Une petite excursion en géométrie fractale

1 Ensemble fractal

$\longrightarrow$ Difficile à définir mathématiquement de façon précise et figée.

$\longrightarrow$ "Intuitivement" un ensemble F est de ce type si :

(i) la structure de F est **fine**.

(ii) A cause de son irrégularité F **ne peut être décrit** globalement, ou même localement, **par le langage géométrique traditionnel**.

(iii) F possède une certaine **auto-similarité**.

(iv) La "dimension fractale" de F **est plus grande** que sa dimension topologique.

Exemples : l'ensemble de Cantor, le flocon de Van Koch et le tapis de Sierpinski.

2 Dimensions fractales

$\rightarrow$ $\dim F$ donne une certaine **évaluation de l'espace** occupé par F.

$\rightarrow$ Le concept de dimension est l'un des concepts les plus fondamentaux de la géométrie fractale.

Les dimensions fractales prennent souvent **des valeurs non entières**.

Parmi les dimensions fractales les plus célèbres figurent **la dimension de Hausdorff** et **la dimension de boîtes**.

$\dim_H F$ rend compte **de façon plus fidèle** que $\dim_B F$ de **la complexité géométrique** de F. Par contre, elle est nettement **plus difficile à calculer** ou même à estimer de façon numérique.

2.1 Définition de la dimension de Hausdorff

Soient $F \subset \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$.

$\{F_i\}_{i\in I}$ (I dénombrable) est un **δ-recouvrement de F** si :

- $\forall\, i \in I$, $0 \leq |F_i| \leq \delta$,
- $F \subset \cup_{i\in I} F_i$.

On pose : $\forall\, s > 0$, $\forall\, \delta > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i\in I} |F_i|^s;\ \{F_i\}_{i\in I}\ \delta\text{-recouvrement de } F \right\}.$$

s-mesure extérieur de Hausdorff de F,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

La restriction de $\mathcal{H}^n(.)$ à la tribu borélienne est égale **à la mesure de Lebesgue** (à une constante multiplicative près).

$\Rightarrow$ De façon générale, on peut voir la mesure de Hausdorff comme une généralisation de la mesure de Lebesgue.

Dimension de Hausdorff de F : permet de déterminer la mesure de Hausdorff la mieux adaptée à la mesure de F.

2.2 Définition de la dimension de boîtes

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log \mathcal{N}_\delta(F)}{-\log \delta},$$

où $\mathcal{N}_\delta(F)$ est **le plus petit nombre de boules, de diamètre $\leq \delta$, recouvrant** F. On a toujours

$$\dim_H F \leq \dim_B F,$$

mais parfois cette inégalité est stricte.

2.3 Une conjecture célèbre

Fonction de Weierstrass : $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-nH} \cos(2\pi b^n x),$$

où $b > 1$ et $H \in]0, 1[$ sont deux paramètres.

$\rightarrow w$ est continue et nulle-part dérivable (Weierstrass et Hardy).

$\rightarrow w$ est H-hölderienne : $\exists\, c > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$,

$$|w(x) - w(y)| \leq c|x - y|^H.$$

D'où $\dim_H \mathrm{Graphe}(w) \leq \dim_B \mathrm{Graphe}(w) \leq 2 - H$.

Conjecture "de la Weierstrass" :

$$\dim_H \mathrm{Graphe}(w) = 2 - H.$$

La minoration de $\dim_H F$ est souvent **beaucoup plus difficile** que sa majoration (pour la minoration on utilise le théorème de Frostman).

La conjecture “de la Weierstrass” **a des fondements sérieux :**

- En 84, Kaplan, Mallet-Paret et Yorke ont montré que

$$\dim_B \mathrm{Graphe}(w) = 2 - H.$$

- En 98, Hunt a montré, qu'avec probabilité 1,

$$\dim_H \mathrm{Graphe}(\widetilde{w}) = 2 - H,$$

  où $\widetilde{w}$ est **la fonction de Weierstrass avec une phase aléatoire**.

