Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Correction de Examen de Processus Stochastiques
Le 9 janvier 2014 (durée 3 heures)

Tous les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Le sujet de l'examen consiste en un problème dont les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre. Dans tout ce problème, $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$ désigne un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; de plus, on suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue sur $[0,1]$ et vérifie $W_0(\omega) = 0$. Dans tout ce problème, l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0,1]$, est noté par C ; il est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et de $\mathcal{B}_C$ la σ-algèbre borélienne.

Partie I Soient m et M, les variables aléatoires réelles définies par $m = \min_{t\in[0,1]} W_t$ et $M = \max_{t\in[0,1]} W_t$. On note par $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mutuellement indépendantes, identiquement distribuées, et vérifiant

$$P(\xi_l = 1) = P(\xi_l = -1) = 1/2\,, \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}^* \;;$$

de plus on désigne par $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$, la suite des variables aléatoires telles que pour tout $\omega \in \Omega$ on a, $S_0(\omega) = 0$ et quelque soit $i \in \mathbb{N}^*$,

$$S_i(\omega) = \sum_{l=1}^{i} \xi_l(\omega).$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $m_n = \min_{0\le i\le n} S_i$ et $M_n = \max_{0\le i\le n} S_i$.
1) Soit $H : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne), la fonction définie pour tout $x \in C$ par

$$H(x) = \big(\min_{t\in[0,1]} x(t), \max_{t\in[0,1]} x(t), x(1)\big).$$

a) Montrer que H est une fonction lipschitzienne.

Il suffit de montrer que les coordonnées de H sont des fonctions lipschitziennes de C dans $\mathbb{R}$. Remarquons que pour tout $x \in C$, l'on a $\min_{t\in[0,1]} x(t) = -\max_{t\in[0,1]} \big(-x(t)\big)$; ainsi, pour tous $x, y \in C$,

$$\Big|\min_{t\in[0,1]} x(t) - \min_{t\in[0,1]} y(t)\Big| = \Big|\max_{t\in[0,1]} \big(-x(t)\big) - \max_{t\in[0,1]} \big(-y(t)\big)\Big|. \tag{1}$$

Montrons maintenant que pour tous $x, y \in C$,

$$\Big|\max_{t\in[0,1]} x(t) - \max_{t\in[0,1]} y(t)\Big| \le \|x-y\|_\infty \;; \tag{2}$$

étant donné que dans (2), x et y jouent des rôles symétriques, il suffit de prouver que

$$\max_{t\in[0,1]} x(t) - \max_{t\in[0,1]} y(t) \le \|x-y\|_\infty$$

i.e. pour tout $t \in [0,1]$,

$$x(t) \leq \|x-y\|_\infty + y(t). \tag{3}$$

L'inégalité (3) est vérifiée pour tout $t \in [0,1]$, puisque l'on a

$$\|x-y\|_\infty + y(t) \geq x(t) - y(t) + y(t) = x(t).$$

En combinant (2) et (1), on trouve que

$$\Big| \min_{t\in[0,1]} x(t) - \min_{t\in[0,1]} y(t) \Big| \leq \|x-y\|_\infty.$$

Enfin, grâce à la définition de $\|x-y\|_\infty$, on a

$$\big|x(1) - y(1)\big| = \big|(x-y)(1)\big| \leq \|x-y\|_\infty.$$

b) En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, le vecteur aléatoire $n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n)$ converge en loi vers (m, M, W_1).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous désignons par $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$, le processus stochastique dont les trajectoires sont les fonctions continues et affines par morceaux définies, pour tous $\omega \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, par

$$X_n(t,\omega) = \left(\frac{n^{-1}\big([nt]+1\big) - t}{n^{-1}}\right) \frac{S_{[nt]}(\omega)}{\sqrt{n}} + \left(\frac{t - n^{-1}[nt]}{n^{-1}}\right) \frac{S_{[nt]+1}(\omega)}{\sqrt{n}}\,,$$

où $[nt]$ est la partie entière du réel nt ; remarquons que, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$H(X_n(\cdot,\omega)) = n^{-1/2}\big(m_n(\omega), M_n(\omega), S_n(\omega)\big) \quad et \quad H(W_\cdot(\omega)) = \big(m(\omega), M(\omega), W_1(\omega)\big). \tag{4}$$

Grâce à (4) et au Théorème de Portmenteau, nous savons que pour répondre à la question, il suffit de prouver que pour tout ouvert G de $\mathbb{R}^3$, l'on a

$$\liminf_{n\to+\infty} P\big(\{\omega \in \Omega : H(X_n(\cdot,\omega)) \in G\}\big) \geq P\big(\{\omega \in \Omega : H(W_\cdot(\omega)) \in G\}\big). \tag{5}$$

