Université de Lille, M2 Mathématiques - Parcours Mathématiques Appliquées, Premier Exercice de l'Oral de Rattrapage "Intégrale d'Itô, formule d'Itô et applications à la finance" du 30 mai 2018

Cet Exercice concerne la partie du cours enseignée par A.Ayache

L'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté par $E(\cdot)$. On désigne par $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E\big(B(1)^2\big) = 1$. On note par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_t := \sigma\big(B(u)\,;\, u \in [0,t]\big)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Soit une fonction mesurable f de $\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}\big)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

(I) pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $s \mapsto f(s,\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

(II) le processus stochastique $\{f(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$-adapté ;

(III) f est bornée, c'est-à-dire que $\rho_f := \sup\big\{|f(s,\omega)|\,;\ (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\big\} < +\infty$.

1) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $(t',t'') \in \mathbb{R}_+^2$, vérifiant $t' < t''$, on pose

$$I_j(t',t'') := \sum_{k=0}^{2^j-1} f\big(d_{j,k}^{t',t''}\big)\Big(B\big(d_{j,k+1}^{t',t''}\big) - B\big(d_{j,k}^{t',t''}\big)\Big)\,,$$

où, pour tout $l \in \{0,\dots,2^j\}$, $d_{j,l}^{t',t''} := t' + l2^{-j}(t''-t')$. Montrer que, lorsque $j \to +\infty$, la suite de variables aléatoires $\big(I_j(t',t'')\big)_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers l'intégrale d'Itô $\int_{t'}^{t''} f(s)\,dB(s)$.

2) En utilisant ce qui précède et le lemme de Fatou, montrer que

$$E\bigg[\Big(\int_{t'}^{t''} f(s)\,dB(s)\Big)^4\bigg] \le c(t''-t')^2\,,$$

où c est une constante finie qui ne dépend pas de t' et t''. En déduire que le processus stochastique $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par $X(t) := \int_0^t f(s)\,dB(s)$, admet une modification à trajectoires continues.

3) (Cette question est indépendantes des deux questions précédentes) On désigne par $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n(t) := \frac{1}{B(t+h_n) - B(t)} \int_t^{t+h_n} f(s)\,dB(s).$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de variables aléatoires $\big(Y_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(t)$ lorsque $n \to +\infty$. *Indication : on pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à*

$$E\left[\frac{1}{\big|B(t+h_n) - B(t)\big|^{1/4}}\left|\int_t^{t+h_n} \big(f(s) - f(t)\big)\,dB(s)\right|^{1/4}\right].$$