3 Exposant de Hölder ponctuel

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est **fractale** lorsque $\mathrm{Graphe}(f)$ est un ensemble fractal. On peut **mesurer l'irrégularité** de f au moyen de $\dim \mathrm{Graphe}(f)$, ou encore au moyen de $\alpha_f(.)$, **l'exposant de Hölder ponctuel de** f.

Lorsque est f est nulle-part différentiable, $\alpha_f(.)$, **l'exposant de Hölder ponctuel de f** est défini pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ par

$$\alpha_f(t) = \sup \left\{ \alpha \geq 0;\ \limsup_{h \to 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} = 0 \right\},$$

avec la convention que $\alpha_f(t) = 0$ lorsque f est discontinue en t. Ainsi, **plus la quantité $\alpha_f(t)$ est proche de 1 plus lisse est la fonction f dans un voisinage de t.**

4 Théorie des ondelettes et géométrie fractale

Une **ondelette** est une fonction $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant :

(a) Ψ est **bien localisée :** $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\Psi(x)| \leq c(1 + |x|)^{-\alpha}.$$

(b) Ψ est **oscillante :** $\exists\, P \in \mathbb{N}, \forall\, (p_1, \ldots, p_n) \in \{0, 1, \ldots, P\}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \Psi(x)\, dx = 0.$$

Souvent on exige aussi que Ψ soit **régulière.**

Base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$: base orthonormée de la forme,

$$\{2^{\frac{jn}{2}}\Psi_1(2^j x-k),\ldots,2^{\frac{jn}{2}}\Psi_{2^n-1}(2^j x-k);\ j\in\mathbb{Z}\text{ et }k\in\mathbb{Z}^n\}.$$

$\Rightarrow$ Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ peut s'écrire,

$$f(x)=\sum_{l=1}^{2^n-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{l,j,k}\Psi_l(2^j x-k),$$

où la série converge en norme $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les **coefficients d'ondelettes** vérifient,

$$c_{l,j,k}=2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_l(2^j x-k)\,dx.$$

Exemple de base d'ondelettes : **le système de Haar**

Désormais nous supposerons que les ondelettes Ψ_l appartiennent à **la classe de Schwartz** $S(\mathbb{R}^n)$.

Un résultat fondamental :

Théorème 1 *(Bourdaud, Meyer, ...) Les bases d'ondelettes sont des bases inconditionnelles* **de la plupart des espaces fonctionnels classiques** *($L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p < \infty$, Sobolev, Besov, ...) et* **ces espaces peuvent être caractérisés** *au moyen des coefficients d'ondelettes.*

$\rightarrow$ Le Théorème 1 a été utilisé à plusieurs reprises **en analyse fonctionnelle, en géométrie fractale et en statistique**.

Un apport important des ondelettes à la géométrie fractale :

Théorème 2 *(Jaffard, en 89) Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne et bornée, alors $\alpha_f(t)$,* **l'exposant de Hölder ponctuel de** *f en un point arbitraire t, est donné par la formule*

$$\alpha_f(t) = \liminf \left\{ \frac{\log |c_{l,j,k}|}{\log(2^{-j} + |t - 2^{-j}k|)};\ 1 \leq l \leq 2^n - 1, \right.$$
$$\left. j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}^n \text{ et } |t - 2^{-j}k| \leq 2^{-\frac{j}{(\log j)^2}} \right\}.$$

$\rightarrow$ **Le comportement de f au voisinage de t** est surtout déterminé par les coefficients $c_{l,j,k}$ vérifiant $|t - 2^{-j}k| \leq 2^{-\frac{j}{(\log j)^2}}$.

Un autre apport des ondelettes à la géométrie fractale : les formules permettant le calcul de **la dimension de boîtes du graphe d'une fonction à partir de ses coefficients d'ondelettes** (Jaffard, Kamont, en 98).

De façon générale, le calcul d'un indice d'irrégularité au moyen des coefficients d'ondelettes est **assez stable numériquement**.

5 La géométrie algébrique pourrait-elle éclaicir le problème de la construction des bases d'ondelettes à support compact ?

