

Remise à niveau en mathématiques

Antoine Ayache

IAE de Lille

Table des matières

1	Notions de base sur les dérivées, primitives et intégrales	1
2	Suites et séries numériques	6
3	Compléments sur les intégrales	13
4	Éléments de calcul matriciel	17

1 Notions de base sur les dérivées, primitives et intégrales

Définition 1.1. On dit qu'une courbe du plan notée par $\mathcal{C}_f$ est le graphe d'une fonction notée par f si et seulement si $\mathcal{C}_f$ vérifie la propriété suivante : pour tout nombre réel x désignons par $\mathcal{V}_x$ la droite verticale passant par le point de coordonnées $(x, 0)$ situé sur l'axe des abscisses ; alors uniquement l'une des deux situations suivantes peut se produire : (i) $\mathcal{V}_x$ coupe $\mathcal{C}_f$ en un seul point, (ii) $\mathcal{V}_x$ ne coupe pas $\mathcal{C}_f$.

Remarques 1.1.

- (i) On note par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathcal{V}_x$ coupe $\mathcal{C}_f$; cet ensemble est appelé l'ensemble de définition de la fonction f .
- (ii) Lorsque $\mathcal{V}_x$ coupe $\mathcal{C}_f$ l'abscisse du point d'intersection est x et son ordonnée est notée par $f(x)$.

Exercice 1.1. Trouver les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto 2x + 3$; $f_2 : x \mapsto x^2 + 1$; $f_3 : x \mapsto \sqrt{x - 3}$; $f_4 : x \mapsto (x^2 - 1)/(x + 1)$;
 $f_5 : x \mapsto \exp(x + 5)$; $f_6 : x \mapsto \ln(x - 2)$; $f_7 : x \mapsto \ln(|x - 2|)$.

Définition 1.2. Soit f une fonction, soit l un nombre réel, et soit x_0 un nombre réel qui appartient à $\mathcal{D}_f$ ou bien qui se trouve au bord de $\mathcal{D}_f$. On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 (on note par $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$), si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .

Exercice 1.2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} f_2(x)$; $\lim_{x \rightarrow 7} f_3(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f_4(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f_4(x)$; $\lim_{x \rightarrow \ln(\exp(-5))} f_5(x)$; $\lim_{x \rightarrow \exp(5)+2} f_6(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \exp(-5)+2} f_7(x)$.

Définition 1.3. Soit f une fonction et soit x_0 un nombre réel qui se trouve au bord de $\mathcal{D}_f$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 (on note par $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$), si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 .

Définition 1.4. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ n'est pas majoré, et soit l un nombre réel. On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ (on note par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$), si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit suffisamment grand.

Définition 1.5. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ n'est pas majoré. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (on note par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$), si $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Question 1.1. Expliquer la signification de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 1.3. 1) Pour $i = 1, \dots, 7$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_i(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_i(x)$ lorsqu'on peut le faire.

2) Donner l'exemple d'une fonction g qui vérifie $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$.

Définition 1.6. On dit qu'une fonction f est continue sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque pour tout $x_0 \in \mathcal{D}_f$ on a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Intuitivement parlant le graphe d'une fonction continue ne comporte aucun saut.

Exercice 1.4. 1) Les fonctions $f_1, \dots, f_7$ sont-elles continues sur leurs ensembles de définition ?

2) Donner l'exemple d'une fonction qui ne soit pas continue en tout point de son ensemble de définition.

Lorsque x , qui est à l'intérieur de $\mathcal{D}_f$, varie de h comment $f(x)$ variera-t-il ? Pour répondre à cette question il convient de considérer $T_{f,x}$, le taux de variation de f en x , défini, pour tout $|h|$ non nul et suffisamment petit, par

$$T_{f,x}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exercice 1.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, calculer $T_{f_1,x}(h)$ et $T_{f_2,x}(h)$, puis calculer $\lim_{h \rightarrow 0} T_{f_1,x}(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} T_{f_2,x}(h)$.

Définition 1.7. Lorsque $T_{f,x}(h)$ tend vers une limite finie quand h tend vers 0 cette limite est notée par $f'(x)$ et elle est appelée la dérivée de f en x .

Remarque 1.1. Lorsqu'une fonction f est dérivable en x son graphe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $(x, f(x))$ dont la pente (ou coefficient directeur) est $f'(x)$. En fait l'équation de cette droite tangente est

$$Y = f'(x) \cdot (X - x) + f(x) = f'(x)X + f(x) - xf'(x).$$

Définition 1.8. Supposons que f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I (c'est-à-dire sur un ensemble qui ne comporte pas de trous) et vérifiant $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à I . On dit alors que g est la fonction dérivée de f sur I , et on note g par f' . On dit aussi que la fonction f est **une** primitive de g sur I .

