Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de Processus Stochastiques
7 janvier 2011 (durée 3 heures)

Tous les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Soit $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien standard et soit a un réel non nul fixé une fois pour toute.
1) Désignons par s et t deux réels arbitraires vérifiant $0 \leq s \leq t$. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big(a(B_t - B_s)\big)\Big] = \exp\Big(\frac{1}{2}a^2(t-s)\Big).$$

2) Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, c'est-à-dire que pour tout t, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s\ :\ 0 \leq s \leq t)$. Désignons par $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini pour tout t par,

$$M_t = \exp\Big(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t\Big).$$

Montrer que $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est ume martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Exercice 2 $H \in]0,1[\setminus\{1/2\}$ est un paramètre fixé une fois pour toute. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, f_t est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie quelque soit $s \in \mathbb{R}\setminus\{0,-t\}$ par:

$$f_t(s) = \big|t+s\big|^{H-1/2} - \big|s\big|^{H-1/2};$$

de plus par convention on suppose que $f_t(0) = f_t(-t) = 0$.
1) Montrer que pour tout t, la fonction f_t appartient à $L^2(\mathbb{R})$, l'espace de Hilbert des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable au sens de Lebesgue.
2) Montrer qu'il existe un processus Gaussien centré à valeurs réelles, noté par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, qui vérifie pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\big[X(t_1)X(t_2)\big] = \int_{\mathbb{R}} f_{t_1}(s) f_{t_2}(s)\, ds.$$

3) Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}\left[\big(X(t_1) - X(t_2)\big)^2\right] = \int_{\mathbb{R}} \Big(f_{t_1}(s) - f_{t_2}(s)\Big)^2 ds,$$

puis que

$$\mathbb{E}\left[\big(X(t_1) - X(t_2)\big)^2\right] = c|t_1 - t_2|^{2H},$$

où $c = \mathbb{E}\big[(X(1))^2\big]$.
4) Montrer que pour tout réel $T > 0$ fixé, on peut construire $\{\widetilde{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ une version du processus $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ vérifiant la propriété suivante : il existe Ω^* un événement de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$, l'application $t \mapsto \widetilde{X}(t,\omega)$ est une fonction Hölderienne sur $[0,T]$

d'ordre γ, où γ est un réel positif arbitraire vérifiant $\gamma < H$.
5) Désignons par a un réel strictement positif arbitraire et fixé. Soient $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ les processus définis pour tout t, par $Y(t) = X(at)$ et $Z(t) = a^H X(t)$. Montrer que ces deux processus ont les mêmes lois finies dimensionnelles.

Problème On désigne par $\{B(t)\}_{t\in[0,1]}$ la restriction à l'intervalle $[0,1]$ de la version à trajectoires continues du mouvement Brownien standard. On suppose que ce mouvement Brownien est défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On a vu en cours, qu'il existe $\{\epsilon_0\} \cup \{\epsilon_{j,k} : j \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \le k \le 2^j\}$ une suite de variables aléatoires Gaussiennes centrées et réduites définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et il existe un événement $\Omega^* \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, tels que pour tous $\omega \in \Omega^*$ et $t \in [0,1]$,

$$B(t,\omega) = t\epsilon_0(\omega) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t)\epsilon_{j,k}(\omega), \tag{$*$}$$

où pour tous j et k, la fonction $\Delta_{j,k}$ vérifie pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Delta_{j,k}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right], \\ 2^{j/2}\left(t - \frac{k-1}{2^j}\right) \text{ si } t \in \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k-1/2}{2^j}\right], \\ 2^{j/2}\left(\frac{k}{2^j} - t\right) \text{ si } t \in \left[\frac{k-1/2}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]. \end{cases} \tag{$**$}$$

Rappelons enfin qu'on a montré en cours qu'il existe une variable aléatoire C^* définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que pour tout $\omega \in \Omega^*$, pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \ldots, 2^j\}$, on a

$$\left|\epsilon_{j,k}(\omega)\right| \le C^*(\omega)\sqrt{1+j}. \tag{$***$}$$

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Partie I: Désignons par t' et t'' deux réels arbitraires, fixés une fois pour toute, vérifiant $0 \le t' < t'' < 1$. On note par $j_0 \in \mathbb{N}$, l'unique entier tel que $2^{-j_0-1} < t'' - t' \le 2^{-j_0}$. Pour tous $j \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega^*$ et $t \in [0,1]$, on pose

$$F_j(t,\omega) = \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t)\epsilon_{j,k}(\omega).$$

