Université de Lille, M2 Mathématiques - Parcours Mathématiques Appliquées,
Devoir Surveillé "Intégrale d'Itô, formule d'Itô et applications à la finance"

Ce DS du 15/03/18 concerne la partie du cours enseignée par A.Ayache, sa durée est 2 heures.
Les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Remarques : Dans tout ce sujet de DS, l'espace de probabilité sous-jacent est noté par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'opérateur espérance (associé à P) est noté $E(\cdot)$.

On désigne par $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est à valeurs réelles, à trajectoires continues, et vérifie $E\big(B(1)^2\big) = 1$. De plus, on désigne par $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; rappelons que $\mathcal{F}_t := \sigma\big(B(u)\,;\, u \le t\big)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $d_{j,k} := 2^{-j}k = k/2^j$.

Signalons enfin que, pour tous réels a et b, on note par $a \wedge b$ le minimum de a et b.

Exercice On désigne par Z la variable aléatoire définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$Z(\omega) := B(1,\omega) - 2\int_0^1 sB(s,\omega)\,ds.$$

1) Montrer que Z est mesurable pour la sous-tribu $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$.
2) Montrer que Z appartient à $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$ et que son espérance vaut zéro.
3) Calculer la variance de Z ; pour ce faire on pourra utiliser la formule d'Itô.

Problème Soit une fonction mesurable f de $\big(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}\big)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les trois propriétés suivantes:

(I) pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $s \mapsto f(s,\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

(II) le processus stochastique $\{f(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_s)_{s\in\mathbb{R}_+}$-adapté;

(III) f est bornée, c'est-à-dire que $\rho_f := \sup\big\{|f(s,\omega)|\,;\ (s,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega\big\} < +\infty$.

1) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on note par $\{I_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$I_j(t) := \sum_{k=0}^{+\infty} f(d_{j,k})\Big(B(t\wedge d_{j,k+1}) - B(t\wedge d_{j,k})\Big)^2.$$

Montrer que ce processus est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adapté.
2) Pouver que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, on a $I_j(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
3) On désigne par μ la fonction définie, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, par $\mu(s) = E\big(f(s)\big)$. Montrer que μ est bornée et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $\lim_{j\to+\infty} E\big(I_j(t)\big) = \int_0^t \mu(s)\,ds$.

5) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on note par $\{\widetilde{I}_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$\widetilde{I}_j(t) := \sum_{k=0}^{+\infty} f(d_{j,k}) E\bigg(\Big(B(t \wedge d_{j,k+1}) - B(t \wedge d_{j,k})\Big)^2\bigg).$$

a) Montrer que l'on

$$\sup\Big\{t^{-1}\big|\widetilde{I}_j(t,\omega)\big|\,;\ (j,t,\omega) \in \mathbb{N}\times]0,+\infty[\times\Omega\Big\} \le \rho_f,$$

et en déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\widetilde{I}_j(t) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_j(t) = I_j(t) - \widetilde{I}_j(t)$. Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de variables aléatoires $(R_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (la variable aléatoire identiquement nulle) au sens de la norme de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$.

c) Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de variables aléatoires $(R_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 P-presque sûrement.

d) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, étudier la convergence presque sûre de la suite de variables aléatoires $(I_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ et déterminer précisément la limite de cette suite.

6) On désigne par G une fonction <u>déterministe</u> de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. On note par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique qui est défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par l'intégrale d'Itô

$$X(t) := \int_0^t f(s)\, dB_s\,.$$

Dans tout ce qui suit, ce processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est identifié avec sa modification à trajectoires continues, dont on connait l'existence d'après le cours. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on désigne par $\{Y_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ le processus stochastique défini, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$Y_j(t) := \sum_{k=0}^{+\infty} G(d_{j,k})\Big(X(t \wedge d_{j,k+1}) - X(t \wedge d_{j,k})\Big).$$

a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, $\{Y_j(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale de carré intégrable dont les trajectoires sont des fonctions continues.

b) Prouver que, pour $T \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P\Big(\sup_{t\in[0,T]} |Y_j(t)| \ge \lambda\Big) \le \lambda^{-2}\rho_f^2\, T \times \Big(\sup_{t\in[0,T]} |G(t)|^2\Big).$$

c) Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_j(T) := (1+j)^{-3/4} \times \Big(\sup_{t\in[0,T]} |Y_j(t)|\Big).$$

Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$ fixé, étudier la convergence presque sûre de la suite de variables aléatoires $(U_j(T))_{j\in\mathbb{N}}$ et déterminer précisément la limite de cette suite.

d) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de variables aléatoires $(Y_j(t))_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ vers une variable aléatoire, notée par $Y_\infty(t)$, qui s'exprime comme une intégrale d'Itô que l'on précisera (cette question n'est pas liée aux deux questions qui la précèdent).