Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée
5 Janvier 2006 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 1) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E et x_0 un élément de E situé à une distance $d > 0$ de F ($d = \inf_{x \in F} \|x_0 - x\|$). Montrer qu'il existe $\widetilde{f} : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue définie sur E et vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $x \in F$ $< \widetilde{f}, x >= 0$, $< \widetilde{f}, x_0 >= 1$ et $\|\widetilde{f}\| = 1/d$ (on pourra considérer F_1 le sous-espace vectoriel de E, définit par $F_1 = \{x + tx_0 \ ; \ x \in F \text{ et } t \in \mathbb{C}\}$ et f la forme linéaire définie sur F_1 par $< f, x + tx_0 >= t$).
2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de E qui converge faiblement vers un certain élément de E noté par x_0. En utilisant la question 1) montrer qu'il existe $(\widetilde{x}_k)_{k \geq 1}$ une suite de E vérifiant les deux propriétés suivantes (a) et (b).
(a) Pour tout entier $k \geq 1$, $\widetilde{x}_k$ est une combinaison linéaire des x_n i.e. il existe un entier $N_k \geq 1$ et $\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}, \ldots, \lambda_{k,N_k}$ des nombres complexes tels que $\widetilde{x}_k = \sum_{n=1}^{N_k} \lambda_{k,n} x_n$.
(b) La suite $(\widetilde{x}_k)_{k \geq 1}$ converge fortement vers x_0.

Exercice 2 On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ et à support compact.
1) Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, au moyen d'une intégration par parties montrer que $\widehat{u}$, la transformée de Fourier de u, vérifie $\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0$.
2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur $\mathbb{R}$) et soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{j \to +\infty} \|f - u_j\|_{L^1} = 0$ (une telle suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ existe car $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$). Montrer que $(\widehat{u}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, la suite des transformées de Fourier des u_j, converge uniformément vers $\widehat{f}$, la transformée de Fourier de f i.e. $\lim_{j \to +\infty} \|\widehat{f} - \widehat{u}_j\|_\infty = 0$.
3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, en utilisant les deux questions précédentes montrer que $\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Exercice 3 Soit $(T, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que la mesure μ est bornée i.e. $\mu(T) < +\infty$ et l'espace $L^1(T, \mathcal{B}, \mu)$ sera noté par $L^1(\mu)$. Une partie $\mathcal{H}$ de $L^1(\mu)$ est dite équi-intégrable si : $\lim_{a \to +\infty} \left[\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{|f| \geq a} |f| \, d\mu\right] = 0$.
1) Soit $\mathcal{H}$ une partie de $L^1(\mu)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est équi-intégrable lorsqu'il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$, $|f| \leq g$.
2) Soit $\mathcal{H}$ une partie arbitraire de $L^1(\mu)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est equi-intégrable si et seulement si $\mathcal{H}$ est bornée dans $L^1(\mu)$ et vérifie la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_A |f| \, d\mu \leq \epsilon$. Pour établir la réciproque on pourra utiliser l'inégalité de Markov-Tchebychev : pour tout $f \in L^1(\mu)$ et tout réel $a > 0$, $\mu(\{|f| > a\}) \leq a^{-1} \|f\|_{L^1(T)}$, après l'avoir prouvée.

Problème Rappelons que la classe de Schwartz $S(\mathbb{R})$ est munie de la suite de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in \mathbb{N}}$, définies pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $\psi \in S(\mathbb{R})$ par $\mathcal{N}_p(\psi) = \sum_{n=0}^{p} \sum_{m=0}^{p} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \psi^{(m)}(x)|$,

où pour tout $m \in I\!N$, $\psi^{(m)}$ désigne la dérivée d'ordre m de la fonction ψ (avec la convention que $\psi^{(0)} = \psi$). ϕ désigne une fonction de $S(I\!R)$ à support compact contenu dans $[0,1]$, fixée une fois pour toute. $u \in S'(I\!R)$ désigne une distribution tempérée fixée une fois pour toute.

