Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de Processus Stochastiques
Le 9 janvier 2014 (durée 3 heures)

Tous les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Le sujet de l'examen consiste en un problème dont les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Dans tout ce problème, $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$ désigne un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; de plus, on suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue sur $[0,1]$ et vérifie $W_0(\omega) = 0$. Dans tout ce problème, l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$, est noté par C ; il est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et de $\mathcal{B}_C$ la σ-algèbre borélienne.

Partie I Soient m et M, les variables aléatoires réelles définies par $m = \min_{t\in[0,1]} W_t$ et $M = \max_{t\in[0,1]} W_t$. On note par $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mutuellement indépendantes, identiquement distribuées, et vérifiant

$$P(\xi_l = 1) = P(\xi_l = -1) = 1/2\,, \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}^* \;;$$

de plus on désigne par $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$, la suite des variables aléatoires telles que pour tout $\omega \in \Omega$ on a, $S_0(\omega) = 0$ et quelque soit $i \in \mathbb{N}^*$,

$$S_i(\omega) = \sum_{l=1}^{i} \xi_l(\omega).$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $m_n = \min_{0\le i\le n} S_i$ et $M_n = \max_{0\le i\le n} S_i$.
1) Soit $H : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne), la fonction définie pour tout $x \in C$ par

$$H(x) = \big(\min_{t\in[0,1]} x(t), \max_{t\in[0,1]} x(t), x(1)\big).$$

a) Montrer que H est une fonction lipschitzienne.

b) En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, le vecteur aléatoire $n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n)$ converge en loi vers (m, M, W_1).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on pose $p_n(j) = P\big(\{\omega \in \Omega : S_n(\omega) = j\}\big)$; de plus pour tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$, vérifiant

$$a \le 0 \le b \quad \text{et} \quad a < b \quad \text{et} \quad a \le v \le b, \tag{$*$}$$

on pose

$$p_n(a,b,v) = P\big(\{\omega \in \Omega :\; a < m_n(\omega) \le M_n(\omega) < b \;\text{ et }\; S_n(\omega) = v\}\big).$$

a) Montrer que les séries $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2k(b-a)\big)$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big)$ sont convergentes.

b) On désigne par $\mathcal{E}(n,a,b,v)$ l'égalité :

$$p_n(a,b,v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2k(b-a)\big) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big).$$

(i) Montrer que $\mathcal{E}(n, 0, b, v)$ est vraie pour tous $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{N}$, tels que $v \leq b$.

(ii) Montrer que $\mathcal{E}(n, a, 0, v)$ est vraie pour tous $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}_-^*$ et $v \in \mathbb{Z}_-$, tels que $a \leq v$.

(iii) On admet que $\mathcal{E}(0, a, b, v)$ est vraie pour tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant $(*)$; au moyen d'un raisonnement par récurrence sur n, montrer que $\mathcal{E}(n, a, b, v)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant $(*)$.

3) Soient $a, b, u, r \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$a \leq 0 \leq b \quad \text{et} \quad a \leq u < r \leq b,$$

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} &P(a < m_n \leq M_n < b, u < S_n < r) \\ &\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(u + 2k(b-a) < S_n < r + 2k(b-a)\big) \\ &\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(2b - r + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)\big). \end{aligned}$$

4) Soit l'ensemble $\Theta = \big\{(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \mathbb{R}^4 : \alpha' < \beta' \text{ et } \alpha' \leq \gamma' < \delta' \leq \beta'\big\}$; nous désignons par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ un élément fixé de Θ qui vérifie $\alpha \leq 0$ et $\beta \geq 0$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$a_n = [\alpha n^{1/2}],\ b_n = -[-\beta n^{1/2}],\ u_n = [\gamma n^{1/2}] \text{ et } r_n = -[-\delta n^{1/2}],$$

où $[\,\cdot\,]$ désigne la fonction partie entière. Montrer que le vecteur $n^{-1/2}(a_n, b_n, u_n, r_n)$ appartient à Θ, et que ce vecteur converge vers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, nous notons par $A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}$ le sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^3$ défini par $A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha' < x \leq y < \beta' \text{ et } \gamma' < z < \delta'\big\}$; nous admettons que pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, on a