Théorème 1.1. Supposons que f et g sont comme dans la définition précédente. Lorsque I est un intervalle fermé borné noté par $[a, b]$, où a et b sont deux nombres réels tels que $a \leq b$, alors l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ vérifie

$$\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a). \quad (1.1)$$

Notons aussi que par définition $\int_b^a g(x) dx = - \int_a^b g(x) dx$.

Remarque 1.2. Lorsque g est une fonction positive, c'est-à-dire que son graphe $\mathcal{C}_g$ se situe au dessus de l'axe des abscisses, alors l'intégrale $\int_a^b g(x) dx$ est égale à l'aire (c'est-à-dire la superficie) de la surface qui est comprise entre $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses, la droite verticale passant par le point de coordonnées $(a, 0)$ et la droite verticale passant par le point de coordonnées $(b, 0)$.

Le tableau suivant résume des résultats classiques concernant les dérivées et primitives de fonctions habituelles

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	La dérivée f'	Une primitive
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x^{n+1}/(n+1)$
$x^{-1} = 1/x$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R}^*$	$-x^{-2} = -1/x^2$	$\ln(x)$ si $x > 0$ $\ln(-x)$ si $x < 0$
$x^{-m} = 1/x^m$ $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-mx^{-m-1}$	$x^{-m+1}/(-m+1)$
$e^x = \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$U^x = \exp(x \ln(U)),$ où $U \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(\ln(U))U^x$	$U^x / \ln(U)$
$x^V = \exp(V \ln(x)),$ où $V \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est fixé	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	Vx^{V-1}	$x^{V+1}/(V+1)$

Définition 1.9 (somme, produit et quotient de deux fonctions). *Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur un même ensemble $\mathcal{D}$.*

(i) *Si λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels, on note par $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ la fonction définie pour tout $x \in \mathcal{D}$ par :*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

(ii) *On note par $f_1 f_2$ la fonction définie pour tout $x \in \mathcal{D}$ par :*

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = f_1(x) \times f_2(x).$$

(iii) Lorsque $f_2(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, on note par f_1/f_2 la fonction définie pour tout $x \in \mathcal{D}$ par

$$\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Proposition 1.1. Supposons que $\mathcal{D}$ est un intervalle et que f_1 et f_2 sont respectivement des primitives de g_1 et g_2 sur $\mathcal{D}$. Alors pour tous nombres réels λ_1 et λ_2 , $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une primitive de $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ sur $\mathcal{D}$.

Proposition 1.2. Supposons que $x \in \mathcal{D}$ est tel que les dérivées $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$ existent. Alors :

(i) Pour tous nombres réels λ_1 et λ_2 , la dérivée $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x)$ existe et vaut

$$\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x).$$

(ii) La dérivée $(f_1 f_2)'(x)$ existe et vaut

$$f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x).$$

(iii) Sous réserve que $f_2(x) \neq 0$, la dérivée $(f_1/f_2)'(x)$ existe et vaut

$$\frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Proposition 1.3. Soit f_1 une fonction dérivable en x et soit f_2 une fonction dérivable en $f_1(x)$. Alors la composée de ces deux fonctions, notée par $f_2 \circ f_1$ et définie par $f_2 \circ f_1 : y \mapsto f_2 \circ f_1(y) = f_2(f_1(y))$ est dérivable en x , et on a

$$(f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x).$$

Exercice 1.6. Soit la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. Calculer la dérivée de cette fonction en tout point de son ensemble de définition.

Proposition 1.4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I (dérivable sur I signifie que $f'(x)$ existe pour tout $x \in I$).

(i) Lorsque l'on a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est croissante sur I ; ce qui veut dire que pour tous x_1 et x_2 appartenant à I vérifiant $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(ii) Lorsque l'on a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction f est décroissante sur I ; ce qui veut dire que pour tous x_1 et x_2 appartenant à I vérifiant $x_1 \leq x_2$ on a $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2 Suites et séries numériques

Définition 2.1. Une suite numérique consiste en une infinité de nombres qui sont numérotés, par exemple le premier d'entre eux est $t_0 = 1$, le deuxième $t_1 = 3$, le troisième $t_2 = 5$ et plus généralement le $(n+1)$ -ème est $t_n = 1 + 2n$. L'ensemble de tous ces nombres est noté de façon concise par $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou encore plus simplement par $(t_n)_n$.

