Université Lille 1, M2 Mathématiques - Parcours Mathématiques Appliquées,
Examen du cours "Intégrale d'Itô, formule d'Itô et applications à la finance"

Cet examen du 23/03/16 concerne la partie du cours enseignée par A.Ayache, sa durée est 2 heures.
Les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet d'examen, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté $E(\cdot)$. De plus, l'opérateur espérance conditionnelle, par rapport à une sous-tribu arbitraire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$, est noté par $E[\,\cdot\,|\mathcal{A}]$. On désigne par $B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E(B_1^2) = 1$. De plus, on désigne par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; rappelons que $\mathcal{F}_t := \sigma(B_u; u \le t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Signalons enfin que dans les notations, qu'on vient de préciser, l'indice "t" est parfois remplacé par "s".

Exercice 1 1) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $E\big(\exp(B_t)\big) = \exp\big(2^{-1}t\big)$.
2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $X_t := \exp\big(B_t - 2^{-1}t\big)$. Montrer que le processus stochastique $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

Problème 1 L'objectif est d'étendre les résultats qui étaient à montrer dans l'Exercice 1.
1) Soit e une variable aléatoire réelle qui est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive déterministe et finie c telle que l'on a $|e(\omega)| \le c$, pour tout $\omega \in \Omega$. Soit g une variable aléatoire réelle, gaussienne, définie sur Ω, centrée et dont l'écart-type, noté par $\sigma(g)$, est non nul.

a) Montrer que l'on a $E\big(\exp(eg)\big) \le E\Big(\exp\big(|e||g|\big)\Big) \le 2\exp\Big(2^{-1}c^2\sigma(g)^2\Big)$.

b) On impose l'hypothèse supplémentaire suivante : il existe $s_* \in \mathbb{R}_+$ tel que e est $\mathcal{F}_{s_*}$-mesurable et g est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{s_*}$. Montrer que l'on a $E\Big[\exp\big(eg - 2^{-1}e^2\sigma(g)^2\big)\Big|\mathcal{F}_{s_*}\Big] = 1$, P-presque sûrement. Pour ce faire on pourra utiliser le résultat suivant : on a P-presque sûrement

$$E\big[\exp(eg)|\mathcal{F}_{s_*}\big] = \frac{1}{\sigma(g)\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(ex)\exp\Bigg(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{\sigma(g)}\Big)^2\Bigg)\,dx\,. \qquad (***)$$

On ne vous demande pas de prouver l'égalité $(***)$, si toutefois vous parvenez à le faire correctement cela vous rapportera un bonus.
2) Soient e_0 et e_1 deux variables aléatoires réelles bornées définies sur Ω ; on suppose aussi que e_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable et e_1 est $\mathcal{F}_1$-mesurable. On désigne par Φ la fonction (ou processus) élémentaire définie, pour tout $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, par $\Phi(s,\omega) := e_0(\omega)\mathbb{1}_{[0,1[}(s) + e_1(\omega)\mathbb{1}_{[1,2[}(s)$. On note par $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$Z(t) := \exp\Bigg(\int_0^t \Phi(s)\,dB_s - 2^{-1}\int_0^t |\Phi(s)|^2\,ds\Bigg)\,.$$

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $E(Z(t)) = 1$; on étudiera trois cas : $t \in [0,1[$, $t \in [1,2[$ et $t \ge 2$.

b) Montrer que le processus stochastique $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

Exercice 2 Soit $v = \{v(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ un intégrande, pour l'intégrale d'Itô par rapport au mouvement brownien B, vérifiant la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, v appartient à la classe $\nu(0,t)$. Posons $X(t) = \int_0^t v(s)\,dB_s$. Au moyen de la formule d'Itô, montrer que l'on a

$$E\big(\sin^2(X_t)\big) \le \int_0^t E\big(|v(s)|^2\big)\,ds\,.$$

Problème 2 Soit une fonction mesurable f de $\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}\big)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(I) pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \mapsto f(t,\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

(II) le processus stochastique $\{f(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$-adapté ;

(III) f est bornée, c'est-à-dire que $\rho_f := \sup\big\{|f(s,\omega)|; (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\big\} < +\infty$.

1) Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, f appartient à classe $\nu(0,t)$ des intégrandes de l'intégrale d'Itô par rapport à B.

Désormais, nous notons par $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ les deux processus stochastiques définis, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par :

$$X_t := \int_0^t f(s)\,dB_s \quad \text{et} \quad Y_t := X_t^2 - \int_0^t |f(s)|^2\,ds\,.$$

D'après le cours, nous savons que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale de carré intégrable. L'objectif du restant de ce problème est d'établir que $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, $E(|Y_t|)$ est une quantité finie.

3) n désigne un entier naturel non nul. Prouver que, pour tout couple $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ fixé, on a

$$\int_0^t |f(s,\omega)|^2\,ds = \lim_{n\to+\infty} \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n \Big| f\Big(\frac{k}{n}t, \omega\Big)\Big|^2.$$

En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la variable aléatoire $\int_0^t |f(s)|^2\,ds$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

4) Fixons t' et t'' deux réels arbitraires vérifiant $0 \le t' < t''$. Montrer que, P-presque sûrement, l'on a

$$E[X_{t''}^2|\mathcal{F}_{t'}] = X_{t'}^2 + E\big[(X_{t''} - X_{t'})^2|\mathcal{F}_{t'}\big] \quad \text{et} \quad E[Y_{t''}|\mathcal{F}_{t'}] = Y_{t'} + E\Big[\Big(\int_{t'}^{t''} f(s)\,dB_s\Big)^2 - \int_{t'}^{t''} |f(s)|^2\,ds\Big|\mathcal{F}_{t'}\Big].$$

5) L'objectif de cette question est de prouver que, pour tous $t', t'' \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $t' < t''$, on a

$$E\Big[\Big(\int_{t'}^{t''} f(s)\,dB_s\Big)^2 - \int_{t'}^{t''} |f(s)|^2\,ds\Big|\mathcal{F}_{t'}\Big] = 0\,, \quad P\text{-preque sûrement.} \qquad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, nous posons $\tau_k^n := t' + \frac{k}{n}(t'' - t')$. De plus, nous notons par $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions élémentaires de $\mathcal{E}(t',t'')$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, par $\Phi_n(s,\omega) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k^n, \omega)\mathbb{1}_{[\tau_k^n, \tau_{k+1}^n[}(s)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n \in \nu(t',t'')$, et que $\lim_{n\to+\infty} E\Big(\int_{t'}^{t''} \big|f(s) - \Phi_n(s)\big|^2\,ds\Big) = 0$.

b) Prouver que

$$E\Big[\Big(\int_{t'}^{t''} f(s)\,dB_s\Big)^2 - \int_{t'}^{t''} |f(s)|^2\,ds\Big|\mathcal{F}_{t'}\Big] = \lim_{n\to+\infty} E\Big[\Big(\int_{t'}^{t''} \Phi_n(s)\,dB_s\Big)^2 - \int_{t'}^{t''} |\Phi_n(s)|^2\,ds\Big|\mathcal{F}_{t'}\Big],$$

où la convergence a lieu au sens de la norme de $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. <u>Indication :</u> *on commencera d'abord par prouver que si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arbitraire de variables aléatoires réelles de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ qui converge vers $Z \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ au sens de la norme de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, alors la suite $(Z_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Z^2 au sens de la norme de $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.*

c) Montrer que l'égalité $(*)$ est vraie lorsque f est remplacée par Φ_n, où $n \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire. Peut-on en conclure qu'on a atteint l'objectif qu'on s'est fixé au début de la question 5) ? (justifier rigoureusement votre réponse)