Université de Lille, M2 Mathématiques - Parcours Recherche,
Devoir Surveillé "Calcul stochastique et modèles de diffusions"

Le jeudi 10/03/2022 durée 2 heures. Les documents sont autorisés.
La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet de devoir surveillé, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté $E(\cdot)$. On désigne par $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E\big(B(1)^2\big) = 1$; $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle pour ce mouvement brownien B, et on suppose que tous les événements de probabilité nulle appartiennent à $\mathcal{F}_0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\nu(0,t)$ désigne la classe habituelle des intégrandes pour l'intégrale d'Itô sur $[0,t]$ obtenue à partir de B.

Exercice Le réel strictement positif T est arbitraire et fixé. Pour tout $g \in \nu(0,T)$, le processus $\{I(g,t)\}_{t\in[0,T]}$ désigne la modification à trajectoires continues du processus stochastique $\Big\{ \int_0^t g(s)\, dB_s \Big\}_{t\in[0,T]}$.

Dans tout cet exercice on suppose que $f = \{f(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ appartenant à $\nu(0,T)$ est arbitraire et fixé. On dit qu'une variable aléatoire $\tau : (\Omega, \mathcal{F}) \to ([0,T], \mathcal{B}([0,T]))$ est un temps d'arrêt, lorsque pour tout $t \in [0,T]$, l'événement $\{\omega \in \Omega, \tau(\omega) \le t\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_t$. On admet que, pour que tout temps d'arrêt τ, le processus $f_\tau = \{f_\tau(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$, tel que $f_\tau(s) := f(s)\mathbb{1}_{[0,\tau[}(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, appartient à $\nu(0,T)$, et l'on a presque sûrement pour tout $t \in [0,T]$, $I(f_\tau, t) = I(f, t\wedge\tau)$, où $t \wedge \tau := \min\{t, \tau\}$.

1) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose $\tau_n(\omega) := \inf\big\{t \in [0,T],\ \big|I(f,t,\omega)\big| > n\big\}$, avec la convention que $\tau_n(\omega) := T$ lorsque $\big\{t \in [0,T],\ \big|I(f,t,\omega)\big| > n\big\}$ est l'ensemble vide. Montrer que τ_n est un temps d'arrêt à valeurs dans $]0,T]$. Par la suite, on pose $f_n = f_{\tau_n}$.

2) Montrer que, presque sûrement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup\big\{\big|I(f_n,t)\big|,\ t \in [0,T]\big\} \le n$.

3) Dans toute la suite, on suppose que le nombre réel $p > 2$ est arbitraire et fixé. Au moyen de la formule d'Itô, montrer que, pour tous $t \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a

$$E\Big(\big|I(f_n,t)\big|^p\Big) = \frac{p(p-1)}{2}\int_0^t E\Big(\big|I(f_n,s)\big|^{p-2}\,|f_n(s)|^2\Big)\, ds\,.$$

4) Au moyen de l'inégalité de Hölder, montrer que, pour tous $t \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'on a

$$E\Big(\big|I(f_n,t)\big|^p\Big) \le \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} t^{\frac{p-2}{2}} \int_0^t E\Big(|f_n(s)|^p\Big)\, ds\,.$$

5) Déduire de ce qui précède que, pour tout $t \in [0,T]$, l'on a

$$E\Big(\big|I(f,t)\big|^p\Big) \le \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} t^{\frac{p-2}{2}} \int_0^t E\Big(|f(s)|^p\Big)\, ds\,.$$

Partie 1 du Problème On note par $\mathcal{D}$ un sous-ensemble fini et non vide de $\mathbb{R}$, et on note par Φ une fonction arbitraire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les 3 conditions suivantes :

(i) Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier,

(ii) Φ est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}$,

(iii) il existe $\mathcal{I}$ un intervalle ouvert et borné contenant $\mathcal{D}$ tel que la dérivée seconde de Φ vérifie $\sup\{|\Phi''(x)|\,,\, x\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{D}\}<+\infty$.

