

Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Correction du devoir à la maison de Processus Stochastiques
 Année 2011-2012

Quelques préliminaires

Bases hilbertienne : Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ¹ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On dit qu'une suite $\{e_n\}_{n \in \mathcal{I}}$ ² d'éléments de H , est une *base hilbertienne* de H , si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H i.e. pour tous $p, q \in \mathcal{I}$ on a $\langle e_p, e_q \rangle = 1$ lorsque $p = q$ et $\langle e_p, e_q \rangle = 0$ sinon ;
- (ii) les combinaisons linéaires des e_n sont denses dans H i.e. pour tout $a \in H$ et tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $L \in \mathbb{N}$, il existe $n_0, \dots, n_L \in \mathcal{I}$ et il existe $\lambda_{n_0}, \dots, \lambda_{n_L} \in \mathbb{R}$ tels que $\|a - \sum_{l=0}^L \lambda_{n_l} e_{n_l}\| < \eta$.

Les conditions (i) et (ii) impliquent que tout $a \in H$ vérifie $a = \sum_{n \in \mathcal{I}} \langle a, e_n \rangle e_n$; plus précisément, pour toute suite $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{I}_{L+1}$ et $\bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_L = \mathcal{I}$, l'on a, $\lim_{L \rightarrow +\infty} \|a - \sum_{n \in \mathcal{I}_L} \langle a, e_n \rangle e_n\| = 0$. Il en résulte que $\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathcal{I}} \langle a, e_n \rangle \langle b, e_n \rangle$ pour tous $a, b \in H$ et par conséquent $\|a\|^2 = \sum_{n \in \mathcal{I}} |\langle a, e_n \rangle|^2$ pour tout $a \in H$.

Le système de Haar : On pose $\mathcal{D} = \{(0, 0)\} \cup \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 2^j\}$ et pour tout $(j, k) \in \mathcal{D}$,

$$h_{j,k} = \begin{cases} \mathbf{1}_{[0,1[} & \text{lorsque } (j, k) = (0, 0), \\ 2^{j/2} (\mathbf{1}_{[(k-1)2^{-j}, (2k-1)2^{-j-1}[} - \mathbf{1}_{[(2k-1)2^{-j-1}, k2^{-j}[}) & \text{sinon ;} \end{cases}$$

notons que pour tous réels $\alpha < \beta$, $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[\alpha, \beta[$. On admet que la suite $\{h_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{D}}$, qu'on appelle *le système de Haar*, est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$ formé par les fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et de carré intégrable sur cet intervalle (au sens de la mesure de Lebesgue notée par du). Rappelons que $L^2([0, 1])$ est muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(u)g(u) du$.

Dans tout ce problème, on désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Partie I : processus gaussiens et bases hilbertiennes

On note par $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et par $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{I}_{L+1}$ et $\bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_L = \mathcal{I}$. On désigne par $\{e_n\}_{n \in \mathcal{I}}$ une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$ et on désigne par $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathcal{I}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur Ω . Enfin, $(f_t)_{t \in [0, 1]}$ est une famille de fonctions qui appartiennent à $L^2([0, 1])$.

¹On peut, plus généralement supposer que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, pour simplifier on se restreint à $\mathbb{R}$.

² $\mathcal{I}$ est un ensemble dénombrable, mais il ne s'agit pas forcément d'une partie de $\mathbb{N}$.

1) Pour tous $L \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on pose $X_L(t) = \sum_{n \in \mathcal{I}_L} \langle f_t, e_n \rangle \epsilon_n$. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, pour tous $t_1, \dots, t_M \in [0, 1]$ et pour tous $\gamma_1, \dots, \gamma_M \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{m=1}^M \gamma_m X_L(t_m)$ est une gaussienne centrée dont la variance vaut : $\sum_{n \in \mathcal{I}_L} \left| \langle \sum_{m=1}^M \gamma_m f_{t_m}, e_n \rangle \right|^2$.