Nous notons par $H^{-1}(G) = \{x \in C : H(x) \in G\}$, l'image réciproque par H de l'ouvert G ; $H^{-1}(G)$ est un ouvert de C à cause de la continuité de H. Nous désignons respectivement par $\mathbb{P}_W$ et $\mathbb{P}_{X_n}$, les mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, induites par les processus $\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$; remarquons que (5) est équivalente à

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{X_n}(H^{-1}(G)) \geq \mathbb{P}_W(H^{-1}(G)). \tag{6}$$

Finalement, il résulte des Théorèmes de Donsker et de Portmenteau, que (6) est vraie.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on pose $p_n(j) = P\big(\{\omega \in \Omega : S_n(\omega) = j\}\big)$; de plus pour tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$, vérifiant

$$a \leq 0 \leq b \quad \text{et} \quad a < b \quad \text{et} \quad a \leq v \leq b, \tag{$*$}$$

on pose

$$p_n(a,b,v) = P\big(\{\omega \in \Omega : \ a < m_n(\omega) \leq M_n(\omega) < b \ \text{ et } \ S_n(\omega) = v\}\big).$$

a) Montrer que les séries $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2k(b-a)\big)$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big)$ sont convergentes.

Etant donné que les variables aléatoires ξ_i sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$, en utilisant la définition de S_n et l'inégalité triangulaire, on peut facilement montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|S_n(\omega)| \leq n$; ainsi pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $p_n(j) = 0$, lorsque $|j| > n$ (notons au passage que $p_n(j) > 0$ dans le cas contraire $|j| \leq n$). Il en résulte que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2k(b-a)\big)$ est une somme sur l'ensemble fini des entiers relatifs k tels que $\big|v + 2k(b-a)\big| \leq n$. De façon analogue, l'on a que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big)$ est une somme sur l'ensemble fini des entiers relatifs k tels que $\big|2b - v + 2k(b-a)\big| \leq n$.

b) On désigne par $\mathcal{E}(n, a, b, v)$ l'égalité :

$$p_n(a,b,v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2k(b-a)\big) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big).$$

(i) Montrer que $\mathcal{E}(n, 0, b, v)$ est vraie pour tous $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathbb{N}$, tels que $v \leq b$.

Remarquons que l'on a $m_n(\omega) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, puisque $S_0(\omega) = 0$; il en résulte que $p_n(0, b, v) = 0$. Ainsi, pour répondre à la question, il suffit de prouver que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(v + 2kb\big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(-v + 2(k+1)b\big). \tag{7}$$

On a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(-v + 2(k+1)b\big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(-v + 2kb\big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_n\big(-v - 2kb\big). \tag{8}$$

Notons que les variables aléatoires S_n et $-S_n$ sont égales en loi [1], ainsi

$$\textit{pour tout } j \in \mathbb{Z},\ p_n(j) = p_n(-j). \tag{9}$$

Finalement, en combinant (8) et (9), on obtient (7).

[1] Lorsque $n = 0$ cette égalité est évidente, et lorsque $n \geq 1$ elle résulte de l'égalité en loi des vecteurs aléatoires $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $-(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

(ii) Montrer que $\mathcal{E}(n, a, 0, v)$ est vraie pour tous $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}_-^*$ et $v \in \mathbb{Z}_-$, tels que $a \leq v$.

Pour répondre à cette question, on utilise une méthode à peu près analogue à celle qui nous a permis de répondre à la question précédente.

(iii) On admet que $\mathcal{E}(0, a, b, v)$ est vraie pour tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant $(*)$; au moyen d'un raisonnement par récurrence sur n, montrer $\mathcal{E}(n, a, b, v)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b, v \in \mathbb{Z}$ vérifiant $(*)$.

