Université Lille 1, M2 Mathématiques - Parcours Mathématiques Appliquées,
Examen du cours "Intégrale d'Itô, formule d'Itô et applications à la finance"
Cet examen du 21/03/17 concerne la partie du cours enseignée par A.Ayache, sa durée est 2 heures.
Les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet d'examen, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté $E(\cdot)$. De plus, l'opérateur espérance conditionnelle, par rapport à une sous-tribu arbitraire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$, est noté par $E[\,\cdot\,|\mathcal{A}]$.

On désigne par $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E(B_1^2) = 1$. De plus, on désigne par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; rappelons que $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u; u \leq t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_{j,k} := 2^{-j}k = k/2^j$.

Signalons enfin que, pour tous réels a et b, on note par $a \wedge b$ le minimum de a et b.

Exercice 1 Soit $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique, défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par $X_t := \sin(B_t)$.
1) Au moyen de la formule d'Itô, montrer que le processus stochastique $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$Y_t := X_t + \frac{1}{2}\int_0^t X_s\, ds\,,$$

est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'on a $\mathrm{Var(Y_t) \leq t}$.

Exercice 2 Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\widetilde{V}_j(t) := \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(B(t\wedge d_{j,k+1}) - B(t \wedge d_{j,k})\Big)^2 .$$

1) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\widetilde{V}_j(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
2) Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'on a $\lim_{j\to+\infty} E\Big(\big|\widetilde{V}_j(t) - t\big|^2\Big) = 0$ et $\lim_{j\to+\infty} E\Big(\big|\widetilde{V}_j(t) - t\big|\Big) = 0$.
3) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\widetilde{V}_j(t)$ converge P-presque sûrement vers t lorsque $j \to +\infty$.

Problème On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est muni d'une filtration $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On note par $M = \{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique à valeurs réelles défini sur cet espace de probabilité. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$V_j(t) := \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(M(t\wedge d_{j,k+1}) - M(t \wedge d_{j,k})\Big)^2 .$$

On impose à $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ de vérifier les trois propriétés suivantes :

(I) $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale de carré intégrable ;

(II) les trajectoires de $\{M(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que $M(0)=0$;

(III) pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a $\lim_{j\to+\infty} E\Big(\big|V_j(t)-t\big|\Big)=0$ et $\lim_{j\to+\infty}\big|V_j(t)-t\big|=0$ P-presque sûrement.

Enfin, on note par f une fonction déterministe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue et bornée (c'est-à-dire que $\mu_f := \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|f(x)\big| < +\infty$). De plus, pour tout $j\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on pose

$$I_t^j(f) := \sum_{k=0}^{+\infty} f\big(M(d_{j,k})\big)\Big(M(t\wedge d_{j,k+1})-M(t\wedge d_{j,k})\Big)\,.$$

1) Montrer que, pour tout $j\in\mathbb{N}$ fixé, le processus stochastique $\big\{I_t^j(f)\big\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale de carré intégrable vérifiant $E\big(I_t^j(f)\big)=0$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, et dont les trajectoires sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soient $(t',t'')\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $t'\le t''$.

a) Pour tout $j\in\mathbb{N}$, montrer que l'on a P-presque sûrement

$$E\bigg[\Big(M(t'')-M(t')\Big)^2\,\bigg|\,\mathcal{A}_{t'}\bigg] = E\bigg[\Big(V_j(t'')-V_j(t')\Big)\,\bigg|\,\mathcal{A}_{t'}\bigg]$$

b) En déduire que l'on a P-presque sûrement

$$E\bigg[\Big(M(t'')-M(t')\Big)^2\,\bigg|\,\mathcal{A}_{t'}\bigg] = t''-t'\,.$$

3) Pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, on note par Φ_t^j la fonction élémentaire définie, pour tout couple $(s,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega$, par :

$$\Phi_t^j(s,\omega) := \sum_{k=0}^{+\infty} f\big(M(d_{j,k},\omega)\big)\mathbb{1}_{[t\wedge d_{j,k},t\wedge d_{j,k+1}[}(s)\,,$$

où $\mathbb{1}_{[t\wedge d_{j,k},t\wedge d_{j,k+1}[}$ désigne le fonction indicatrice de l'intervalle $[t\wedge d_{j,k},t\wedge d_{j,k+1}[$.

a) Montrer que l'on a, pour tous $t\in\mathbb{R}_+$, $j\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$,

$$E\bigg(\Big|I_t^{j+p}(f)-I_t^j(f)\Big|^2\bigg) = E\bigg(\int_0^t \Big|\Phi^{j+p}(s)-\Phi^j(s)\Big|^2\,ds\bigg)\,.$$

b) En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ fixé, il existe une variable aléatoire notée par $I_t(f)$ qui appartient à $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ telle que la suite de variables aléatoires $\big(I_t^j(f)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ converge au sens de la norme de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers $I_t(f)$.

c) Montrer que le processus stochastique $\big\{I_t(f)\big\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.