1) Pour tout $t \in I\!R$, $\tau_t\tilde{\phi}$ désigne l'application définie pour tout $x \in I\!R$, par $(\tau_t\tilde{\phi})(x) = \phi(t-x)$. Montrer que $\tau_t\tilde{\phi} \in S(I\!R)$ et que $\operatorname{supp} \tau_t\tilde{\phi} \subset [t-1, t]$.

2) Soit $(h_l)_{l\in I\!N}$ une suite arbitraire de nombres réels convergeant vers 0 et soit $\alpha = \sup_{l\in I\!N} |h_l|$.

a) Montrer que $\alpha < +\infty$.

b) Montrer que pour tous $n, m, l \in I\!N$ et $t \in I\!R$ on a

$$\sup_{x\in I\!R} |x^n(\phi^{(m)}(t+h_l-x) - \phi^{(m)}(t-x))| \leq (|t|+\alpha+1)^n \|\phi^{(m+1)}\|_\infty |h_l|.$$

c) Montrer que pour tout $t \in I\!R$, on a $\lim_{l\to+\infty} \tau_{t+h_l}\tilde{\phi} = \tau_t\tilde{\phi}$, au sens de la topologie associée à la suite de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p\in I\!N}$.

3) Soit f l'application de $I\!R$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $t \in I\!R$ par $f(t) =< u, \tau_t\tilde{\phi} >$.

a) Montrer que f est continue.

b) Montrer que pour tous $n \in I\!N$ et $x, t \in I\!R$, on a $(x-t)^n \leq (|x|+|t|)^n \leq 2^{n-1}(|x|^n + |t|^n)$. En déduire que f est à croissance lente à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe P un polynôme tel que pour tout $t \in I\!R$, on a $|f(t)| \leq P(|t|)$.

c) Montrer que l'application $v : S(I\!R) \to \mathbb{C}$, $\psi \mapsto v(\psi) = \int_{I\!R} f(t)\psi(t)\,dt$ est une distribution tempérée.

4) Soit $\check{\psi}$ une fonction de $S(I\!R)$ à support compact.

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\operatorname{supp} \check{\psi} \subset [a, b]$.

b) Soit $\tilde{\phi}$ la fonction définie pour tout $x \in I\!R$ par $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ et soit $\tilde{\phi} * \check{\psi}$ le produit de convolution de $\tilde{\phi}$ et de $\check{\psi}$. Montrer que $\tilde{\phi} * \check{\psi}$ est une fonction à support compact contenu dans l'intervalle $[a-1, b]$.

c) Pour tout entier $N \geq 1$, on désigne par $\sigma_N(\tilde{\phi} * \check{\psi})$ la fonction définie pour tout $x \in I\!R$ par

$$\sigma_N(\tilde{\phi} * \check{\psi})(x) = \frac{(b-a)}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{\phi}\left(x - a - \frac{k(b-a)}{N}\right) \check{\psi}\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right).$$

Montrer que $\sigma_N(\tilde{\phi} * \check{\psi})$ est une fonction de $S(I\!R)$ à support compact contenu dans $[a-1, b]$.

d) Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(\tilde{\phi} * \check{\psi}) = \tilde{\phi} * \check{\psi}$ au sens de la topologie induite par la suite de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p\in I\!N}$.

5) a) Montrer que l'application $L : S(I\!R) \to S(I\!R)$, $\psi \mapsto L(\psi) = \tilde{\phi} * \psi$ est linéaire et continue au sens de la topologie induite par la suite de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p\in I\!N}$. En déduire que l'application $w : S(I\!R) \to \mathbb{C}$, $\psi \mapsto w(\psi) = u(\tilde{\phi} * \psi)$ est une distribution tempérée.