Une suite peut être définie au moyen d'une formule explicite, c'est le cas de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qu'on vient de voir ou encore des deux suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{n}{n+2}. \quad (2.1)$$

Une suite peut aussi être définie par récurrence, c'est-à-dire que le(s) premier(s) terme(s) est (sont) fixé(s) et les termes suivants sont obtenus à partir du (des) prédécesseur(s). C'est par exemple le cas des trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 2, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 = 5/2 \\ y_{n+1} = -y_n/3, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 = 1; z_1 = 1 \\ z_{n+2} = z_{n+1} + z_n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.2)$$

Définition 2.2. Soit a un nombre réel arbitraire et fixé. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a lorsqu'elle vérifie $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui revient à dire qu'elle vérifie $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie en (2.2), est arithmétique de raison $a = 2$.

Exercice 2.1. On désigne par N un entier naturel arbitraire et fixé, et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison a .

- 1) Montrer que, pour tout entier naturel $n \leq N$, on a $u_n + u_{N-n} = u_0 + u_N$.
- 2) En déduire que (c'est un peu astucieux)

$$2 \sum_{n=0}^N u_n = (N+1)(u_0 + u_N).$$

puis que

$$\sum_{n=0}^N u_n = (N+1)u_0 + \frac{N(N+1)}{2}a.$$

- 3) En utilisant ce qui précède, montrer que

$$\sum_{n=0}^N n = \frac{N(N+1)}{2}. \quad (2.3)$$

La formule (2.3) est utile et on vous conseille de la retenir.

4) Calculer $\sum_{n=0}^N x_n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite arithmétique définie en (2.2).

Définition 2.3. Soit q un nombre réel arbitraire et fixé. On dit qu'une suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q lorsqu'elle vérifie $u'_{n+1} = u'_n q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui revient à dire qu'elle vérifie $u'_n = u'_0 q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie en (2.2), est géométrique de raison $-1/3$.

Exercice 2.2. On désigne par N et par q un entier naturel et un nombre réel arbitraires et fixés.

- 1) Montrer que $\sum_{n=0}^N (q^n - q^{n+1}) = (1 - q) \sum_{n=0}^N q^n$.
- 2) Montrer d'autre part que $\sum_{n=0}^N (q^n - q^{n+1}) = 1 - q^{N+1}$.
- 3) En déduire que lorsque $q \neq 1$ l'on a

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}. \quad (2.4)$$

La formule (2.4) est très utile et on vous conseille de la retenir.

Proposition 2.1. Soient N un entier naturel et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

(i) Lorsque $q \neq 1$ on a

$$\sum_{n=0}^N u'_n = \left(\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \right) u'_0.$$

(ii) Lorsque $q = 1$ on a

$$\sum_{n=0}^N u'_n = (N + 1) u'_0.$$

Exercice 2.3. Imaginons que le taux d'intérêt annuel est de 1% et qu'il ne va pas changer au cours des 10 prochaines années. Imaginons aussi que vous m'avez prêté 100000 Euros et que je vous donne le choix entre les deux possibilités suivantes pour vous rembourser mon prêt :

1. je vous rembourse tout de suite la totalité des 100000 Euros ;
2. à partir de maintenant et pendant une période de 10 ans je vous paye tous les ans en une seule fois 10105 Euros.

Que choisirez-vous ? (justifiez votre réponse au moyen de calculs)

Définition 2.4. Soient a et q deux nombres réels arbitraires et fixés. On dit qu'une suite $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'elle vérifie $u''_{n+1} = u''_n q + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.4. On note par $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique avec $q \neq 1$. On désigne par b la solution de l'équation $x = xq + a$, c'est-à-dire que $b = a/(1-q)$.
 1) Soit $(v''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v''_n = u''_n - b$. Montrer que $(v''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q .
 2) En déduire une formule explicite permettant d'obtenir u''_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.5. Soit l un nombre réel arbitraire. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , ce que l'on note par $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, lorsque u_n devient aussi proche que l'on veut de l pourvu que n soit suffisamment grand.

Proposition 2.2. Toute suite géométrique dont la raison q vérifie $|q| < 1$ converge vers 0.

Exercice 2.5. Soit $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique avec $|q| < 1$. Montrer que $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Définition 2.6. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, ce que l'on note par $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, lorsque u_n devient aussi grand que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand.

Questions 2.1.

- 1) A votre avis quand dit-on qu'une suite tend vers $-\infty$?
- 2) Quand est-ce qu'une suite arithmétique tend-elle vers $+\infty$?
- 3) Quand est-ce qu'une suite arithmétique tend-elle vers $-\infty$?
- 4) Quand est-ce qu'une suite géométrique tend-elle vers $+\infty$?
- 5) Quand est-ce qu'une suite géométrique tend-elle vers $-\infty$?

Remarque 2.1. La limite d'une suite (lorsqu'elle existe) n'est pas modifiée lorsqu'on modifie un nombre fini de termes de la suite.

Exercice 2.6. 1) Trouver les limites des suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (voir la Définition 2.1 et (2.1)).