Réponse : en utilisant la définition de $X_L(t)$ et la bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m X_L(t_m) = \sum_{n \in \mathcal{I}_L} \left\langle \sum_{m=1}^M \gamma_m f_{t_m}, e_n \right\rangle \epsilon_n ; \quad (1)$$

ainsi, $\sum_{m=1}^L \gamma_m X_L(t_m)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des variables aléatoires ϵ_n qui sont gaussiennes centrées et indépendantes. $\sum_{m=1}^L \gamma_m X_L(t_m)$ est donc une variable aléatoire gaussienne centrée ; de plus, compte tenu de la non corrélation des ϵ_n et compte tenu du fait que leurs variances sont toutes égales à 1, en utilisant (1), on obtient,

$$\text{Var} \left(\sum_{m=1}^M \gamma_m X_L(t_m) \right) = \sum_{n \in \mathcal{I}_L} \left| \langle \sum_{m=1}^M \gamma_m f_{t_m}, e_n \rangle \right|^2.$$

2) Fixons $t \in [0, 1]$, montrer que $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ formé par les variables aléatoires réelles définies sur Ω et dont le second moment est fini ; rappelons que $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire défini par $((X, Y)) = \mathbb{E}(XY)$, où $\mathbb{E}(\cdot)$ désigne l'espérance.

Réponse : en utilisant le fait que les ϵ_n sont des variables aléatoires indépendantes centrées et réduites, on a pour tout $L, Q \in \mathbb{N}$,

$$\|X_{L+Q}(t) - X_L(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathbb{E} \left(|X_{L+Q}(t) - X_L(t)|^2 \right) = \sum_{n \in \mathcal{I}_{L+Q} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2. \quad (2)$$

On a de plus, $\|f_t\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{n \in \mathcal{I}} |\langle f_t, e_n \rangle|^2 < \infty$ et par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $L_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $L \geq L_0$,

$$\sum_{n \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2 \leq \epsilon. \quad (3)$$

Finalement, (2) et (3) impliquent que $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.

3) Prouver que $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $L^2(\Omega)$ et que sa limite ne dépend pas du choix de la suite des ensembles d'indices $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$; autrement dit, si on remplace $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$ par une autre suite $(\mathcal{I}'_L)_{L \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}'_L \subset \mathcal{I}'_{L+1}$ et $\bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{I}'_L = \mathcal{I}$, alors l'on obtient, à un événement $\mathbb{P}$ -négligeable près, la même limite. Désormais la limite de $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est notée par $X(t)$.

Réponse : étant donné que $L^2(\Omega)$ est complet, $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans cet espace, nous notons par $X(t)$ sa limite. Désignons maintenant par $(\mathcal{I}'_L)_{L \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}'_L \subset \mathcal{I}'_{L+1}$ et $\bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{I}'_L = \mathcal{I}$ (a priori la suite $(\mathcal{I}'_L)_{L \in \mathbb{N}}$ est distincte de la suite $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$) ; pour tout $L \in \mathbb{N}$, on pose $X'_L(t) = \sum_{n \in \mathcal{I}'_L} \langle f_t, e_n \rangle e_n$. En raisonnant comme dans I-2), on peut montrer que la suite $\{X'_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $L^2(\Omega)$, nous notons par $X'(t)$ sa limite. Nous allons maintenant prouver que $X(t) = X'(t)$ presque sûrement. A cause de la finitude des ensembles $\mathcal{I}_L$ et des propriétés des ensembles $\mathcal{I}'_L$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, telle que tout $L \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{I}'_{\varphi(L)}$. Ainsi,

$$\|X_L(t) - X'_{\varphi(L)}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{L \in \mathcal{I}'_{\varphi(L)} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2.$$

enfin, en faisant tendre L vers $+\infty$, on trouve que

$$\|X(t) - X'(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{L \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_L} |\langle f_t, e_n \rangle|^2 = 0.$$

On a donc $\|X(t) - X'(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, ce qui signifie que les variables aléatoires $X(t)$ et $X'(t)$ sont égales, à un événement $\mathbb{P}$ -négligeable près.