b) On suppose (dans cette question uniquement) qu'il existe $g \in L^1(I\!R)$ (l'espace des fonctions Lebesgue intégrables sur $I\!R$) telle que pour tout $\psi \in S(I\!R)$ on a $< u, \psi >= \int_{I\!R} g(x)\psi(x)\,dx$. Montrer que la distribution tempérée w vérifie alors $< w, \psi >= \int_{I\!R} (g * \phi)(y)\psi(y)\,dy$, pour tout $\psi \in S(I\!R)$.

c) En utilisant la question 4)d) montrer que pour toute fonction à support compact $\check{\psi} \in S(I\!R)$, on a $w(\check{\psi}) = v(\check{\psi})$.

d) En utilisant la question 5)c) montrer que pour tout $\psi \in S(I\!R)$, on a $w(\psi) = v(\psi)$.

Correction de l'examen d'Analyse Fonctionnelle Appliquée du Master 2 Recherche (Mathématiques Appliquées) (2005-2006)

Exercice 1 1) Soit F_1 le sous espace vectoriel de E, $F_1 = \{x + t x_0 ; x \in F \text{ et } t \in \mathbb{C}\}$. Comme $x_0 \notin F$, pour tout $y \in F_1$, il existe un unique $x \in F$ et un unique $t \in \mathbb{C}$ tels que $y = x + t x_0$. On peut donc définir une forme linéaire f sur F_1, en posant pour tout $y \in F_1$, $\langle f, y \rangle = t$. De plus on a pour tout $x \in F$, $\langle f, x \rangle = 0$ et $\langle f, x_0 \rangle = 1$. Montrons que $\|f\| = 1/d$, où $d = \inf_{x \in F} \|x_0 - x\|$. On a pour tout $y = x + t x_0 \in F_1$ vérifiant $t \neq 0$,

$$|\langle f, y \rangle| = |t| = \frac{|t|\,\|y\|}{\|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x_0 + t^{-1} x\|} \leq \frac{\|y\|}{d} \quad (1)$$

En effet, on a $\|x_0 + t^{-1} x\| = \|x_0 - (-t)^{-1} x\| \geq d$, car $(-t)^{-1} x \in F$. L'inégalité (1) entraîne que f est continue et que $\|f\| \leq 1/d$. Montrons maintenant que $\|f\| \geq 1/d$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de F telle que $d = \lim_{n \to +\infty} \|x_0 - x_n\|$. On a

$$1 = \langle f, x_0 - x_n \rangle \leq \|f\|\,\|x_0 - x_n\|.$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \|f\| d$ i.e. $\|f\| \geq 1/d$. Enfin, il résulte du Théorème de Hahn-Banach (Théorème d'extension continue) qu'il existe $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue telle que $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1/d$

et pour tout $y \in F_1$, $\langle \tilde{f}, y\rangle = \langle f, y\rangle$. On a donc en particulier $\langle \tilde{f}, x_0\rangle = 1$ et pour tout $x \in F$, $\langle \tilde{f}, x\rangle = 0$.

2) Nous allons faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que $x_0 \notin \overline{F = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots\}}$, où on prend l'adhérence au sens de la topologie faible. Il résulte alors de la question 1) qu'il existe $\tilde{f}$ une forme linéaire continue sur E telle que $\langle \tilde{f}, x_0\rangle = 1$ et pour $k \geq 1$, $\langle \tilde{f}, x_k\rangle = 0$. Ce qui contredit le fait que la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ converge faiblement vers x_0.

<u>Exercice 2</u> 1) En intégrant par parties, on trouve que pour tout réel $\xi \neq 0$, $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx$
$= \frac{1}{i\xi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} u'(x)\,dx$. Ce qui prouve que $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{u}(\xi) = 0$.

2) On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\xi) - \hat{u}_j(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi}(f(x) - u_j(x))\,dx\right|$
$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - u_j(x)|\,dx$. Ainsi $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi) - \hat{u}_j(\xi)| \leq \|f - u_j\|_{L^1}$.

et donc $\lim_{j\to+\infty} \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi) - \hat{u}_j(\xi)| = 0$.

3) Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 2) il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi) - \hat{u}_{j_0}(\xi)| \leq \varepsilon/2$. On a donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{u}_{j_0}(\xi)| + |\hat{f}(\xi) - \hat{u}_{j_0}(\xi)| \leq |\hat{u}_{j_0}(\xi)| + \varepsilon/2. \quad (2)$$

En utilisant l'inégalité (2) et le fait que $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{u}_{j_0}(\xi)$, on peut montrer qu'il existe $\varphi > 0$ tel que pour tout

$|\xi| \geq \delta$, on a $|f(\xi)| \leq \varepsilon$. Cela prouve que $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

<u>Exercice 3</u> 1) Il résulte de l'inégalité pour tout $f \in \mathcal{F}$, $|f| \leq g$, que l'on a pour tout réel $a > 0$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| \geq a} |f| \, d\mu \leq \int_{|g| \geq a} g \, d\mu . \qquad (1)$$

On a de plus $\int_{|g| \geq a} g \, d\mu = \int_T g \, \mathbb{1}_{(|g| \geq a)} \, d\mu$ et en utilisant le théorème de convergence dominée on peut montrer que

$$\lim_{a \to +\infty} \int_T g \, \mathbb{1}_{(|g| \geq a)} \, d\mu = 0 \qquad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) que $\lim_{a \to +\infty} \left[\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{|f| \geq a} |f| \, d\mu \right] = 0$.

Ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable

2) Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ est équi-intégrable et montrons que $\mathcal{F}$ est bornée dans $L^1(\mu)$ et vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon . \qquad (3)$$

On a pour tout $A \in \mathcal{B}$ et pour tout réel $a > 0$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \, d\mu \leq \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \times \mathbb{1}_{\{|f| \leq a\}} \, d\mu$$

$$+ \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \times \mathbb{1}_{\{|f| > a\}} \, d\mu$$

$$\leqslant a\,\mu(A) + \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{|f|>a} |f|\, d\mu . \qquad (4)$$

En prenant dans (4), $A = T$ et $a = 1$ et en utilisant le fait que $\mu(T) < +\infty$, on obtient

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_T |f|\, d\mu < +\infty .$$

Ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est bornée dans $L^1(\mu)$. Montrons maintenant que (3) est vérifiée. Fixons $\varepsilon > 0$, comme $\mathcal{H}$ est équi-intégrable, il existe $a_0 > 0$ tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_A |f| \times \mathbb{1}_{\{|f|>a_0\}}\, d\mu \leqslant \varepsilon/2 .$$

Posons $\delta_0 = \varepsilon/(2a_0)$. En prenant dans (4) $a = a_0$, on trouve pour tout $A \in \mathcal{B}$ vérifiant $\mu(A) \leqslant \delta_0$ on a

$$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_A |f|\, d\mu \leqslant \varepsilon .$$

Supposons maintenant que $\mathcal{H}$ est bornée dans $L^1(\mu)$ et vérifie (3) et montrons que $\mathcal{H}$ est équi-intégrable. Nous allons utiliser l'inégalité de Markov-Tchebychev. Donnons d'abord la preuve de cette inégalité. On a pour tout $f_0 \in L^1(\mu)$ et pour tout réel $a > 0$,

$$a\,\mu(\{|f_0| > a\}) \leqslant \int_{|f_0|>a} |f_0|\, d\mu \leqslant \int_T |f_0|\, d\mu = \|f_0\|_{L^1(T)} .$$

Ce qui prouve l'inégalité de Markov-Tchebychev. Il résulte

de cette inégalité que pour tout réel $a>0$

$$\sup_{f_0\in\mathcal{H}} \mu(\{|f_0|>a\}) \leq \frac{1}{a} \sup_{f_0\in\mathcal{H}} \|f_0\|_{L^1(T)}. \quad (5)$$