On a montré précédemment (voir (i) et (ii)), que $\mathcal{E}(n, a, b, v)$ est vraie lorsque $a = 0$ ou $b = 0$; par la suite nous supposons que $b > 0$ et $a < 0$. Soient les variables aléatoires

$$\tilde{S}_0 = 0 \text{ et } \tilde{S}_i = \sum_{l=2}^{i+1} \xi_l \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^* \ ;$$

nous posons

$$\tilde{m}_n = \min_{0 \leq i \leq n} \tilde{S}_i \text{ et } \tilde{M}_n = \max_{0 \leq i \leq n} \tilde{S}_i \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les vecteurs aléatoires $(\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_n)$ et $(S_0, \ldots, S_n)$ sont égaux en loi, puisque les vecteurs aléatoires $(\xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$ et $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ le sont ; il en résulte que les vecteurs aléatoires $(\tilde{m}_n, \tilde{M}_n, \tilde{S}_n)$ et (m_n, M_n, S_n) sont de même loi. Remarquons aussi que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$m_n = \min\big(0, \xi_1 + \tilde{m}_{n-1}\big) \text{ et } M_n = \max\big(0, \xi_1 + \tilde{M}_{n-1}\big) \ ; \tag{10}$$

en effet

$$m_n = \min\big(0, \min_{1 \leq i \leq n} S_i\big) = \min\Big(0, \min_{1 \leq i \leq n} \big(\xi_1 + \tilde{S}_{i-1}\big)\Big) = \min\big(0, \xi_1 + \tilde{m}_{n-1}\big)$$

et

$$M_n = \max\big(0, \max_{1 \leq i \leq n} S_i\big) = \max\Big(0, \max_{1 \leq i \leq n} \big(\xi_1 + \tilde{S}_{i-1}\big)\Big) = \max\big(0, \xi_1 + \tilde{M}_{n-1}\big).$$

Il résulte de (10) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités $a < m_n \leq M_n < b$ s'écrivent

$$a < \min\big(0, \xi_1 + \tilde{m}_{n-1}\big) \leq \max\big(0, \xi_1 + \tilde{M}_{n-1}\big) < b \ ; \tag{11}$$

de plus, étant donné que $b > 0$ et $a < 0$, (11) revient exactement à dire que

$$a < \xi_1 + \tilde{m}_{n-1} \leq \xi_1 + \tilde{M}_{n-1} < b.$$

Ainsi on a établi que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$a < m_n(\omega) \leq M_n(\omega) < b \Longleftrightarrow a - \xi_1(\omega) < \tilde{m}_{n-1}(\omega) \leq \tilde{M}_{n-1}(\omega) < b - \xi_1(\omega). \tag{12}$$

En utilisant (12), la formule des probabilités totales et l'égalité $S_n(\omega)=\xi_1(\omega)+\tilde S_{n-1}(\omega)$ *pour tout* $\omega\in\Omega$*, on a, compte tenu de l'indépendance de* ξ_1 *et* $(\tilde m_{n-1},\tilde M_{n-1},\tilde S_{n-1})$ *ainsi que de l'égalité en loi de* $(\tilde m_{n-1},\tilde M_{n-1},\tilde S_{n-1})$ *et* $(m_{n-1},M_{n-1},S_{n-1})$*, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$*,*

$$\begin{aligned}
&p_n(a,b,v)=P(a<m_n\le M_n<b,S_n=v)\\
&=P\big(a-\xi_1<\tilde m_{n-1}\le\tilde M_{n-1}<b-\xi_1,\tilde S_{n-1}=v-\xi_1\big)\\
&=P\big(a-1<\tilde m_{n-1}\le\tilde M_{n-1}<b-1,\tilde S_{n-1}=v-1/\xi_1=1\big)P(\xi_1=1)\\
&\qquad\qquad+P\big(a+1<\tilde m_{n-1}\le\tilde M_{n-1}<b+1,\tilde S_{n-1}=v+1/\xi_1=-1\big)P(\xi_1=-1),\\
&=P\big(a-1<\tilde m_{n-1}\le\tilde M_{n-1}<b-1,\tilde S_{n-1}=v-1\big)P(\xi_1=1)\\
&\qquad\qquad+P\big(a+1<\tilde m_{n-1}\le\tilde M_{n-1}<b+1,\tilde S_{n-1}=v+1\big)P(\xi_1=-1)\\
&=P\big(a-1<m_{n-1}\le M_{n-1}<b-1,S_{n-1}=v-1\big)P(\xi_1=1)\\
&\qquad\qquad+P\big(a+1<m_{n-1}\le M_{n-1}<b+1,S_{n-1}=v+1\big)P(\xi_1=-1)\\
&=2^{-1}p_{n-1}(a-1,b-1,v-1)+2^{-1}p_{n-1}(a+1,b+1,v+1).
\end{aligned}\tag{13}$$