4) Montrer que $\{X(t)\}_{t \in [0,1]}$ est un processus stochastique gaussien centré dont la fonction de covariance s_X est donnée, pour tous $t_1, t_2 \in [0, 1]$, par $s_X(t_1, t_2) = \int_0^1 f_{t_1}(u) f_{t_2}(u) du$ (indication : pour établir la gaussianité de ce processus on pourra utiliser la notion de fonction caractéristique).

Réponse : pour montrer que le processus stochastique $\{X(t)\}_{t \in [0,1]}$ est gaussien centré, il suffit de prouver que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, pour tous $t_1, \dots, t_M \in [0, 1]$ et pour tous $\gamma_1, \dots, \gamma_M \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{m=1}^M \gamma_m X(t_m)$ est une gaussienne centrée. Posons, $Y = \sum_{m=1}^M \gamma_m X(t_m)$ et pour tout $L \in \mathbb{N}$, $Y_L = \sum_{m=1}^M \gamma_m X_L(t_m)$. Il résulte de I-3) que

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \|Y_L - Y\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (4)$$

Grâce à (4) et à l'inégalité $|\|Y_L\|_{L^2(\Omega)} - \|Y\|_{L^2(\Omega)}| \leq \|Y_L - Y\|_{L^2(\Omega)}$, on obtient,

$$\|Y\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \|Y_L\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5)$$

Grâce à (4), à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'inégalité $|\|Y_L\|_{L^1(\Omega)} - \|Y\|_{L^1(\Omega)}| \leq \|Y_L - Y\|_{L^1(\Omega)}$, on obtient,

$$\mathbb{E}(Y) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_L) = 0, \quad (6)$$

où la dernière égalité résulte de I-1). En combinant (5) avec (6), on trouve que,

$$\text{Var}(Y) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \text{Var}(Y_L). \quad (7)$$

Désignons respectivement par Φ_Y et Φ_{Y_L} les fonctions caractéristiques de Y et Y_L . D'après I-1), on sait que pour tout $L \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{Y_L}(\xi) = \exp\left(-\frac{\text{Var}(Y_L)\xi^2}{2}\right). \quad (8)$$

Par ailleurs, il résulte de (4), que la suite $(Y_L)_{L \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers Y , ce qui revient à dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_Y(\xi) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \Phi_{Y_L}(\xi). \quad (9)$$

En combinant, (7), (8) et (9), on trouve que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_Y(\xi) = \exp\left(-\frac{\text{Var}(Y)\xi^2}{2}\right),$$

ce qui montre que Y est une variable aléatoire gaussienne centrée.

Partie II : représentation du mouvement brownien dans le système de Schauder

On appelle le *système de Schauder*, la suite $\{\Delta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{D}}$ des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tous $(j, k) \in \mathcal{D}$ et $t \in [0, 1]$, par $\Delta_{j,k}(t) = \int_0^t h_{j,k}(u) du$.

1) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, l'on a : $\Delta_{0,0}(t) = t$.

Réponse : on a en utilisant les définitions de $\Delta_{0,0}$ et $h_{0,0}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $\Delta_{0,0}(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,1]}(u) du = \int_0^t du = t$.

2) On suppose $(j, k) \in \mathcal{D} \setminus \{(0, 0)\}$; prouver que le support de la fonction $\Delta_{j,k}$ est l'intervalle $\left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]$, puis que l'on a pour $t \in \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \min\left\{\left(t - \frac{k-1}{2^j}\right), \left(\frac{k}{2^j} - t\right)\right\}.$$