En utilisant (5) et le fait que $\sup_{f_0\in\mathcal{H}} \|f_0\|_{L^1(T)} < +\infty$, on peut montrer que $\lim_{a\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{H}} \mu(\{|f_0|>a\}) = 0$. Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a_0>0$ tel que pour tout $f_0\in\mathcal{H}$ et tout $a\geq a_0$, $\mu(\{|f_0|>a\})\leq\varepsilon$. En prenant alors dans (3) $A=\{|f_0|>a\}$, on a pour tout $f_0\in\mathcal{H}$ et tout $a\geq a_0$

$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{|f_0|>a} |f|\, d\mu \leq \varepsilon$. C'est-à-dire que

$\sup_{f_0\in\mathcal{H}} \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{|f_0|>a} |f|\, d\mu \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{|f|>a} |f|\, d\mu \leq \lim_{a\to+\infty} \sup_{f_0\in\mathcal{H}} \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{|f_0|>a} |f|\, d\mu = 0.$$

<u>Problème</u> 1) φ est de classe C^∞ car $\varphi\in S(\mathbb{R})$. L'application $x\mapsto \tau_t\tilde{\varphi}(x) = \varphi(t-x)$ (où $t\in\mathbb{R}$ est fixé) est donc de classe C^∞ comme composée d'applications de classe C^∞. Montrons que $\operatorname{supp} \tau_t\tilde{\varphi} \subset [t-1,t]$. Comme le support de φ est contenu dans $[0,1]$, pour que $\varphi(t-x)$ soit non nul, il faut que $0\leq t-x\leq 1$ i.e. $t-1\leq x\leq t$.

2) a) La suite $(h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ étant convergente elle est bornée et

cela signifie que $\alpha = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} |h_\ell| < +\infty$.

b) Il résulte de la question 1) que pour tous $\ell \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\operatorname{supp} \varphi^{(m)}(t+h_\ell - \cdot) \subset [t+h_\ell-1, t+h_\ell] \subset [t-\alpha-1, t+\alpha]$. On a donc en utilisant cette dernière inclusion et la question 1), pour tout $x \notin [t-\alpha-1, t+\alpha]$,

$$\varphi^{(m)}(t+h_\ell - x) - \varphi^{(m)}(t-x) = 0 . \quad (1)$$

Par ailleurs, il résulte du Théorème des accroissements finis que pour tous $\ell \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel c (appartenant à l'intervalle d'extrémités $t+h_\ell - x$ et $t-x$) tel que

$$\varphi^{(m)}(t+h_\ell - x) - \varphi^{(m)}(t-x) = \varphi^{(m+1)}(c) . h_\ell .$$

On a donc

$$\left| \varphi^{(m)}(t+h_\ell - x) - \varphi^{(m)}(t-x) \right| \leqslant \| \varphi^{(m+1)} \|_\infty \cdot |h_\ell| . \quad (2)$$

Il résulte de (1), de (2) et de l'inégalité $\max(|t-\alpha-1|, |t+\alpha|) \leqslant |t| + \alpha + 1$ que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \left(\varphi^{(m)}(t+h_\ell - x) - \varphi^{(m)}(t-x) \right) \right|$$

$$= \sup_{x \in [t-\alpha-1, t+\alpha]} \left| x^n \left(\varphi^{(m)}(t+h_\ell - x) - \varphi^{(m)}(t-x) \right) \right|$$

$$\leqslant \left(|t| + \alpha + 1 \right)^n \| \varphi^{(m+1)} \|_\infty |h_\ell| .$$

Il résulte de la question 2) b) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_p(\tau_{t+h_\ell}\tilde{\varphi} - \tau_t\tilde{\varphi})$$

$$= \sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{p} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^n\left(\varphi^{(m)}(t+h_\ell-x) - \varphi^{(m)}(t-x)\right)\right|$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{p}\sum_{m=0}^{p} (|t|+\alpha+1)^n \|\varphi^{(m+1)}\|_\infty\right) \times |h_\ell|.$$