$$P\big((m, M, W_1) \in \partial A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}\big) = 0,$$

où $\partial A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}$ désigne la frontière de $A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}$. Montrer que pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, on a

$$P\big((m, M, W_1) \in A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}\big) = \lim_{n \to +\infty} P\big(n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n) \in A_{\alpha',\beta'}^{\gamma',\delta'}\big)$$

et en déduire que

$$P\big(\alpha < m \leq M < \beta, \gamma < W_1 < \delta\big) = \lim_{n \to +\infty} P\big(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n\big).$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$g_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma + 2k(\beta-\alpha)}^{\delta + 2k(\beta-\alpha)} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{et} \quad h_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\beta - \delta + 2k(\beta-\alpha)}^{2\beta - \gamma + 2k(\beta-\alpha)} e^{-x^2/2}\, dx \ ;$$

montrer que

$$g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\lim_{n\to+\infty}P\big(u_n+2k(b_n-a_n)<S_n<r_n+2k(b_n-a_n)\big)$$

et que

$$h_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\lim_{n\to+\infty}P\big(2b_n-r_n+2k(b_n-a_n)<S_n<2b_n-u_n+2k(b_n-a_n)\big).$$

d) Au moyen de 3), 4)a), 4)b) et 4)c), montrer que

$$P(\alpha<m\leq M<\beta,\gamma<W_1<\delta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-h_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\big).$$

Partie II Soit $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ le processus stochastique, appelé pont brownien, défini par :

$$Y_t(\omega)=W_t(\omega)-t\,W_1(\omega),\quad \text{pour tout } (t,\omega)\in[0,1]\times\Omega.$$

1) Montrer que $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré dont les trajectoires sont des fonctions continues.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit l'événement $A_n=\big\{\omega\in\Omega:0<W_1(\omega)<n^{-1}\big\}$, montrer que $P(A_n)>0$ et que $\big|n(2\pi)^{1/2}P(A_n)-1\big|<n^{-2}/2$.
3) On note par Y la variable aléatoire de $(\Omega,\mathcal{F},P)$ dans $(C,\mathcal{B}_C)$ induite par le pont brownien $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$; plus précisément, pour tout $\omega\in\Omega$, $Y(\omega)$ est la trajectoire $t\longmapsto Y_t(\omega)$. On désigne par $\mathbb{P}_Y$ la loi de la variable aléatoire Y, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathbb{P}_Y(B)=P\big(Y^{-1}(B)\big),\quad \text{pour tout } B\in\mathcal{B}_C,$$

où $Y^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:Y(\omega)\in B\}$ est l'image réciproque de B par Y. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{Q}_n$, la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathcal{Q}_n(B)=P\big(Y^{-1}(B)/A_n\big)=\frac{P\big(A_n\cap Y^{-1}(B)\big)}{P(A_n)},\quad \text{pour tout } B\in\mathcal{B}_C.$$

a) Nous supposons que $k\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\dots,t_k\in[0,1]$ sont arbitraires et fixés. Montrer que la variable aléatoire W_1 est indépendante du vecteur aléatoire $(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})$. On pourra utiliser le fait que pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, tout vecteur gaussien centré Z à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et dont les coordonnées sont linéairement indépendantes, admet une densité de probabilité f_Z, telle que pour tout $z\in\mathbb{R}^d$,

$$f_Z(z)=(2\pi)^{-d/2}\big(\det\big(\textstyle\sum_Z\big)\big)^{-1/2}\exp\Big(-2^{-1}z^*\textstyle\sum_Z^{-1}z\Big)\ ;$$

où z est identifié à une matrice colonne dont la transposée est notée z^*, et où $\sum_Z^{-1}$ désigne l'inverse de $\sum_Z$ la matrice de variances-covariances de Z.

b) Nous supposons que D est un cylindre de C, autrement dit, il existe $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $t_1,\dots,t_k\in[0,1]$, et il existe V un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^k$, tels que

$$D=\big\{x\in C:(x(t_1),\dots,x(t_k))\in V\big\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{Q}_n(D) = \mathbb{P}_Y(D)$; en déduire que $\mathcal{Q}_n(B) = \mathbb{P}_Y(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}_C$.