Compte tenu de la **diversité des applications** de la théorie des ondelettes il est important de construire de nouvelles bases.

Les ondelettes **symétriques** sont très utiles **en imagerie**.

Le problème de **la construction de bases orthonormées d'ondelettes, symétriques, à support compact et de régularité arbitrairement grande** reste encore ouvert.

La première famille de bases orthonormées d'ondelettes monovariées, à support compact et de régularité arbitrairement grande a été construite par Daubechies en 88.

De façon générale le problème de la construction de bases d'ondelettes à support compact semble plus ou moins lié à la géométrie algébrique.

En effet, la notion **d'analyse multirésolution** (Mallat, Meyer, en 86) a permis de ramener ce problème à celui de la construction **de bancs de filtres.**

Un banc de filtres est la donnée de $M_0(\xi), \ldots, M_{2^n-1}(\xi)$, **des polynômes trigonométriques** sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant $M_0(0) = 1$ et **les conditions de quadrature :** $\forall\ k, l \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$,

$$\sum_{\nu \in \{0,1\}^n} M_k(\xi + \nu\pi)\overline{M_l(\xi + \nu\pi)} = \delta_{k,l},$$

où $\delta_{k,l} = 1$ lorsque $k = l$ et $\delta_{k,l} = 0$ sinon.

Les bancs de filtres ont été introduits dans le cadre du **codage du signal en sous-bandes** (Esteban, Galand, dans les années 70).

L'ensemble des bancs de filtres (sur $\mathbb{R}^n$) de taille fixée s'identifie à **un ensemble algébrique** noté V_n.

On connaît peu de choses sur V_n :

- En 89, Pollen a construit **un morphisme algébrique surjectif d'un produit cartésien de copies du tore** sur V_1.
  $\Rightarrow$ **irréductibilité et dimension topologique** de V_1.
- L'ensemble des bases d'ondelettes non séparables s'identifie à **un ouvert de Zariski** de V_2 dont la trace sur certaines sous-variétés est partout dense (Ayache en 98).
  $\Rightarrow$ Construction de bases d'ondelettes non séparables par perturbation de bases d'ondelettes séparables.

Une étude plus approfondie de V_n et d'autres ensembles algébriques de même nature pourrait peut-être éclaircir le problème de la construction des bases d'ondelettes à support compact.

6 Le Mouvement Brownien Fractionnaire

Le MBF de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$ est le processus Gaussien $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ définit par

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}-1}{|\xi|^{H+1/2}}\, dW(\xi).$$

Ce processus **généralise le Mouvement Brownien** qui n'est rien d'autre que $\{B_{1/2}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Le MBF a été introduit par Kolmogorov en 40 pour générer des spirales Gaussiennes dans un espace de Hilbert.

Le MBF a été rendu populaire en 68 par Mandelbrot et Van Ness qui ont souligné son importance du point de vue des applications.

$\Rightarrow$ Le MBF s'est avéré être **un puissant outil de modélisation** (hydrologie, géologie, traitement du signal et des images, télécommunications, ...).

$\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est **l'unique processus Gaussien, nul à l'origine, globalement H-auto-similaire et à accroissements stationnaires.**

- **Globalement H-auto-similaire** signifie que : $\forall\ a > 0$

$$\text{loi}\{B_H(at)\}_{t\in\mathbb{R}} = \text{loi}\{a^H B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

- **A accroissements stationnaires** signifie que : $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$B_H(t) - B_H(s) \overset{\text{loi}}{=} B_H(t-s) - B_H(0).$$

Un processus (Gaussien) $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ possède **de la longue dépendance** si "les corrélations entre ses accroissements décroissent lentement au cours du temps". Lorsque **les accroissements de $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont stationnaires** cette idée peut être formalisée de façon très simple :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\rho(k)| = +\infty,$$

car $\rho(k) = \text{cov}(X(s+k+1) - X(s+k), X(s+1) - X(s))$ ne dépend pas du choix de s.