On a donc $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \mathcal{N}_p(\tau_{t+h_\ell}\tilde{\varphi} - \tau_t\tilde{\varphi}) = 0$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \tau_{t+h_\ell}\tilde{\varphi} = \tau_t\tilde{\varphi}$, au sens de la topologie associée à la suite de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

3) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = \langle U, \tau_t\tilde{\varphi}\rangle$.

a) Comme U est forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R})$, on a d'après la question 2) c), $\lim\limits_{\ell\to+\infty} \langle U, \tau_{t+h_\ell}\tilde{\varphi}\rangle$ $= \langle U, \tau_t\tilde{\varphi}\rangle$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour toute suite de réels $(h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0. Cela prouve la continuité de f en tout point.

b) On a, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $(x-t)^n \leq (|x|+|t|)^n$. On a de plus, en utilisant la convexité de la fonction $X \mapsto X^n$, $\left(\frac{|x|+|t|}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2}(|x|^n + |t|^n)$, c'est-à-dire que

$(|x|+|t|)^n \leq 2^{n-1}(|x|^n+|t|^n)$. Montrons maintenant que f est à croissance lente à l'infini. u est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R})$ munie de la topologie induite par les semi-normes $\mathcal{N}_p$, $p \in \mathbb{N}$. Il existe donc un entier $p_1 \in \mathbb{N}$ et il existe une constante $C_1 > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t)| = |\langle u, \tau_t \tilde{\varphi} \rangle| \leq C_1 \mathcal{N}_{p_1}(\tau_t \tilde{\varphi}) . \qquad (3)$$

On a de plus

$$\mathcal{N}_{p_1}(\tau_t \tilde{\varphi}) = \sum_{n=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(t-x)|$$

$$= \sum_{n=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(t+x)|$$

$$= \sum_{n=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_1} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(x-t)^n \varphi^{(m)}(x)|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_1} 2^{n-1} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|x|^n |\varphi^{(m)}(x)| \right)$$

$$+ \sum_{n=0}^{p_1} \sum_{m=0}^{p_1} 2^{n-1} |t|^n \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(m)}(x)| . \qquad (4)$$

Il résulte de (3) et de (4) qu'il existe P un polynôme tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|f(t)| \leq P(|t|)$.

c) La fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ car elle est continue (voir la question 3) a)). f est de plus à croissance polynomiale.

Donc la forme linéaire V sur $S(\mathbb{R})$, $\psi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\,dt$ est une distribution tempérée.

4) Soit $\check{\psi}$ une fonction de $S(\mathbb{R})$ à support compact.

a) Supp $\check{\psi}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$. Il est donc borné i.e. il existe deux réels $a < b$ tels que $\operatorname{supp} \check{\psi} \subset [a,b]$.

b) Soit $\tilde{\varphi}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Il est clair que $\tilde{\varphi}$ est une fonction de $S(\mathbb{R})$ à support compact contenu dans $[-1,0]$. Montrons que le produit de convolution $\tilde{\varphi} * \check{\psi}$ est une fonction de $S(\mathbb{R})$ à support compact contenu dans l'intervalle $[a-1,b]$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\tilde{\varphi} * \check{\psi})(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x-y)\check{\psi}(y)\,dy$. On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $|\tilde{\varphi}'(x-y)\check{\psi}(y)| \leqslant \|\tilde{\varphi}'\|_\infty |\check{\psi}(y)|$. Ainsi la fonction $y \longmapsto \tilde{\varphi}'(x-y)\check{\psi}(y)$ est, en module, majorée par une fonction intégrable en y et indépendante de x. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme et il résulte de ce théorème que $\tilde{\varphi} * \check{\psi}$ est dérivable et que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\tilde{\varphi} * \check{\psi})'(x) = (\tilde{\varphi}' * \check{\psi})(x)$. Au moyen d'un raisonnement par récurrence, on peut montrer que $(\tilde{\varphi} * \check{\psi})$ est indéfiniment dérivable et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)} = (\tilde{\varphi}^{(m)} * \check{\psi})$. Montrons maintenant que $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} * \check{\psi}) \subset [a-1,b]$. En utilisant le fait que $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset [-1,0]$ et $\operatorname{supp} \check{\psi} \subset [a,b]$, on a