2) Soit la suite $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est telle que $w'_0 = 4$, $w'_1 = \sqrt{2}$, $w'_2 = -1$, et $w'_n = w_n$ pour tout entier $n \geq 3$. Etudier la convergence de cette suite.

Proposition 2.3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers l et l' . On a alors :

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + u'_n) = l + l'$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n u'_n) = ll'$;
- (iii) pour tous nombres réels α et β , $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha u_n + \beta u'_n) = \alpha l + \beta l'$;
- (iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$;
- (v) si $l' \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n / u'_n) = l / l'$.

Exercice 2.7. Trouver la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie (voir la Définition 2.1, (2.1) et (2.2)), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$r_n = \frac{2v_n + 3w_n}{4 + y_n + 5w_n} + \sqrt{2} |y_n| + \frac{1}{t_n}.$$

Définition 2.7. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante lorsque $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante lorsque $u'_n \geq u'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.8. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée lorsqu'il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée lorsqu'il existe un nombre réel m tel que $u'_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lorsqu'une suite est à la fois majorée et minorée on dit qu'elle est bornée.

Exercice 2.8. 1) Parmi les suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, trouver celles qui sont croissantes et celles qui sont décroissantes.
 2) Parmi ces mêmes suites trouver celles qui sont majorées, celles qui sont minorées et celles qui sont bornées (pour la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on commencera d'abord par montrer par récurrence que $z_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).
 3) Est-ce que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ?

Théorème 2.1.

- (i) Toute suite croissante qui est majorée converge (vers une limite finie).
- (ii) Toute suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- (iii) Toute suite décroissante qui est minorée converge (vers une limite finie).
- (iv) Toute suite décroissante qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Exercice 2.9. Considérons la suite $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v'_0 = 1/2$ et $v'_{n+1} = \sqrt{v'_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Au moyen d'un raisonnement par récurrence montrer que $1/2 \leq v'_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Prouver que la suite $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- 3) La suite $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si elle l'est que vaut alors sa limite ?

Définition 2.9. On dit que deux suites $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $(u''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u''_n - u'_n) = 0$.

Proposition 2.4. *Lorsque deux suites sont adjacentes alors elles sont toutes les deux convergentes et elles convergent vers la même limite.*

Définition 2.10. *Considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et désignons par $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout $N \in \mathbb{N}$, par :*

$$S_N = \sum_{n=0}^N u_n . \quad (2.5)$$

Lorsque cette suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est convergente sa limite (finie) est notée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n ,$$

et elle est appelée série de terme général u_n . De plus, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ s'appelle suite des sommes partielles de cette série.

Définition 2.11. *On dit qu'une série est convergente lorsque la suite des sommes partielles associées est convergente. Dans le cas contraire on dit que la série est divergente.*

Proposition 2.5. *Soit q un nombre réel arbitraire et fixé. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ n'est convergente que si $|q| < 1$, et on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} . \quad (2.6)$$

Exercice 2.10. *Etudier la convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$, où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les mêmes suites que dans (2.2).*

Exercice 2.11. *1) Montrer que les deux suites $(w'_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(w''_N)_{N \in \mathbb{N}}$, définies par $w'_0 = 0$, $w''_0 = 4$, et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par*

$$w'_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad w''_N = \frac{1}{N!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} ,$$

sont adjacentes.

2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Les séries à termes positifs (c'est-à-dire dont le terme général est un nombre positif) sont souvent moins compliquées à étudier que les séries dont le terme général change de signe. Pour cette raison on introduit la notion de série absolument convergente.

Définition 2.12. On dit que la série de terme générale u_n est absolument convergente lorsque la série de terme générale $|u_n|$ (valeur absolue de u_n) est convergente.

Théorème 2.2. Toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2.12. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

Proposition 2.6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs positives (c'est-à-dire dont les termes sont des nombres positifs) vérifiant $u_n \leq u'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou même pour tout entier naturel n plus grand qu'un certain seuil n_0). Alors :

- (i) lorsque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ est convergente la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est également ;
- (ii) lorsque la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est divergente la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ l'est également.

Exercice 2.13. 1) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! + 5}$.

2) Etudier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant définie par (2.2).

Proposition 2.7 (Equivalence). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives qui sont équivalentes ce qui signifie que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{u_n} = 1.$$

Alors les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ sont de même nature, ce qui signifie que l'une est convergente lorsque l'autre l'est et aussi que l'une est divergente lorsque l'autre l'est.

Proposition 2.8 (Règle de d'Alembert). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives. Supposons que, lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient u_{n+1}/u_n ait une limite l , finie ou égale $+\infty$. Alors :

- (i) Si $l < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente.
- (ii) Si $l > 1$, cette série est divergente.

(iii) Si $l = 1$, on ne peut rien dire a priori.

Exemple 2.1 (Application de la règle de d'Alembert). Soit x un nombre réel arbitraire et fixé, nous allons montrer au moyen de la règle de d'Alembert que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente, ce qui revient à dire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente. Il est clair que la convergence a lieu lorsque $x = 0$, puisque dans ce cas particulier tous les termes de la série deviennent nuls à l'exception du premier d'entre eux ($n = 0$) qui vaut 1. Nous supposons désormais que $x \neq 0$. Intéressons nous alors au quotient $\frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!}$. L'égalité $(n+1)! = (n+1)n!$ implique que $\frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \frac{|x|}{n}$, ce qui montre que ce quotient tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, en appliquant la règle de d'Alembert on obtient la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$.

On admet l'important résultat suivant : e^x (que l'on note encore par $\exp(x)$) l'exponentielle d'un nombre réel arbitraire x vérifie :

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.7)$$

Proposition 2.9 (Série de Riemann). Soit α un nombre réel fixé. Considérons la série à termes strictement positifs suivante appelée série de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha}. \quad (2.8)$$

Cette série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exercice 2.14. En utilisant les Propositions 2.7 et 2.9 étudier la convergence des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{100 + \sqrt{n}}.$$

Théorème 2.3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives.

(i) Supposons qu'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

(ii) Supposons qu'il existe un nombre réel $\alpha \leq 1$ tel que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

(iii) Supposons que la suite $(n^{-1} u_n)_{n \geq 1}$ est minorée par un nombre réel strictement positif. Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

3 Compléments sur les intégrales

Remarques 3.1.

(i) Pour tous nombres réels λ_1 et λ_2 , on a

$$\int_a^b (\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)) dx = \lambda_1 \int_a^b g_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b g_2(x) dx.$$

(ii) Relation de Chasles : pour tout $c \in [a, b]$, on a

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b g(x) dx.$$

(iii) On a $\int_a^b g(x) dx \geq 0$ lorsque $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$; il en résulte que $\int_a^b g_2(x) dx \geq \int_a^b g_1(x) dx$, lorsque, pour tout $x \in [a, b]$, $g_2(x) \geq g_1(x)$.

(iv) On a $\int_a^b |g(x)| dx \geq \left| \int_a^b g(x) dx \right|$.

(v) Inégalité de la moyenne : $\int_a^b |g(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$.

(vi) Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b g_1(x) g_2(x) dx \leq \sqrt{\int_a^b (g_1(x))^2 dx} \times \sqrt{\int_a^b (g_2(x))^2 dx}.$$

Exercice 3.1. 1) Montrer que $\int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3$.

2) Montrer que

$$\int_0^2 (x^2 - 2x + 1) e^{-3x/2} dx \leq \sqrt{\frac{2(1-e^{-6})}{15}}.$$

Définition 3.1. On dit qu'une fonction g est continûment dérivable sur un intervalle I lorsque g est dérivable sur I et sa fonction dérivée est continue sur I .

Théorème 3.1 (intégration par parties). Soient g_1 et g_2 deux fonctions continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b g_1(x)g_2'(x) dx = [g_1(x)g_2(x)]_a^b - \int_a^b g_1'(x)g_2(x) dx .$$

Exercice 3.2. Calculer $\int_0^1 (2x+1)e^{-x/2} dx$; $\int_{-2}^2 x^2 e^{-x^2/2} dx$; $\int_2^4 (x^3-2x) \ln(x) dx$.

Théorème 3.2 (changement de variable). Soit φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$. Supposons que g est une fonction continue sur l'intervalle fermé borné dont les extrémités sont $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. On a alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x) dx = \int_a^b (g(\varphi(t))) \varphi'(t) dt .$$

Exercice 3.3. Calculer $\int_2^4 x^{-1} \sqrt{\ln(x)+1} dx$; $\int_1^3 x^{1/2} e^{-\sqrt{x}} dx$.

Définition 3.2 (intégrale généralisée sur un intervalle borné fermé à gauche et ouvert à droite). Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit g une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ qui est ouvert en b . Si la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge et on pose :

$$\int_a^b g(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x g(t) dt .$$

Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale généralisée diverge.

Exercice 3.4. 1) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 (1-t)^{-1/2} dt$ est convergente.

2) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 (1-t)^{-2} dt$ est divergente.

3) Soit α un nombre réel arbitraire, quelles sont les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dt$ est convergente, et quelles sont celles pour lesquelles elle est divergente ?

Exercice 3.5. 1) Préciser ce que c'est qu'un intervalle borné ouvert à gauche et fermé à droite, et donner la définition de l'intégrale généralisée dans ce cas.