- Contrairement au Mouvement Brownien, **les accroissements de $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sont corrélés** lorsque $H \neq 1/2$ et possèdent même **de la longue dépendance** lorsque $H > 1/2$.
- Avec probabilité 1,

$$\dim_H \text{Graphe}(MBF) = \dim_B \text{Graphe}(MBF) = 2 - H.$$

- **L'exposant de Hölder ponctuel du MBF** vérifie :

$$P\{\forall\, t, \alpha_{MBF}(t) = H\}.$$

$\Rightarrow$ La plupart des propriétés du MBF ne sont gouvernées que par le seul paramètre H et cela rend ce modèle **assez rigide**. Cette rigidité se traduit notamment par le fait que $\alpha_{MBF}(.)$ **reste constant**.

7 Caractérisation de l'exposant de Hölder ponctuel

Dans les applications, **il a souvent été observé que l'exposant de Hölder ponctuel varie d'un point à un autre**. Par ailleurs, le théorème suivant a confirmé ces observations.

Théorème 3 *(Daoudi, Jaffard, Lévy Véhel, Meyer, en 95) Une fonction* $H(.)$ *est* **l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue et nulle-part dérivable** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $(H_n(.))_{n\in \mathbb{N}}$ **une suite de fonctions continues et à valeurs dans** $[0,1]$ *telle que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$H(t) = \liminf_{n\to\infty} H_n(t).$$

Toutes les fonctions continues et déterministes dont l'exposant de Hölder ponctuel est **de la forme la plus générale** (i.e $\liminf_{n\to\infty} H_n(.)$), qu'on a pu construire, sont **très particulières** et ne peuvent donc servir de modèle pour **une simulation réaliste**.

Problème 4 *(Jaffard, Lévy Véhel, en 97) Est-il possible de construire un processus Gaussien continu et nulle-part dérivable* **qui généralise le MBF** *et dont* **l'exposant de Hölder ponctuel vaut presque sûrement***, pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$H(t) = \liminf_{n\to\infty} H_n(t),$$

où $(H_n(.))_{n\in \mathbb{N}}$ *est une suite* **arbitraire de fonctions continues et à valeurs dans** $[0,1]$.

8 Le Mouvement Brownien Multifractionnaire : un début de solution

Définition 5 *(Benassi, Jaffard, Lévy Véhel, Peltier, Roux) Soit* $H(.)$ **une fonction** *à valeurs dans* $[a,b] \subset]0,1[$. *Le* **MBM de paramètre** $H(.)$ *est le processus Gaussien* $\{X(t)\}_{t\in I\!R}$ *défini par*

$$X(t) = \int_{I\!R} \frac{e^{it.\xi}-1}{|\xi|^{H(t)+1/2}}\, dW(\xi).$$

Remarque 6 *(Taqqu, Ayache) Le MBM* **n'est continu** *que si la fonction* $H(.)$ **est continue** *partout, sauf peut-être en* 0.

→ Le MBM est **une extension** du MBF car :

- lorsque $H(.)$ est **constante** le MBM est un MBF,
- lorsque $H(.)$ est suffisamment régulière, alors en tout point t, le MBM admet **"un MBF tangent"** de paramètre de Hurst $H(t)$ (Benassi, Jaffard, Roux) :

$$\lim_{\rho\to 0^+} \text{loi}\left\{\frac{X(t+\rho u)-X(t)}{\rho^{H(t)}}\right\}_u = \text{loi}\{B_{H(t)}(u)\}_u.$$

→ Lorsque $H(.)$ est suffisamment régulière, **l'exposant de Hölder ponctuel du MBM** vérifie (Benassi, Jaffard, Lévy Véhel, Peltier, Roux) : $\forall\, t$,

$$P\{\alpha_{MBM}(t) = H(t)\} = 1.$$

9 Le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé : une solution complète

Définition 7 *(Lévy Véhel, Ayache) Le MBMG* $\{Z(t)\}_{t\in I\!R}$ *de paramètre* **la suite de fonctions hölderiennes** $(h_n(.))_{n\in I\!N}$ *à valeurs dans* $[a_n, b_n] \subset]0,1[$ *est obtenu* **"en substituant" cette suite au paramètre de Hurst du MBF**. *Ainsi, pour tout* $t \in I\!R$,

$$Z(t) = \int_{I\!R} [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{it.\xi} - 1)}{|\xi|^{h_n(t)+1/2}} \widehat{f}_{n-1}(\xi)]\, dW(\xi),$$

