**Université de Lille, M2 Mathématiques - Parcours Recherche,**
**Examen "Calcul stochastique et modèles de diffusions"**
Le lundi 28/03/2022 durée 3 heures. Les documents sont autorisés.
La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

**Remarques :** Dans tout ce sujet d'examen, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à $P$) est noté $E(\cdot)$. On désigne par $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E(|B(1)|^2) = 1$ ; $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle pour ce mouvement brownien $B$, et on suppose que tous les événements de probabilité nulle appartiennent à $\mathcal{F}_0$. On note par $T$ un réel strictement positif arbitraire et fixé ; $\nu(0,T)$ désigne la classe habituelle des intégrandes pour l'intégrale d'Itô sur $[0,T]$ obtenue à partir de $B$.

**Problème 1** Soit $\sigma$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ et à support compact.
1) Montrer qu'il existe $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un unique processus stochastique appartenant à $\nu(0,T)$, à trajectoires continues, qui vérifie pour tout $t \in ]T, +\infty[$ $X(t) = X(T)$, et qui vérifie pour tout $t \in [0,T]$ presque sûrement $X(t) = \displaystyle\int_0^t \sigma(X(s))\, dB_s$.
2) Pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots 2^j\}$, on pose $d_{j,k} := 2^{-j}kT$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, la suite de variables aléatoires $(\widetilde{X}_{j,k})_{0\le k\le 2^j}$ est définie par $\widetilde{X}_{j,0} := 0$ et par la relation de récurrence : pour tout $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$, $\widetilde{X}_{j,k+1} := \widetilde{X}_{j,k} + \sigma(\widetilde{X}_{j,k})(B(d_{j,k+1}) - B(d_{j,k}))$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, le processus $\widetilde{\sigma}_j = \{\widetilde{\sigma}_j(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est défini, pour tout $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, par $\widetilde{\sigma}_j(s,\omega) := \displaystyle\sum_{k=0}^{2^j-1} \sigma(\widetilde{X}_{j,k}(\omega))\mathbb{1}_{[d_{j,k},d_{j,k+1}[}(s)$. Montrer que $\widetilde{\sigma}_j \in \nu(0,T)$.
3) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, soit $\{\widetilde{X}_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus, à trajectoires continues, défini pour tout $t \in [0,T]$ par $\widetilde{X}_j(t) := \displaystyle\int_0^t \widetilde{\sigma}_j(s)\, dB_s$, et pour tout $t \in ]T, +\infty[$ par $\widetilde{X}_j(t) := \widetilde{X}_j(T)$. Montrer que, pour tous $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$ et $t \in [d_{j,k}, d_{j,k+1}]$, on a que $\widetilde{X}_j(t) = \widetilde{X}_{j,k} + \sigma(\widetilde{X}_{j,k})(B(t) - B(d_{j,k}))$, puis prouver que $\{\widetilde{X}_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ appartient à $\nu(0,T)$.
4) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, le processus $\{Z_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par $Z_j(t) := X(t) - \widetilde{X}_j(t)$. Au moyen de la formule d'Itô, montrer que, pour tout $t \in [0,T]$, l'on a que $\mathbb{E}\Big(|Z_j(t)|^2\Big) = \displaystyle\int_0^t \mathbb{E}\Big(|\sigma(X(s)) - \widetilde{\sigma}_j(s)|^2\Big)\, ds$.
5) Prouver qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ une constante telle que tous $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$ et $h \in [0, 2^{-j}T]$, on a

$$\mathbb{E}\Big(|Z_j(d_{j,k} + h)|^2\Big) \le \mathbb{E}\Big(|Z_j(d_{j,k})|^2\Big) + c_0 \int_0^h \mathbb{E}\Big(|X(d_{j,k} + y) - \widetilde{X}_{j,k}|^2\Big)\, dy\,.$$

6) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ une constante telle que, pour tous $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$ et $h \in [0, 2^{-j}T]$, on a

$$\mathbb{E}\Big(|Z_j(d_{j,k} + h)|^2\Big) \le \mathbb{E}\Big(|Z_j(d_{j,k})|^2\Big) + c_1 T^2\, 2^{-2j} + 2c_0 \int_0^h \mathbb{E}\Big(|Z_j(d_{j,k} + y)|^2\Big)\, dy\,.$$

7) Au moyen du Lemme de Gronwall, prouver que, pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$,

on a

$$\mathbb{E}\Big(\big|Z_j(d_{j,k+1})\big|^2\Big) \leq \Big(\mathbb{E}\Big(\big|Z_j(d_{j,k})\big|^2\Big) + c_1 T^2\, 2^{-2j}\Big) \exp\Big(c_0 T 2^{1-j}\Big)\,.$$

8) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ une constante telle que, pour tous $j \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\Big(\big|Z_j(T)\big|^2\Big) \leq c_2\, 2^{-j}$ . *<u>Indication :</u> on pourra introduire la suite arithmético-géométrique* $(\gamma_k)_{0\leq k\leq 2^j}$ *telle que* $\gamma_0 = 0$ *et, pour tout* $k \in \{0, 1, \dots 2^j - 1\}$, $\gamma_{k+1} = \exp\Big(c_0 T 2^{1-j}\Big)\gamma_k + c_1 T^2\, 2^{-2j} \exp\Big(c_0 T 2^{1-j}\Big)$ .

9) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ arbitraire et fixé, montrer que lorsque $j$ tend vers $+\infty$ la suite de variables aléatoires $\Big(j^{-1/2-\varepsilon}\, 2^{j/2} \sup\limits_{t\in[0,T]} \big|Z_j(t)\big|\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers zéro.

**Problème 2** Dans tout ce problème, pour tout $g \in \nu(0,T)$, le processus $\{I(g,t)\}_{t\in[0,T]}$ désigne la modification à trajectoires continues du processus $\Big\{\int_0^t g(s)\, dB_s\Big\}_{t\in[0,T]}$ ; de plus, le processus $\{A(g,t)\}_{t\in[0,T]}$, dont les trajectoires sont continues, est défini, pour tout $t \in [0,T]$, par l'intégrale de Lebesgue $A(g,t) := \int_0^t |g(s)|^2\, ds$ . Pour tous $t \in [0,T]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note par $S_t^\alpha(g)$ la variable aléatoire définie par $S_t^\alpha(g) := \sup\limits_{s\in[0,t]} \big|I(g,s)\big|^\alpha$. Dans toute la suite, on suppose que le nombre réel $p > 10$ et que le processus $f \in \nu(0,T)$ sont arbitraires et fixés.

1) Pour tout $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$, $\tau_n(\omega) := \inf\{t \in [0,T],\, \big|I(f,t,\omega)\big| + \big|A(f,t,\omega)\big| > n\}$, avec la convention que $\tau_n(\omega) := T$ lorsque $\{t \in [0,T],\, \big|I(f,t,\omega)\big| + \big|A(f,t,\omega)\big| > n\}$ est l'ensemble vide. Montrer que $\tau_n$ est un temps d'arrêt à valeurs dans $]0,T]$, puis prouver que la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge presque sûrement vers $T$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Par la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $f_n = \{f_n(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ le processus appartenant à $\nu(0,T)$, qui est défini, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, par $f_n(s) := f(s)\mathbb{1}_{[0,\tau_n[}(s)$.

2) Au moyen de l'inégalité de Doob et de la formule d'Itô, montrer qu'il existe une contante $c_1(p)$, qui ne dépend que de $p$, telle que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, on a $\mathbb{E}\Big(S_t^p(f_n)\Big) \leq c_1(p)\mathbb{E}\Big(S_t^{p-2}(f_n)A(f_n,t)\Big)$ .

3) En utilisant ce qui précède, prouver qu'il existe une contante $c_2(p)$, qui ne dépend que de $p$, telle que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, on a $\mathbb{E}\Big(S_t^p(f_n)\Big) \leq c_2(p)\mathbb{E}\Big(\big|A(f_n,t)\big|^{p/2}\Big)$. Puis, montrer que cette dernière inégalité reste vraie lorsque $f_n$ est remplacée par $f$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $g_{p,n} = \{g_{p,n}(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique appartenant à $\nu(0,T)$ qui est défini, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, par $g_{p,n}(s) := \big|A(f_n,s)\big|^{(p-2)/4} f_n(s)$. En utilisant la propriété d'isométrie de l'intégrale d'Itô et la formule d'Itô, montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, on a $\mathbb{E}\Big(\big|I(g_{p,n},t)\big|^2\Big) = 2p^{-1}\,\mathbb{E}\Big(\big|A(f_n,t)\big|^{p/2}\Big)$ .

5) En appliquant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la formule d'intégration par parties aux deux processus d'Itô $\{I(f_n,t)\}_{t\in[0,T]}$ et $\Big\{\big|A(f_n,t)\big|^{(p-2)/4}\Big\}_{t\in[0,T]}$, montrer que l'on a, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$ presque sûrement, $\big|I(g_{p,n},t)\big| \leq 2\, S_t^1(f_n)\big|A(f_n,t)\big|^{(p-2)/4}$.

6) En utilisant l'inégalité de Hölder, prouver que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,T]$, on a $(2p)^{-p/2}\,\mathbb{E}\Big(\big|A(f_n,t)\big|^{p/2}\Big) \leq \mathbb{E}\Big(S_t^p(f_n)\Big)$. Puis, montrer que cette dernière inégalité reste vraie lorsque $f_n$ est remplacée par $f$.