On admet que, grâce à ces 3 conditions, on peut construire une suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ tout entier et vérifient les 4 propriétés suivantes :

(I) pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{I}$, on a $\Phi_n(x)=\Phi(x)$;

(II) on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\{|\Phi_n(x)-\Phi(x)|+|\Phi_n'(x)-\Phi'(x)|\,,\, x\in\mathbb{R}\}=0$;

(III) on a $\sup\{|\Phi_n''(x)|\,,\,(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathcal{I}\}<+\infty$;

(IV) pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}|\Phi_n''(x)-\Phi''(x)|=0$.

1) Montrer que le mouvement brownien $\{B(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ vérifie $E\big(\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(B(s))\,ds\big)=0$. En déduire que la mesure de Lebesgue de l'ensemble aléatoire $\{s\in\mathbb{R}_+,\, B(s)\in\mathcal{D}\}$ vaut zéro presque sûrement.

2) Justifier l'existence de l'intégrale d'Itô généralisée $\int_0^t\Phi_n'(B(s))\,dB_s$, puis montrer qu'elle converge en probabilité vers $\int_0^t\Phi'(B(s))\,dB_s$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On prolonge la fonction Φ'' à $\mathbb{R}$ tout entier en posant, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $\Phi''(x)=0$. Justifier l'existence des 2 intégrales de Lebesgue $\int_0^t\Phi_n''(B(s))\,ds$ et $\int_0^t\Phi''(B(s))\,ds$, puis prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^t\Phi_n''(B(s))\,ds=\int_0^t\Phi''(B(s))\,ds$ pour la convergence presque sûre.

4) En utilisant la formule d'Itô, déduire de ce qui précède, que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a presque sûrement : $\Phi(B(t))=\Phi(B(0))+\displaystyle\int_0^t\Phi'(B(s))\,dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\Phi''(B(s))\,ds$.

Partie 2 du Problème Pour tous $a\in\mathbb{R}$ et $j\in\mathbb{N}^*$, On désigne par $\Psi_{a,j}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$\Psi_{a,j}(x)=2^{-1}\big(j^{-1}+j(x-a)^2\big)\mathbb{1}_{[0,\,j^{-1}[}(|x-a|)+|x-a|\mathbb{1}_{[j^{-1},\,+\infty[}(|x-a|)\,.$$

1) Montrer que, pour tous $a\in\mathbb{R}$ et $j\in\mathbb{N}^*$, $\Psi_{a,j}$ vérifie les 3 conditions (i), (ii) et (iii) qui ont été imposées à Φ au début de la partie 1.

2) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Au moyen du résultat établi à la fin de la partie 1, montrer que, pour tous $j\in\mathbb{N}^*$, $t\in\mathbb{R}_+$ et $a\in\mathbb{R}$, on a presque sûrement

$$\Psi_{a,j}(B(t))=\Psi_{a,j}(B(0))+\int_0^t\Psi_{a,j}'(B(s))\,dB_s+\frac{j}{2}\lambda\Big(\{s\in[0,t],\,|B(s)-a|<j^{-1}\}\Big)\,.$$

3) Montrer que, pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $a\in\mathbb{R}$, le processus $\{\Psi_{a,j}'(B(s))\mathbb{1}_{[0,\,j^{-1}[}(|B(s)-a|)\}_{s\in\mathbb{R}^+}$ appartient à $\nu(0,t)$, puis prouver que l'intégrale d'Itô sur $[0,t]$ de ce processus converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$.

4) La fonction sgn est définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par $\mathrm{sgn(x)}:=\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\mathrm{x})-\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(\mathrm{x})$. Montrer que, pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $a\in\mathbb{R}$, le processus $\{\mathrm{sgn(B_s-a)}\}_{\mathrm{t}\in\mathbb{R}_+}$ appartient à $\nu(0,t)$, puis prouver que l'on a, au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$,

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{j}{2}\lambda\Big(\{s\in[0,t],\,|B(s)-a|<j^{-1}\}\Big)=|B(t)-a|-|a|-\int_0^t\mathrm{sgn(B(s)-a)\,dB_s}\,;$$

signalons au passage que cette dernière égalité s'appelle : *la formule de Tanaka pour le temps local du mouvement brownien.*