Réponse : lorsque $0 \leq t < (k-1)2^{-j}$, on a $h_{j,k}(u) = 0$ pour tout $u \in [0, t]$ et par conséquent

$$\Delta_{j,k}(t) = 0 ;$$

lorsque $k2^{-j} \leq t \leq 1$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \left(\int_{(k-1)2^{-j}}^{(2k-1)2^{-j-1}} du - \int_{(2k-1)2^{-j-1}}^{k2^{-j}} du \right) = 2^{j/2} (2^{-j-1} - 2^{-j-1}) = 0 ;$$

lorsque $(k-1)2^{-j} \leq t \leq (2k-1)2^{-j-1}$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \int_{(k-1)2^{-j}}^t du = 2^{j/2} \left(t - \frac{k-1}{2^j}\right) ;$$

lorsque $(2k-1)2^{-j-1} < t < k2^{-j}$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \left(\int_{(k-1)2^{-j}}^{(2k-1)2^{-j-1}} du - \int_{(2k-1)2^{-j-1}}^t du \right) = 2^{j/2} \left(2^{-j-1} - t + \frac{2k-1}{2^{j+1}} \right) = 2^{j/2} \left(\frac{k}{2^j} - t \right).$$

Il résulte de tout ce qui précède que $\text{Supp } \Delta_{j,k} = \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right]$ et que l'on a pour $t \in \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right]$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \min \left\{ \left(t - \frac{k-1}{2^j} \right), \left(\frac{k}{2^j} - t \right) \right\}.$$

3) Dans un même repère orthogonal, tracer en quatre couleurs différentes les graphes respectifs des fonctions $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{2,3}$ et $\Delta_{2,4}$.

4) Prouver que pour tous $t_1, t_2 \in [0, 1]$, l'on a : $\min(t_1, t_2) = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t_1) \Delta_{j,k}(t_2)$.

Réponse : pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathbf{1}_{[0,t]} \in L^2([0, 1])$, ainsi en utilisant le fait que le système de Haar forme une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$, on a pour tout $t_1, t_2 \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \min(t_1, t_2) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t_1]}(u) \mathbf{1}_{[0,t_2]}(u) du = \langle \mathbf{1}_{[0,t_1]}, \mathbf{1}_{[0,t_2]} \rangle \\ &= \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \langle \mathbf{1}_{[0,t_1]}, h_{j,k} \rangle \langle \mathbf{1}_{[0,t_2]}, h_{j,k} \rangle = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t_1) \Delta_{j,k}(t_2). \end{aligned}$$

5) Soit $\{\epsilon_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{D}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur Ω . Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$B(t) = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}.$$

Après avoir justifié la convergence de cette série, montrer que le processus stochastique $\{B(t)\}_{t \in [0,1]}$ ainsi défini, possède la même loi que celle d'un mouvement brownien standard.

Réponse : remarquons que l'on a pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $(j, k) \in \mathcal{D}$, $\Delta_{j,k}(t) = \langle \mathbf{1}_{[0,t]}, h_{j,k} \rangle$; ainsi, d'après la partie I), la série $B(t) = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}$ est convergente dans $L^2(\Omega)$, de plus le processus stochastique $\{B(t)\}_{t \in [0,1]}$ est gaussien centré et sa fonction de covariance s_B , est donnée pour tous $t_1, t_2 \in [0, 1]$, par,

$$s_B(t_1, t_2) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t_1]}(u) \mathbf{1}_{[0,t_2]}(u) du = \min(t_1, t_2) ;$$

ainsi $\{B(t)\}_{t \in [0,1]}$ admet la même fonction de covariance que celle d'un mouvement brownien standard ; le processus gaussien centré $\{B(t)\}_{t \in [0,1]}$ possède donc la même loi que celle d'un mouvement brownien standard.

6) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'on a : $\max_{t \in [0,1]} \left(\sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \right) = 2^{-\frac{j}{2}-1}$.