4) On note par W la variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(C, \mathcal{B}_C)$ induite par le mouvement brownien $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$; plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, $W(\omega)$ est la trajectoire $t \longmapsto W_t(\omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{H}_n$, la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathcal{H}_n(B) = P\big(W^{-1}(B)/A_n\big) = \frac{P\big(A_n \cap W^{-1}(B)\big)}{P(A_n)}, \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}_C,$$

où $W^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : W(\omega) \in B\}$ est l'image réciproque de B par W. Enfin, pour tout $x \in C$ et $O \subset C$, on pose $\mathrm{dist}(x, O) = \inf\big\{\|x - z\|_\infty : z \in O\big\}$, avec la convention que $\mathrm{dist}(x, O) = +\infty$ lorsque O est l'ensemble vide.

a) Soit F un sous-ensemble fermé arbitraire de C, montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n(F) \le \mathcal{Q}_n(F_n)$, où F_n est le sous-ensemble de C défini par $F_n = \big\{x \in C : \mathrm{dist}(x, F) \le n^{-1}\big\}$.

b) Au moyen de 4)a) et 3)b), montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathbb{P}_Y$.

5) Soient ν et μ, les variables aléatoires réelles définies par $\nu = \min_{t\in[0,1]} Y_t$ et $\mu = \max_{t\in[0,1]} Y_t$. Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha \le 0 < \beta$. Nous notons par $\Lambda_{\alpha,\beta}$ le sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Lambda_{\alpha,\beta} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x \le y < \beta\big\}$; nous admettons que

$$P\big((\nu, \mu) \in \partial\Lambda_{\alpha,\beta}\big) = 0,$$

où $\partial\Lambda_{\alpha,\beta}$ désigne la frontière de $\Lambda_{\alpha,\beta}$.

a) Soit $\Phi : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne), la fonction définie pour tout $x \in C$ par

$$\Phi(x) = \big(\min_{t\in[0,1]} x(t), \max_{t\in[0,1]} x(t)\big).$$

Montrer que Φ est lipschitzienne et en déduire que l'on a

$$\mathbb{P}_Y\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big),$$

où $\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})$ est l'image réciproque de $\Lambda_{\alpha,\beta}$ par Φ.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \ge \beta^{-1}$, et pour tout $x \in [0, 1/n]$, on a

$$\begin{aligned}&\left|\exp\Big(-2^{-1}\big(x + 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right| \\ &\le 2\,n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha)\bigg(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\bigg).\end{aligned}$$

c) Au moyen de 5)b), montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} n(2\pi)^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\alpha, \beta, 0, n^{-1}),$$

et en déduire que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{P(A_n)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\alpha, \beta, 0, n^{-1}) \;;$$

rappelons que (voir 4)c) de la Partie I),

$$g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{2k(\beta-\alpha)}^{n^{-1}+2k(\beta-\alpha)} \exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx.$$

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq \beta^{-1}$, et pour tout $x \in [0, 1/n]$, on a

$$\Big|\exp\Big(-2^{-1}\big(x-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big|$$
$$\leq 2\,n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha)\bigg(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\bigg).$$

e) Au moyen de 5)d), montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} n(2\pi)^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}),$$

et en déduire que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{P(A_n)}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1})\ ;$$

rappelons que (voir 4)c) de la Partie I)

$$h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{2\beta-n^{-1}+2k(\beta-\alpha)}^{2\beta+2k(\beta-\alpha)} \exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx.$$

f) Au moyen de 5)a), de 4)d) de la Partie I, de 5)c) et de 5e), montrer que

$$P\big(\alpha<\nu\leq\mu<\beta\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\bigg(\exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\bigg).$$