Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Processus Stochastiques, sujet d'oral de rattrapage numéro 2
le 28 février 2013

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1 Le processus stochastique $\{B(t)\}_{t\in[0,1]}$, qui est défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, désigne la version à trajectoires continues du mouvement brownien standard. On note par $C_0^1\big([0,1]\big)$ l'espace des fonctions f à valeurs réelles qui sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et vérifient $f(0) = f(1) = 0$.
1) Soit $f \in C_0^1\big([0,1]\big)$ et $\omega \in \Omega$.
a) Montrer que l'intégrale

$$I(f,\omega) = -\int_0^1 f'(t)B(t,\omega)\,dt\,,$$

existe et, qu'elle est finie.
b) Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(k/n)B(k/n,\omega) = I(f,\omega)\ ;$$

en déduire que $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.
2) Soient $f_1, f_2 \in C_0^1\big([0,1]\big)$, montrer que $\big(I(f_1), I(f_2)\big)$ est un vecteur gaussien centré dont la matrice de variances-covariances est :

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 |f_1(t)|^2\,dt & \int_0^1 f_1(t)f_2(t)\,dt \\ \int_0^1 f_1(t)f_2(t)\,dt & \int_0^1 |f_1(t)|^2\,dt \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[0,1]}$ *un pont brownien*, c'est-à-dire un processus gaussien centré, à valeurs réelles, et dont la fonction de covariance est donnée pour tous $s,t \in [0,1]$, par

$$\mathbb{E}\big(\widetilde{X}_s\widetilde{X}_t\big) = \big(\min\{s,t\}\big)\big(1-\max\{s,t\}\big).$$

1) Montrer que $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in[0,1]}$ admet une version, noté par $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$, dont les trajectoires sont avec probabilité 1, des fonctions hölderiennes d'ordre γ, pour tout $\gamma \in [0,1/2[$.
2) Montrer que $\{X_{1-t}\}_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien et que le processus $\{Z_t\}_{t\in[0,1]}$ défini pour tout t par,

$$Z_t = (t+1)X_{t/(t+1)}$$

est un mouvement brownien.
3) Soit $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien standard et soit $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ le processus défini pour tout t par, $Y_t = B_t - tB_1$. Montrer que $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien.