Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Processus Stochastiques, sujet d'oral de rattrapage numéro 1
le 3 mars 2011

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1 Soit $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard. Désignons par x et u deux réels arbitraires vérifiant $0 \le x < u$.
1) Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\big(B(x)/B(u)\big)$ existe et vérifie

$$\mathbb{E}\big(B(x)/B(u)\big) = \left(\frac{x}{u}\right) B(u).$$

2) La variance conditionnelle $\mathrm{Var}\big(B(x)/B(u)\big)$ est définie par :

$$\mathrm{Var}\big(B(x)/B(u)\big) = \mathbb{E}\left[\Big(B(x) - \mathbb{E}\big(B(x)/B(u)\big)\Big)^2 / B(u)\right].$$

Montrer qu'elle existe, puis calculer la au moyen de x et u.

Exercice 2 1) Montrer qu'il existe un processus gaussien centré noté par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ dont la fonction de covariance vérifie pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\big(X(t_1)X(t_2)\big) = e^{-|t_1-t_2|}\ ;$$

indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, l'application f_t, définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ par $f_t(s) = 2^{1/2}e^{-(t-s)}\mathbf{1}_{]-\infty,t]}(s)$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$.
2) Déterminer les lois finies dimensionnelles du processus $\{Y(s)\}_{s\in[1,+\infty[}$ qui est défini pour tout $s \in [1, +\infty[$ par

$$Y(s) = \sqrt{s}X\big(2^{-1}\log s\big),$$

où log désigne le logarithme népérien.