2) Soit α un nombre réel arbitraire, quelles sont les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ est convergente, et quelles sont celles pour lesquelles elle est divergente ?

Définition 3.3 (intégrale généralisée sur un intervalle non borné fermé à gauche). Soit a un nombre réel, et soit g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Si la fonction $G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge et on pose :

$$\int_a^{+\infty} g(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x g(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale généralisée diverge.

Exercice 3.6. Soit a un nombre réel strictement positif arbitraire, et soit α un nombre réel arbitraire, quelles sont les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ est convergente, et quelles sont celles pour lesquelles elle est divergente ?

Exercice 3.7. 1) Préciser ce que c'est qu'un intervalle non borné fermé à droite, et donner la définition de l'intégrale généralisée dans ce cas.
2) Soit d un nombre réel strictement négatif arbitraire, et soit α un nombre réel arbitraire, quelles sont les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^d |t|^{-\alpha} dt$ est convergente, et quelles sont celles pour lesquelles elle est divergente ?

Définition 3.4 (intégrale généralisée sur un intervalle ouvert). On suppose que $a = -\infty$ ou que a est un nombre réel arbitraire. On suppose que $b = +\infty$ ou que b est un nombre réel arbitraire vérifiant $b > a$. Désignons par g une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$, et désignons par c un nombre réel arbitraire qui est strictement compris entre a et b . On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est convergente si et seulement si les deux intégrales généralisées $\int_a^c g(t) dt$ et $\int_c^b g(t) dt$ sont toutes les deux convergentes, et lorsque cette condition est remplie on pose

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt.$$

Lorsque au moins l'une des deux intégrales généralisées $\int_a^c g(t) dt$ et $\int_c^b g(t) dt$ est divergente, alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est divergente.

Exercice 3.8. Soit α un nombre réel arbitraire, étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha} dt$.

Définition 3.5. On suppose que a , b et g sont comme dans la Définition 3.4. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est absolument convergente, lorsque l'intégrale généralisée $\int_a^b |g(t)| dt$ est convergente.

Théorème 3.3. Toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

Proposition 3.1. On suppose que a et b sont comme dans la Définition 3.4. Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues sur $]a, b[$ dont toutes les valeurs sont des nombres réels positifs. Supposons de plus que l'on a $g_1(x) \leq g_2(x)$, pour tout $x \in]a, b[$ alors les deux résultats suivants sont vérifiés.

- (i) Lorsque $\int_a^b g_2(t) dt$ est convergente $\int_a^b g_1(t) dt$ l'est aussi.
- (ii) Lorsque $\int_a^b g_1(t) dt$ est divergente $\int_a^b g_2(t) dt$ l'est aussi.

Exercice 3.9. Etudier la convergence des intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} (1+x^2)^{-1} dx$ et $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Proposition 3.2. Soit a un nombre réel arbitraire, et soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'il existe un réel α strictement plus grand que 1 tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha g(t) = 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ est absolument convergente.

Proposition 3.3. Soit a un nombre réel arbitraire, et soit g est une fonction continue sur $] -\infty, a]$. Supposons qu'il existe un réel α strictement plus grand que 1 tel que $\lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^\alpha g(t) = 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a g(t) dt$ est absolument convergente.

Proposition 3.4. Soient u et v deux nombres réels arbitraires et tels que $u < v$. Soit g une fonction continue sur $[u, v]$. Supposons qu'il existe un réel α strictement plus petit que 1 tel que $\lim_{t \rightarrow v^-} (v-t)^\alpha g(t) = 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_u^v g(t) dt$ est absolument convergente.

Proposition 3.5. Soient u et v deux nombres réels arbitraires et tels que $u < v$. Soit g une fonction continue sur $]u, v]$. Supposons qu'il existe un réel α strictement plus petit que 1 tel que $\lim_{t \rightarrow u^+} (t-u)^\alpha g(t) = 0$. Alors l'intégrale généralisée $\int_u^v g(t) dt$ est absolument convergente.

4 Éléments de calcul matriciel

Définition 4.1. Une matrice de format (n, p) est un tableau de nombres (appelés les coefficients ou encore les éléments de la matrice) ayant n lignes et p colonnes et qui est présenté entre deux grandes parenthèses.

En général une matrice est notée par une lettre majuscule par exemple A , B , C ou D . Le coefficient de la matrice A qui se trouve à la i -ième ligne et j -ième colonne est noté par a_{ij} . Ainsi, on peut représenter A par le tableau

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

ou de façon plus concise par $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, ou encore plus simplement par $(a_{i,j})$.

Remarques 4.1.