$\widehat{f}_{-1}$ *et* $\widehat{f}_n$ *(*$n \geq 0$*), étant* **les fonctions indicatrices**, *respectivement de* **la boule unité** $|\xi| < 1$ *et* **de la couronne** $2^n \leq |\xi| < 2^{n+1}$, *ou encore,* **des versions régulières** *de ces fonctions. Par ailleurs, pour tout* t, $H(t) = \liminf_{n\to\infty} h_n(t)$.

- Le MBMG est à la fois **une extension du MBM et du MBF**, pour les mêmes raisons qui ont permis de dire que le MBM est une extension du MBF.
- **L'exposant de Hölder ponctuel du MBMG** vérifie,

$$P\{\forall\, t,\, \alpha_{MBMG}(t) = H(t)\} = 1.$$

- Contrairement au MBF et au MBM **les basses fréquences (longue mémoire)** et **les hautes fréquences (régularité)** du MBMG sont gouvernées **par des paramètres différents** ; respectivement, les premiers termes et la queue de la suite $(h_n(.))_{n\in I\!N}$.

10 Inférence statistique pour le MBMG

10.1 Motivation de la méthode des variations quadratiques

Contrairement au MBF, **l'estimation de l'exposant de Hölder ponctuel** (EHP) du MBMG et l'estimation **de ses indices de longue dépendance** sont **2 problèmes différents**.

La méthode des VQ est pratiquement la seule qui permet d'identifier un exposant de Hölder. De plus :

- elle s'adapte bien à **des processus assez généraux** (Istas, Lang),
- les VQG suivent **un TCL standard** (Istas, Lang),
- elle permet d'atteindre **la borne de Cramèr-Rao** dans le cas du MBF (Istas, Coeurjolly),
- elle **a déjà été utilisée pour identifier l'EHP du MBM** (Benassi, Cohen, Istas).

10.2 L'identification de l'EHP du MBMG

On observe $\{Z(p/l)\}_{p=0,\ldots,l}$ une trajectoire discrétisée d'un MBMG de paramètre $(h_n(.))_n$ et d'EHP $H(.)$. **Quel peut être le degré maximal d'irrégularité de $H(.)$ pour qu'il reste identifiable en chaque point $t \in [0,1]$?**

Théorème 8 *(Lévy Véhel, Ayache) Soit $t \in [0,1]$ un point vérifiant,*

$$H(t) = \lim_{n\to\infty} h_n(t) \in]0,1/2[.$$

Soient $V_l(t)$ **les Variations Quadratiques Généralisées (VQG) du MBMG, localisées en** t*,*

$$V_l(t) = \sum_{p\in\nu_l(t)} \left(Z\left(\frac{p+2}{l}\right) - 2Z\left(\frac{p+1}{l}\right) + Z\left(\frac{p}{l}\right)\right)^2,$$

où $\nu_l(t) = \{p \in I\!N;\ 0 \le p \le l-2 \text{ et } |t - p/l| \le l^{-\gamma}\}$. Alors, pour tout $\gamma \in]H(t), 1/2[$, on a presque sûrement,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \gamma - \frac{\log V_l(t)}{\log l}\right) = H(t).$$

Se généralise en dimension quelconque et reste vrai lorsque $H(t) \in]1/2, 1[$ (moyennant de petites modifications).

Même si leur ensemble de points de discontinuité est **"maigre"**, les fonctions $H(.)$ identifiables peuvent être **très irrégulières** comme par exemple la fonction

$$a\chi_C(t) + b\chi_{\overline{C}}(t)$$

où C est **un Cantor**.