Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de Processus Stochastiques
Le 4 janvier 2012 (durée 3 heures)

Aucun document n'est autorisé. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Questions de cours

1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la σ-algèbre des ensembles boréliens de $\mathbb{R}$.

a) Quand dit-on que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est mesurable ?

b) Supposons que pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue à droite ; montrer qu'alors $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est mesurable.

2) Soit $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ telle que $\mathcal{F}_t = \sigma\big(B(s) : 0 \le s \le t\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que le processus stochastique $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$M(t) = \big(B(t)\big)^2 - t\,,$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

3) Soit T un ensemble arbitraire et soient $\{X_t\}_{t\in T}$ et $\{Y_t\}_{t\in T}$ deux processus stochastiques.

a) Quand dit-on que $\{Y_t\}_{t\in T}$ est une version de $\{X_t\}_{t\in T}$?

b) Quand dit-on que $\{X_t\}_{t\in T}$ et $\{Y_t\}_{t\in T}$ sont indistinguables ?

Problème

Dans tout ce problème, on désigne par $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; dans toute la suite, on suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto B(t, \omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $B(0, \omega) = 0$.

L'objectif du problème est de montrer que pour tous $T \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a,

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} B(t) > \lambda\right) = P\big(|B(T)| > \lambda\big). \qquad (*)$$

Partie I : Préliminaires

1) Prouver que lorsque $T = 0$, alors $(*)$ est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2) On suppose que $T \in \mathbb{R}_+^*$ est arbitraire et fixé.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$, nous posons

$$Y_T(\omega) = \sup_{t\in[0,T]} B(t, \omega)\,;$$

montrer que ce supremum est fini, puis que

$$Y_T(\omega) = \sup_{s\in[0,1]} B(Ts, \omega).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient

$$Y_{T,n} = \sup_{k \in \{1,\dots,2^n\}} B(T2^{-n}k) \quad \text{et} \quad Z_{T,n} = T^{1/2} Y_{1,n}.$$

Montrer que $Y_{T,n}$ et $Z_{T,n}$ sont deux variables aléatoires (c'est-à-dire des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la σ-algèbre des ensembles boréliens de $\mathbb{R}$) puis qu'elles possèdent la même loi.

c) Nous désignons par Y_T la fonction de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, $\omega \longmapsto Y_T(\omega)$. En utilisant, les résultats obtenus dans les deux questions précédentes, montrer que Y_T et $Z_T = T^{1/2} Y_1$ sont deux variables aléatoires, puis qu'elles possèdent la même loi.

3) On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P\left(\sup_{t \in [0,1]} B(t) > \alpha \right) = P\big(|B(1)| > \alpha \big). \qquad (**)$$

Au moyen de $(**)$ et du résultat obtenu dans la question précédente, montrer que $(*)$ est vraie pour tous $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie II : Preuve de l'égalité $(**)$

Dans toute cette partie :

- Nous désignons par $(\xi_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes, identiquement distribuées et vérifiant

$$P(\xi_l = 1) = P(\xi_l = -1) = 1/2\,, \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}^*.$$

- Nous notons par $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$, la suite de variables aléatoires telles que pour tout $\omega \in \Omega$ on a, $S_0(\omega) = 0$ et quelque soit $m \in \mathbb{N}^*$,

$$S_m(\omega) = \sum_{l=1}^{m} \xi_l(\omega).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous désignons par $\{X_n(t)\}_{t \in [0,1]}$, le processus stochastique dont les trajectoires sont les fonctions continues et affines par morceaux définies, pour tous $\omega \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, par

$$X_n(t,\omega) = \left(\frac{n^{-1}\big([nt]+1\big) - t}{n^{-1}} \right) \frac{S_{[nt]}(\omega)}{\sqrt{n}} + \left(\frac{t - n^{-1}[nt]}{n^{-1}} \right) \frac{S_{[nt]+1}(\omega)}{\sqrt{n}}\,,$$

où $[nt]$ est la partie entière du réel nt.

