**Université de Lille, M2 Mathématiques - Parcours Recherche,
Devoir Surveillé "Calcul stochastique et modèles de diffusions"**

Le jeudi 11/03/2021 durée 2 heures. Les documents sont autorisés.
La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet de Devoir Surveillé, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté $E(\cdot)$. On note par T un réel strictement positif arbitraire et fixé. Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ on pose :

$$t_i^n := \frac{Ti}{n}.$$

On désigne par $B = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+} = \{B_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E(B(1)^2) = 1$. De plus, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est la filtration naturelle pour ce mouvement brownien B , et $\nu(0, T)$ est la classe habituelle des intégrandes pour l'intégrale d'Itô sur $[0, T]$ obtenue à partir de B .

Exercice 1 On désigne par $\{K(s)\}_{s \in [0, T]}$ un processus stochastique vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (I) $(s, \omega) \mapsto K(s, \omega)$ est une application mesurable de $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$;
- (II) il existe α une constante positive finie et déterministe telle que l'on a presque sûrement $\int_0^T |K(s)| ds \leq \alpha < +\infty$.

1) Soit $\{M(t)\}_{t \in [0, T]}$ le processus stochastique défini presque sûrement, trajectoire par trajectoire, pour tout $t \in [0, T]$, par l'intégrale de Lebesgue $M(t) := \int_0^t K(s) ds$.

- a) Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, la variable aléatoire $M(t)$ appartient à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- b) Montrer que les trajectoires de $\{M(t)\}_{t \in [0, T]}$ sont presque sûrement des fonctions continues sur l'intervalle compact $[0, T]$, et qui s'annulent en 0.
- c) Montrer que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\sum_{i=1}^n (M(t_i^n) - M(t_{i-1}^n))^2\right) = 0.$$

2) Dans cette question, en plus des hypothèses précédentes, on suppose que le processus $\{M(t)\}_{t \in [0, T]}$ est une martingale pour une certaine filtration $(\mathcal{A}_t)_{t \in [0, T]}$ de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$E\left((M(T))^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n (M(t_i^n) - M(t_{i-1}^n))^2\right).$$

- b) En déduire que, presque sûrement pour tout $t \in [0, T]$, on a $M(t) = 0$.

Exercice 2 On désigne par $\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne déterministe vérifiant $\int_0^T |\delta(s)|^2 ds < +\infty$, ce qui implique que $\delta \in \nu(0, T)$. On note par $f = \{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus stochastique à trajectoires continues tel que, pour tout $t \in [0, T]$, on a presque sûrement $f(t) = \int_0^t \delta(s) dB_s$, et pour tout $t \in]T, +\infty[$, on a $f(t) := f(T)$.

1) Montrer que $f \in \nu(0, T)$.

2) Pour tout $x \in [0, T]$, la variable aléatoire $g(x)$ est définie par $g(x) := \int_0^x f(t) dB_t$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in [0, T]^2$, la covariance $\text{Cov}(g(x), f(y))$ existe vaut zéro.

Problème Pour tout $f \in \nu(0, T)$, le processus $\{I(f, t)\}_{t \in [0, T]}$ désigne la modification à trajectoires continues du processus stochastique $\left\{ \int_0^t f(s) dB_s \right\}_{t \in [0, T]}$. Pour tous $t \in [0, T]$ et $\omega \in \Omega$, la valeur de la variable aléatoire $I(f, t)$ en ω est notée par $I(f, t, \omega)$.

1) Supposons que $u \in [0, T]$, que l'événement $A \in \mathcal{F}_u$, et que $f \in \nu(0, T)$ sont arbitraires et fixés. On désigne par $f^{A, u} = \{f^{A, u}(s)\}_{s \in \mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini, pour tout $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, par $f^{A, u}(s, \omega) := \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{[u, T[}(s) f(s, \omega)$; notons que $f^{A, T}(s, \omega) = 0$ pour tout $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ (puisque la fonction indicatrice de l'ensemble vide est identiquement nulle). Montrer que $f^{A, u} \in \nu(0, T)$.

2) Dans cette question, on suppose que $u \in [0, T[$ et que f est une fonction élémentaire de $\nu(0, T)$, autrement dit $f \in \mathcal{E}(0, T) \cap \nu(0, T)$. Montrer que $f^{A, u}$ est une fonction élémentaire de $\nu(u, T)$, autrement dit $f^{A, u} \in \mathcal{E}(u, T) \cap \nu(u, T)$. En déduire que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'on a

$$I(f^{A, u}, T, \omega) = \mathbb{1}_A(\omega) (I(f, T, \omega) - I(f, u, \omega)). \quad (*)$$

3) Montrer que pour tout $f \in \nu(0, T)$ et pour tout $u \in [0, T]$, l'égalité (*) est vraie lorsque ω appartient à un événement de probabilité 1.

4) Soit $\tau : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow ([0, T], \mathcal{B}([0, T]))$ un temps d'arrêt arbitraire, c'est-à-dire une variable aléatoire arbitraire telle que, pour tout $t \in [0, T]$, l'événement $\{\omega \in \Omega, \tau(\omega) \leq t\}$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_t$. Supposons que $f \in \nu(0, T)$ est arbitraire et fixé; les deux processus stochastiques $f_{g, \tau}$ et $f_{d, \tau}$ sont définis, pour tout $(s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, par : $f_{g, \tau}(s, \omega) := \mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)[}(s) f(s, \omega)$ et $f_{d, \tau}(s, \omega) := \mathbb{1}_{[\tau(\omega), T[}(s) f(s, \omega)$.

a) Montrer que $f_{g, \tau}$ et $f_{d, \tau}$ appartiennent à $\nu(0, T)$.

b) Pour tout entier $n \geq 2$, soit τ_n la variable aléatoire définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par : $\tau_n(\omega) := \sum_{i=1}^n t_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}(\omega)$, où $A_i^n := \{\omega \in \Omega, t_{n-1}^n \leq \tau(\omega) \leq t_n^n\}$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $A_i^n := \{\omega \in \Omega, t_{i-1}^n \leq \tau(\omega) < t_i^n\}$. Montrer que τ_n est un temps d'arrêt, puis que la suite $(\tau_n)_{n \geq 2}$ converge presque sûrement vers τ .

c) Les processus f_{g, τ_n} et f_{d, τ_n} sont définis de façon analogue aux processus $f_{g, \tau}$ et $f_{d, \tau}$ mais en remplaçant τ par τ_n . En utilisant l'égalité (*), montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a presque sûrement $I(f_{d, \tau_n}, T) = I(f, T) - I(f, \tau_n)$ et $I(f_{g, \tau_n}, T) = I(f, \tau_n)$.

d) Montrer que la suite $(I(f_{g, \tau_n}, T))_{n \geq 2}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers $I(f_{g, \tau}, T)$.

e) Montrer que l'on a presque sûrement $I(f_{g, \tau}, T) = I(f, \tau)$.