Université Lille 1, M2 Mathématiques - Parcours Mathématiques Appliquées, Examen de rattrapage du cours "Intégrale d'Itô, formule d'Itô et applications à la finance"

Cet examen de rattrapage du 6/06/17 concerne la partie du cours enseignée par A.Ayache, sa durée est 1 heure.

Les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet d'examen, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On note par $B = \{B(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+} = \{B_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E(B_1^2) = 1$. De plus, on désigne par $(\mathcal{F}_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $\{B_s\}_{s\in\mathbb{R}_+}$; rappelons que $\mathcal{F}_s := \sigma(B_u; u \leq s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$.

Problème Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique à valeurs réelles défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On suppose que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ presque sûrement,

$$X_t = \int_0^t J(s)\, dB_s + \int_0^t K(s)\, ds\,, \tag{a}$$

où $\{J(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $\{K(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ sont deux processus stochastiques à valeurs réelles, adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$, à trajectoires continues, et vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$E\bigg(\int_0^t \big(J^2(s) + K^2(s)\big)\, ds\bigg) < +\infty\,.$$

L'objectif du problème est de montrer que les deux processus $\{J(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $\{K(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ sont "uniques". Plus précisément, si $\{\widetilde{J}(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $\{\widetilde{K}(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ sont deux processus arbitraires possédant les mêmes propriétés (adaptabilité, continuité et intégrabilité) que $\{J(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ et $\{K(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$, et vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ presque sûrement,

$$X_t = \int_0^t \widetilde{J}(s)\, dB_s + \int_0^t \widetilde{K}(s)\, ds\,; \tag{$\tilde{a}$}$$

alors, l'assertion suivante (ξ) est valide.

(ξ) *Il existe $\Omega^* \in \mathcal{F}$ un événement de probabilité 1 tel que, pour tout $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega^*$, on a $J(s,\omega) = \widetilde{J}(s,\omega)$ et $K(s,\omega) = \widetilde{K}(s,\omega)$.*

1) Montrer que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ presque sûrement,

$$\int_0^t \big(J(s) - \widetilde{J}(s)\big)\, dB_s = \int_0^t \big(\widetilde{K}(s) - K(s)\big)\, ds\,.$$

2) Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \bigg(\int_{\frac{kt}{n}}^{\frac{(k+1)t}{n}} \big(\widetilde{K}(s) - K(s)\big)\, ds\bigg)^2\Bigg] = E\bigg[\int_0^t \big(J(s) - \widetilde{J}(s)\big)^2\, ds\bigg]\,.$$

3) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E\left[\int_0^t \big(J(s) - \widetilde{J}(s)\big)^2\, ds\right] \leq \frac{t}{n} \times E\left[\int_0^t \big(\widetilde{K}(s) - K(s)\big)^2\, ds\right].$$

4) Prouver que l'assertion (ξ) est vraie.

Exercice Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$V_j := \sum_{k=1}^{2^j} \Big(B\big(2^{-j}k\big) - B\big(2^{-j}(k-1)\big)\Big)^2.$$

1) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $V_j \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
2) Prouver que l'on a

$$\lim_{j \to +\infty} E\Big(\big|V_j - 1\big|^2\Big) = 0\,.$$

3) Montrer que V_j converge P-presque sûrement vers 1 lorsque $j \to +\infty$.