1) Montrer que pour tout $t \in [0,1[$ et tout $j \in \mathbb{N}$, il existe un unique entier noté par $k_j(t)$ appartenant à $\{1, \ldots, 2^j\}$ tel que $t \in \left[\frac{k_j(t)-1}{2^j}, \frac{k_j(t)}{2^j}\right[$.
2) a) Montrer que pour tous $t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega^*$ et $j \in \mathbb{N}$, on a $|F_j(t,\omega)| \le C^*(\omega)\, 2^{-j/2-1}\sqrt{1+j}$.
b) Montrer que $\sum_{j=j_0}^{+\infty} 2^{-j/2}\sqrt{1+j} \le c_1 2^{-j_0/2}\sqrt{1+j_0}$, où $c_1 = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{-l/2}\sqrt{1+l}$.
c) Montrer que pour tous $t \in [0,1]$ et $\omega \in \Omega^*$,

$$\sum_{j=j_0}^{+\infty} \left|F_j(t,\omega)\right| \le 2^{-1/2}\, C^*(\omega)\, c_1 \sqrt{(t''-t')\big(1 + \log_2((t''-t')^{-1})\big)},$$

où $\log_2$ désigne le logarithme base 2.

3) Supposons que $j_0 \geq 1$ et désignons par j un entier naturel arbitraire vérifiant $j < j_0$.

a) Montrer que $k_j(t'') \in \{k_j(t'), k_j(t') + 1\}$.

b) Montrer que $\left|\Delta_{j,k_j(t'')}(t'') - \Delta_{j,k_j(t')}(t')\right| \leq 2^{j/2+1}(t'' - t')$.

c) Dans le cas où $k_j(t'') = k_j(t') + 1$, montrer que $\Delta_{j,k_j(t'')}(t'') \leq 2^{j/2}(t'' - t')$.

d) Montrer que $\left|F_j(t'', \omega) - F_j(t', \omega)\right| \leq C^*(\omega)(t'' - t')\, 2^{j/2+2} \sqrt{1 + j}$.

e) Montrer que

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} \left|F_j(t'', \omega) - F_j(t', \omega)\right| \leq 4\big(2^{1/2} - 1\big)^{-1} C^*(\omega) \sqrt{(t'' - t') \log_2((t'' - t')^{-1})}.$$

4) Montrer que

$$\left|B(t'', \omega) - B(t', \omega)\right| \leq \widetilde{C}(\omega)\sqrt{(t'' - t')\big(1 + \log_2((t'' - t')^{-1})\big)},$$

où $\widetilde{C}(\omega)$ est un réel qui ne dépend pas de t' et t''.

Partie II: 1) Soit Z une variable aléatoire Gaussienne centrée et réduite, montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(Z > x) \geq \frac{(2\pi)^{-1/2}\, x}{x^2 + 1} e^{-x^2/2}\,;$$

on pourra étudier le sens de variation de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = xe^{-x^2/2} - (x^2 + 1) \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du$.

2) Désormais, nous notons par c une constante déterministe vérifiant $0 < c < \sqrt{2 \log 2}$, où log désigne le logarithme népérien. Pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \ldots, 2^j\}$ nous désignons par $A_{j,k}$ l'événement,

$$A_{j,k} = \left\{\omega \in \Omega \,:\, \left|B\Big(\frac{k}{2^j}, \omega\Big) - B\Big(\frac{k-1}{2^j}, \omega\Big)\right| \geq c\, 2^{-j/2} \sqrt{j}\right\}.$$

a) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \ldots, 2^j\}$, on a $\mathbb{P}(A_{j,k}) = \mathbb{P}(A_{j,1})$.

b) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(A_{j,1}) \geq \frac{(2\pi)^{-1/2}\, c\sqrt{j}}{c^2 j + 1} e^{-c^2 j/2}.$$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

d) Désignons par $A_{j,k}^c$ l'événement contraire de $A_{j,k}$. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{2^j} A_{j,k}^c\Big) < +\infty.$$

e) Montrer qu'il existe un événement Ω^{**} de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega^{**}$ et tout réel $\alpha < 1/2$,

$$\sup\left\{\frac{\left|B(t'', \omega) - |B(t', \omega)\right|}{\left|t'' - t'\right|^{1/2}\big(1 + \log_2((t'' - t')^{-1})\big)^{\alpha}} \,:\, t'', t' \in [0, 1] \text{ et } t'' \neq t'\right\} = +\infty.$$