- (a) La matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0 (à zéro) est appelée matrice nulle.
- (b) Toute matrice de format $(1, p)$ est appelée matrice ligne ou vecteur ligne.
- (c) Toute matrice de format $(n, 1)$ est appelée matrice colonne ou vecteur colonne.

Exercice 4.1. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1,3 \\ \sqrt{2} & 2,56 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3,1 & 2,23 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0,23 \\ -3,2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Donner le format de chacune de ces matrices
- 2) Que valent a_{12} , a_{21} , b_{13} , c_{21} et o_{22} ?
- 3) Quelles sont les vecteurs lignes de la matrice A et quelles sont ses vecteurs colonnes ?
- 4) Comment s'appelle la matrice O ?

Question 4.1. Quand dit-on que deux matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n', 1 \leq j \leq p'}$ sont égales ?

Exercice 4.2. Parmi les quatre matrices suivantes quelles sont celles qui sont égales ? Quelles sont celles qui sont carrées ?

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Définition 4.2. La transposée d'une matrice T est la matrice notée par T' (ou encore tT , ou encore T^*) dont les lignes sont obtenues en alignant les colonnes de la matrice T . Ainsi, lorsque T est de format (n, p) alors T' est de format (p, n) . Par exemple, la transposée de la matrice A de l'Exercice 4.1 est la matrice A' de format $(2, 3)$ telle que $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & -1,3 & 2,56 \end{pmatrix}$.

Définitions 4.1.

- (a) On dit qu'une matrice A est carrée lorsqu'elle a le même nombre de lignes et de colonnes, ce nombre est alors appelé l'ordre de la matrice.
- (b) On dit qu'une matrice carrée $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est diagonale lorsque tous les coefficients de T qui ne se trouvent pas sur la diagonale sont nuls : pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ on a $t_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- (c) On dit qu'une matrice diagonale d'ordre n est la matrice identité d'ordre n (ou encore la matrice unité d'ordre n) si tous les coefficients qui se trouvent sur la diagonale sont égaux à 1. La matrice identité d'ordre n est notée par I_n (ou encore par I).
- (d) On dit qu'une matrice carrée $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique si deux de ses sont égaux à chaque fois qu'ils sont situés à des positions symétriques par rapport à la diagonale ; plus précisément, on a $t_{ij} = t_{ji}$ pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Ainsi une matrice symétrique est égale à sa matrice transposée. Toute matrice diagonale est symétrique.

Exercice 4.3. Donner un exemple de matrice diagonale, et un autre exemple d'une matrice qui n'est pas diagonale mais qui est symétrique.

Définition 4.3 (Produit d'une matrice par un nombre réel). Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) et λ un nombre réel, alors le produit de λ par A est la matrice de même format que A , notée par $\lambda A = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, et dont les coefficients c_{ij} vérifient $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Par exemple, lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1,3 \\ \sqrt{2} & 2,56 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 3$ on a alors

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 0 & 3 \times (-1,3) \\ 3 \times \sqrt{2} & 3 \times 2,56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3,9 \\ 3\sqrt{2} & 7,68 \end{pmatrix}$$

Définition 4.4 (somme de deux matrices). Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ deux matrices de même format (n, p) , alors la somme de A et de B est la matrice de même format (n, p) que A et B , notée par $A + B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et dont les coefficients c_{ij} vérifient $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 4 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1. *La somme de deux matrices qui ne sont pas de même format n'existe pas.*

Définition 4.5 (produit de deux matrices). Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ une matrice de format (p, q) . Notons que le nombre de colonnes de la première matrice (c'est-à-dire ici de A) doit être égal au nombre de lignes de la seconde matrice (c'est-à-dire ici de B). Alors le produit de la matrice A par la matrice B , prises dans cet ordre, est une matrice de format (n, q) (elle a le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B); notée par $AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q}$ et dont les coefficients c_{ij} vérifient

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors AB est une matrice $(2, 3)$ et on a

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 3 + (-1) \times (-1) & 1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 0 \\ 0 \times 1 + 4 \times 1 + 2 \times 2 & 0 \times 0 + 4 \times 3 + 2 \times (-1) & 0 \times 1 + 4 \times (-1) + 2 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarques 4.2.

- (a) Lorsque le nombre de colonnes de la matrice A n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice B alors le produit matriciel AB n'existe pas.
- (b) Il ne faut pas confondre le produit matriciel AB avec le produit matriciel BA . L'un des deux produits matriciels peut exister sans que l'autre existe (c'est le cas dans l'exemple qu'on vient de traiter). De plus même si les deux produits AB et BA existent on a souvent $AB \neq BA$; par exemple lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (c) Le produit matriciel est associatif : pour toutes matrices A , B et C tels que les produits AB et BC existent, on a $(AB)C = A(BC)$.
- (d) Le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition : quelles que soient les matrices A , B et C telles que $B + C$, AB et AC existent, on a $A(B + C) = AB + AC$.
- (e) Lorsqu'il existe, le produit d'une matrice par une matrice nulle donne une matrice nulle. D'un autre côté, si A est une matrice non nulle et si B est une matrice non nulle le produit AB , lorsqu'il existe, peut quand même être égal à la matrice nulle ; on peut par exemple prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (f) Le produit d'une matrice par sa transposée existe toujours et donne une matrice carrée symétrique.