$\tilde{\varphi}(a-y)\check{\psi}(y) \neq 0$ entraîne que $a \leq y \leq b$ et $-1 \leq x-y \leq 0$.
D'où $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} * \check{\psi}) \subset [a-1, b]$.

c) Pour tout entier $N \geq 1$, on désigne par $\sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})(x) = \frac{(b-a)}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varphi}\left(x - a - \frac{k(b-a)}{N}\right) \check{\psi}\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right).$$

(5)

Montrons que $\sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})$ est une fonction de $S(\mathbb{R})$ à support compact contenu dans $[a-1, b]$. En utilisant le fait que $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset [-1, 0]$ et $\operatorname{supp} \check{\psi} \subset [a, b]$, on a

$\tilde{\varphi}\left(x - a - \frac{k(b-a)}{N}\right) \check{\psi}\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right) \neq 0$ entraîne que

$-1 \leq x - a - \frac{k(b-a)}{N} \leq 0$. D'où $a - 1 \leq a - 1 + \frac{k(b-a)}{N}$

$\leq x \leq b$. $\sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})$ est indéfiniment dérivable comme composée, produit et somme de fonctions indéfiniment dérivables.

d) Montrons que $\lim_{N \to +\infty} \sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi}) = \tilde{\varphi} * \check{\psi}$, au sens de la topologie induite par les semi-normes N_p, où $p \in \mathbb{N}$.

En utilisant le fait que $\operatorname{supp}(\tilde{\varphi} * \check{\psi}) \subset [a-1, b]$ et pour tout entier $N \geq 1$, $\operatorname{supp}(S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})) \subset [a-1, b]$, on a pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \left((\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x) - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x) \right) \right|$$

$$= \sup_{x \in [a-1, b]} \left| x^n \left((\tilde{\varphi}^{(m)} * \check{\psi})(x) - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x) \right) \right|$$

$$\leq \left(\max(|a-1|,|b|)\right)^n \sup_{x\in[a-1,b]} \left|(\tilde{\varphi}^{(m)} * \check{\psi})(x) - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x)\right|$$

(6)

On a de plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a-1, b]$,

$$\left|(\tilde{\varphi}^{(m)} * \check{\psi})(x) - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{N}}^{a+\frac{k(b-a)}{N}} \left|\tilde{\varphi}^{(m)}(x-y)\check{\psi}(y) - \tilde{\varphi}^{(m)}\left(x-a-\frac{k(b-a)}{N}\right)\check{\psi}\left(a+\frac{k(b-a)}{N}\right)\right| dy$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{N}}^{a+\frac{k(b-a)}{N}} \left|\tilde{\varphi}^{(m)}(x-y) - \tilde{\varphi}^{(m)}\left(x-a-\frac{k(b-a)}{N}\right)\right| \left|\check{\psi}(y)\right| dy$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \int_{a+\frac{(k-1)(b-a)}{N}}^{a+\frac{k(b-a)}{N}} \left|\tilde{\varphi}^{(m)}\left(x-a-\frac{k(b-a)}{N}\right)\right| \left|\check{\psi}(y) - \check{\psi}\left(a+\frac{k(b-a)}{N}\right)\right| dy$$

$$\leq \|\tilde{\varphi}^{(m+1)}\|_\infty \left(\int_a^b |\check{\psi}(y)|\, dy\right) \times \frac{1}{N}$$

$$+ \|\check{\psi}'\|_\infty \|\tilde{\varphi}^{(m)}\|_\infty \times \frac{(b-a)}{N}. \qquad (7)$$