Réponse : au moyen de II-2), on peut montrer que $\sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(1) = 0$. Soit $t \in [0, 1[$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe un unique $m \in \{1, \dots, 2^j\}$ tel que $t \in [(m-1)2^{-j}, m2^{-j}[$, ainsi il résulte de II-2), que pour tout $k \in \{1, \dots, 2^j\}$, vérifiant $k \neq m$, on a $\Delta_{j,k}(t) = 0$; on en déduit que $\sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) = \Delta_{j,m}(t)$. Il résulte de ce qui précède et de II-2), que

$$\max_{t \in [0,1]} \left(\sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \right) = \max_{m \in \{1, \dots, 2^j\}} \left(\max_{t \in [(m-1)2^{-j}, m2^{-j}[} \Delta_{j,m}(t) \right) = 2^{-\frac{j}{2}-1}.$$

7) Au moyen du Lemme de Borel-Cantelli prouver que l'on a presque sûrement,

$$\sup_{(j,k) \in \mathcal{D}} \frac{|\epsilon_{j,k}|}{\sqrt{1+j}} < \infty.$$

Réponse : soit c une constante vérifiant $c > \sqrt{2 \log 2}$. On a pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, 2^j\}} |\epsilon_{j,k}| > c\sqrt{1+j} \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \{1, \dots, 2^j\}} \left\{ \omega \in \Omega : |\epsilon_{j,k}(\omega)| > c\sqrt{1+j} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^j} \mathbb{P} \left(|\epsilon_{j,k}| > c\sqrt{1+j} \right) = 2^j \mathbb{P} \left(|Z| > c\sqrt{1+j} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

où Z est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale centrée et réduite. Par ailleurs, rappelons qu'on a vu en TD que, pour tout réel $\lambda \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|Z| > \lambda) \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\exp(-\lambda^2/2)}{\lambda} \leq \exp(-\lambda^2/2). \quad (11)$$

Il résulte de (10), (11) et de l'inégalité $2^{-1}c^2 > \log 2$, que,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, 2^j\}} |\epsilon_{j,k}| > c\sqrt{1+j} \right) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \exp((\log 2)j - 2^{-1}c^2(j+1)) < \infty.$$

Finalement, en utilisant le Lemme de Borel-Cantelli et le fait que $\epsilon_{0,0}$ est fini presque sûrement, l'on a presque sûrement,

$$\sup_{(j,k) \in \mathcal{D}} \frac{|\epsilon_{j,k}|}{\sqrt{1+j}} = \sup \left\{ |\epsilon_{0,0}|, \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{\max_{k \in \{1, \dots, 2^j\}} |\epsilon_{j,k}|}{\sqrt{1+j}} \right) \right\} < \infty.$$

8) Au moyen de II-6) et II-7), montrer qu'il existe Ω^* un événement de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$, la fonction $t \mapsto \Delta_{0,0}(t)\epsilon_{0,0}(\omega) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t)\epsilon_{j,k}(\omega)$ est bien définie

de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $[0, 1]$.

Réponse : soit C^* la variable aléatoire positive définie par

$$C^* = \sup_{(j,k) \in \mathcal{D}} \frac{|\epsilon_{j,k}|}{\sqrt{1+j}}.$$

D'après II-7) on sait que $\Omega^* = \{\omega \in \Omega : C(\omega) < \infty\}$ est un événement de probabilité 1. Désignons par $\mathcal{C}([0, 1])$, l'espace des fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur $[0, 1]$; rappelons que cet espace de Banach est muni de la norme notée par $\|\cdot\|_\infty$ et définie pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ par $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Fixons $\omega \in \Omega^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous notons par $R_j(\cdot, \omega)$ la fonction de $\mathcal{C}([0, 1])$, telle que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $R_j(t, \omega) = \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}(\omega)$; ainsi pour montrer que la fonction $t \mapsto \Delta_{0,0}(t) \epsilon_{0,0}(\omega) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}(\omega)$ est bien définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $[0, 1]$, il suffit de prouver que la série de fonctions $\sum_{j=0}^{+\infty} R_j(\cdot, \omega)$ est normalement convergente dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1])$, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|R_j(\cdot, \omega)\|_\infty < \infty. \quad (12)$$

En utilisant II-6) et II-7), l'on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\|R_j(\cdot, \omega)\|_\infty \leq C^*(\omega) 2^{-\frac{j}{2}-1} \sqrt{1+j}$ et (12) résulte de cette dernière inégalité.