Définitions 4.2 (valeur propre et vecteur propre). Soit A une matrice carrée d'ordre n , on dit qu'un nombre réel λ est une valeur propre de A , s'il existe E une matrice (ou vecteur) colonne non nulle de format $(n, 1)$ telle que $AE = \lambda E$. Ce vecteur colonne E est appelé vecteur propre de la matrice A associée à la valeur

propre λ . Supposons par exemple que $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de la matrice A et un vecteur propre associé est $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.1. Soient p variables statistiques quantitatives

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, X_p = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$$

qui ont été observées sur un échantillon de n individus. Les moyennes empiriques de ces variables sont

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i1}, \dots, \bar{x}^p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ip}$$

Désignons par X_c la matrice de format (n, p) dont les colonnes sont les versions recentrées des variables $X_1, \dots, X_p$, c'est-à-dire les variables $X_1, \dots, X_p$ auxquelles on a soustrait leur moyenne. Autrement dit on a

$$X_c = \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}^1 & \cdots & x_{1p} - \bar{x}^p \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} - \bar{x}^1 & \cdots & x_{np} - \bar{x}^p \end{pmatrix}$$

Désignons enfin par $V = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice carrée d'ordre n telle que

$$\frac{1}{n} X_c' X_c,$$

où X_c' est la matrice transposée de la matrice X_c . Alors les coefficients s_{ij} de la matrice V vérifient

$$s_{ij} = (\text{Covariance empirique des variables } X_i \text{ et } X_j)$$

C'est pour cela que la matrice V s'appelle **matrice des variances-covariances des variables** $X_1, \dots, X_p$.

Exemple 4.1. Supposons que $p = 2$, $n = 3$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a

$$\bar{x}^1 = \frac{1+2+3}{3} = 2 \quad \text{et} \quad \bar{x}^2 = \frac{2+0+4}{3} = 2$$

D'où

$$X_c = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-2 \\ 2-2 & 0-2 \\ 3-2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Définition 4.6. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, alors le **déterminant** de A , que l'on note par $\det(A)$ ou encore par $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, est défini par

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ on a $\det(A) = 1 \times 4 - (-1) \times 2 = 6$

Définition 4.7. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3, alors le **dé-**

terminant de A , que l'on note par $\det(A)$ ou encore par $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

est défini par

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1}^*) + (-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2}^*) + (-1)^{i+3}a_{i3}\det(A_{i3}^*) \\ &= (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}^*) + (-1)^{2+j}a_{2j}\det(A_{2j}^*) + (-1)^{3+j}a_{3j}\det(A_{3j}^*),\end{aligned}$$

où i et j sont des entiers naturels arbitraires compris entre 1 et 3, et où, pour tous $k = 1, 2, 3$ et $l = 1, 2, 3$, on désigne par A_{kl}^* la matrice carrée d'ordre 2 obtenue en supprimant la k -ième ligne et la l -ième colonne de la matrice A .

Par exemple, supposons que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a en prenant $i = 1$,

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1 \times 1 - 0 \times 1) + 0 + (2 \times 0 - 3 \times 1) = 1 - 3 = -2\end{aligned}$$

On a en prenant $j = 1$,

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1 \times 1 - 0 \times 1) - 2 \times (0 \times 1 - 0 \times 1) + 3 \times (0 \times 1 - 1 \times 1) = 1 - 3 = -2\end{aligned}$$

Mais le plus avantageux pour faire le moins de calculs possible c'est de prendre $j = 2$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (1 \times 1 - 3 \times 1) = -2\end{aligned}$$

Définition 4.8. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n ,

alors le déterminant de A , que l'on note par $\det(A)$ ou encore par $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

est défini par

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{i+l} a_{il} \det(A_{il}^*) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}^*),$$

où i et j sont des entiers naturels arbitraires compris entre 1 et n , et où, pour tous $k = 1, 2, \dots, n$ et $l = 1, 2, \dots, n$, on désigne par A_{kl}^* la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la k -ième ligne et la l -ième colonne de la matrice A .

Définition 4.9. On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** lorsqu'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I$, où I désigne la matrice identité. On dit aussi que B est l'inverse de A et on note B par A^{-1} .

Théorème 4.1. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Proposition 4.2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 de déterminant non nul, on a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$