Il résulte de (6) et (7) que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^n\left((\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x) - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})^{(m)}(x)\right)\right| = 0.$$

Cela prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathcal{N}_p\left(\tilde{\varphi} * \check{\psi} - S_N(\tilde{\varphi} * \check{\psi})\right) = 0.$$

5) a) Montrons que l'application $L : S(\mathbb{R}) \longrightarrow S(\mathbb{R})$
$\psi \longmapsto L(\psi) = \tilde{\varphi} * \psi$ est linéaire et continue. Il est clair que L est linéaire. Montrons que L est continue au sens de la topologie induite par les semi-normes $\mathcal{N}_p$, $p \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, en utilisant le théorème de dérivation sous le signe somme, on peut montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\psi \in S(\mathbb{R})$ on a,

$$(\tilde{\varphi} * \psi)^{(m)} = (\tilde{\varphi}^{(m)} * \psi). \qquad (8)$$

De plus, en utilisant la formule du binôme, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| x^n \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}^{(m)}(x-y)\psi(y)\,dy \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_{\mathbb{R}} |x-y|^{n-k} |\tilde{\varphi}^{(m)}(x-y)|\, |y|^k |\psi(y)|\,dy$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(|y|^k |\psi(y)| \right) \times \int_{\mathbb{R}} |x-y|^{n-k} |\tilde{\varphi}^{(m)}(x-y)|\,dy$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \int_{\mathbb{R}} |z|^{n-k} |\varphi^{(m)}(z)|\,dz \right) \times \mathcal{N}_n(\psi).$$

Cela prouve que L est à valeurs dans $S(\mathbb{R})$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\psi \in S(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{N}_p(L(\psi)) \leq C \mathcal{N}_p(\psi)$. Ce qui signifie que L est continue. On a $W = U \circ L$, ce qui

prouve que W est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R})$.

b) Dans cette question, on suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\Psi \in S(\mathbb{R})$, on a $\langle u, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)\Psi(x)\,dx$

Montrons que la distribution tempérée W vérifie pour tout $\Psi \in S(\mathbb{R})$,

$$\langle W, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (g * \varphi)(y)\Psi(y)\,dy. \qquad (9)$$

Il résulte de mes hypothèses que l'on a pour tout $\Psi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle W, \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)(\tilde{\varphi} * \Psi)(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y-x)\Psi(y)\,dy\right)dx. \qquad (10)$$

De plus,

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |g(x)\varphi(y-x)\Psi(y)|\,dx\,dy \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \times \int_{\mathbb{R}} |\Psi(y)|\,dy < +\infty.$$

On peut donc dans (10) appliquer le Théorème de Fubini, et en l'appliquant on obtient (9).

c) Montrons que pour toute fonction $\check{\Psi} \in S(\mathbb{R})$, à support compact, on a

$$W(\check{\Psi}) = v(\check{\Psi}). \qquad (11)$$

En utilisant la définition de W, la question 4) d) et le fait que u est une forme linéaire continue sur $S(\mathbb{R})$ on

trouve que

$$W(\check{\Psi}) = U[(\tilde{\varphi} * \check{\Psi})] = \lim_{N \to +\infty} U[\sigma_N(\tilde{\varphi} * \check{\Psi})]. \quad (12)$$

Il résulte alors de (12) et de (5) que

$$W(\check{\Psi}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{(b-a)}{N} \sum_{k=1}^{N} \check{\Psi}\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right) f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$

$$= \int_a^b f(t)\,\check{\Psi}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\check{\Psi}(t)\,dt = V(\check{\Psi}). \quad (13)$$

d) On sait que les fonctions de $S(\mathbb{R})$ à support compact sont denses dans $S(\mathbb{R})$. En utilisant le fait que W et V sont des formes linéaires continues sur $S(\mathbb{R})$ et en utilisant 3) c) on peut montrer que l'on a pour tout $\Psi \in S(\mathbb{R})$, $W(\Psi) = V(\Psi)$.