Par ailleurs, rappelons que, si $(S, \mathcal{B}_S)$ est un espace métrique muni de $\mathcal{B}_S$ la σ-algèbre des ensembles boréliens de S, et si $R : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{B}_S)$ désigne une variable aléatoire ; *la* *mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_S$ induite par R (ou encore la loi de R)*, notée par $\mathbb{P}_R$, est définie pour tout $D \in \mathcal{B}_S$, par,

$$\mathbb{P}_R(D) = P\big(\{\omega \in \Omega : R(\omega) \in D\}\big).$$

4) a) Soit C l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0,1]$; rappelons qu'il est muni de la distance $d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. On désigne respectivement par $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{X_n}$, les mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, induites par les processus $\{B(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$; rappelons qu'on a vu en cours, qu'on peut considérer ces processus comme des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et à valeurs dans $(C, \mathcal{B}_C)$. En utilisant un théorème du cours, montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathbb{P}_{X_n}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}_B$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n la variable aléatoire définie sur Ω par,

$$M_n = \sup_{m\in\{0,\dots,n\}} S_m.$$

Nous notons par $H : \big(C, \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$, la fonction définie pour tout $f \in C$ par

$$H(f) = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$$

et nous admettons que H est continue. Enfin, nous désignons respectivement par $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ et $\mathbb{P}_{Y_1}$, les mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ induites par les variables aléatoires $n^{-1/2}M_n$ et Y_1. En utilisant, la continuité de H, le résultat obtenu dans la question précédente, et le Théorème de Portmanteau, montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}_{Y_1}$.

5) Posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et désignons par $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{N}}}$ la σ-algèbre formée par tous les sous-ensembles de $\overline{\mathbb{N}}$. Supposons que $q \in \mathbb{N}$ est arbitraire et fixé ; soit $\tau_q : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \big(\overline{\mathbb{N}}, \mathcal{P}_{\overline{\mathbb{N}}}\big)$, la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$, par,

$$\tau_q(\omega) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : S_m(\omega) = q\big\}\ ,$$

avec la convention que $\tau_q(\omega) = +\infty$ lorsque $\big\{m \in \mathbb{N} : S_m(\omega) = q\big\}$ est l'ensemble vide.

a) Montrer que τ_q est une variable aléatoire.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\}\right).$$

c) En utilisant le résultat obtenu dans la question précédente, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \Big\{\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0\Big\}\right).$$

d) En utilisant le résultat obtenu dans la question précédente, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\tau_q = m\right) P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0\right).$$

6) a) Montrer que pour tous $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\tau_q = m\right) P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l > 0\right).$$

b) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 5)d) et 6)a), prouver que tous $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big).$$

7) En utilisant le résultat obtenu dans la question 6)b), montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(M_n \geq q) = 2P(S_n > q) + P(S_n = q).$$

8) Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est arbitraire et fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $q_n = -[-\alpha n^{1/2}]$, où $[-\alpha n^{1/2}]$ est la partie entière du réel $-\alpha n^{1/2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\big(n^{-1/2} M_n \geq \alpha\big) = P(M_n \geq q_n).$$

b) Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\liminf_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2} S_n > \alpha+\eta\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2} S_n > \alpha-\eta\big).$$

c) Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\limsup_{n\to+\infty} P(S_n = q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(\alpha - \eta \leq n^{-1/2} S_n \leq \alpha + \eta\big).$$

9) a) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la variable aléatoire $n^{-1/2} S_n$ converge en loi vers $B(1)$ (on vous rappelle que la variable aléatoire $B(1)$ suit une loi normale centrée et réduite).

b) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 7), 8) et 9)a), montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a,

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2} M_n \geq \alpha\big) = P\big(|B(1)| \geq \alpha\big).$$

c) Rappelons que si $U : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est une variable aléatoire, F_U la fonction de répartition associée à U, est définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, par $F_U(\alpha) = P(U \leq \alpha)$. Désignons par $F_{n^{-1/2}M_n}$ et $F_{|B(1)|}$ les fonctions de répartition associées respectivement aux variables aléatoires $n^{-1/2} M_n$ et $|B(1)|$. En utilisant le résultat obtenu dans la question 9)b), montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) = F_{|B(1)|}(\alpha).$$

10) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 4)b) et 9)c), montrer que l'égalité $(**)$ est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.