé on donnera les grandes lignes de la démonstration du théorème principal du papier

Goodwillie, Relative algebraic K-theory and cyclic homology

c'est-à-dire le contenu de la fin de la section III et de la section IV. (NB : il est peut-être ambitieux de faire cet exposé en 1 heure, en tout cas impossible en donnant tous les détails).