En utilisant de nouveau la formule des probabilités totales, on a compte tenu de l'indépendance de ξ_n *et* S_{n-1}*, pour tous* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $j\in\mathbb{Z}$*,*

$$\begin{aligned}
p_n(j)&=P(S_n=j)=P(S_n=j/\xi_n=1)P(\xi_n=1)+P(S_n=j/\xi_n=-1)P(\xi_n=-1)\\
&=P(S_{n-1}=j-1/\xi_n=1)P(\xi_n=1)+P(S_{n-1}=j+1/\xi_n=-1)P(\xi_n=-1)\\
&=P(S_{n-1}=j-1)P(\xi_n=1)+P(S_{n-1}=j+1)P(\xi_n=-1)\\
&=2^{-1}p_{n-1}(j-1)+2^{-1}p_{n-1}(j+1).
\end{aligned}\tag{14}$$

Par ailleurs, l'hypothèse de récurrence nous permet de supposer que les égalités

$$\mathcal{E}(n-1,a-1,b-1,v-1)\ \text{et}\ \mathcal{E}(n-1,a+1,b+1,v+1)$$

sont vérifiées ; l'on a ainsi,

$$p_{n-1}(a-1,b-1,v-1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_{n-1}\big(v-1+2k(b-a)\big)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_{n-1}\big(2b-1-v+2k(b-a)\big)\tag{15}$$

et

$$p_{n-1}(a+1,b+1,v+1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_{n-1}\big(v+1+2k(b-a)\big)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_{n-1}\big(2b+1-v+2k(b-a)\big).\tag{16}$$

Finalement, au moyen des égalités (13), (14), (15) et (16), on obtient

$$\begin{aligned}
&p_n(a,b,v)=2^{-1}p_{n-1}(a-1,b-1,v-1)+2^{-1}p_{n-1}(a+1,b+1,v+1)\\
&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-1}\Big(p_{n-1}\big(v-1+2k(b-a)\big)+p_{n-1}\big(v+1+2k(b-a)\big)\Big)\\
&\qquad-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-1}\Big(p_{n-1}\big(2b-1-v+2k(b-a)\big)+p_{n-1}\big(2b+1-v+2k(b-a)\big)\Big)\\
&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_n\big(v+2k(b-a)\big)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p_n\big(2b-v+2k(b-a)\big).
\end{aligned}$$

3) Soient $a, b, u, r \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$a \le 0 \le b \quad \text{et} \quad a \le u < r \le b,$$

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
&P(a < m_n \le M_n < b, u < S_n < r) \\
&\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(u + 2k(b-a) < S_n < r + 2k(b-a)\big) \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(2b - r + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)\big).
\end{aligned}$$

On a

$$P(a < m_n \le M_n < b, u < S_n < r) = \sum_{v=u+1}^{r-1} p_n(a, b, v), \tag{17}$$

avec la convention que $\sum_{v=u+1}^{r-1} \dots = 0$ *lorsque* $r = u + 1$. *Grâce à (17) et à 2)b), on obtient*

$$\begin{aligned}
&P(a < m_n \le M_n < b, u < S_n < r) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=u+1}^{r-1} p_n\big(v + 2k(b-a)\big) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=u+1}^{r-1} p_n\big(2b - v + 2k(b-a)\big) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(u + 2k(b-a) < S_n < r + 2k(b-a)\big) \\
&\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(2b - r + 2k(b-a) < S_n < 2b - u + 2k(b-a)\big).
\end{aligned}$$

4) Soit l'ensemble $\Theta = \big\{(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \mathbb{R}^4 : \alpha' < \beta' \text{ et } \alpha' \le \gamma' < \delta' \le \beta'\big\}$; nous désignons par $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ un élément fixé de Θ qui vérifie $\alpha \le 0$ et $\beta \ge 0$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons

$$a_n = [\alpha n^{1/2}],\ b_n = -[-\beta n^{1/2}],\ u_n = [\gamma n^{1/2}] \text{ et } r_n = -[-\delta n^{1/2}],$$

où $[\,\cdot\,]$ désigne la fonction partie entière. Montrer que le vecteur $n^{-1/2}(a_n, b_n, u_n, r_n)$ appartient à Θ, et que ce vecteur converge vers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrer que $n^{-1/2}(a_n, b_n, u_n, r_n) \in \Theta$ *revient à montrer que* $(a_n, b_n, u_n, r_n) \in \Theta$. *L'inégalité* $\alpha \le \gamma$, *implique que* $a_n \le u_n$. *De plus on a* $r_n \ge \delta n^{1/2}$ *puisque* $-\delta n^{1/2}\delta \ge [-\delta n^{1/2}] = -r_n$ *; il en découle que* $r_n > \gamma n^{1/2} \ge u_n$. *De même, on peut montrer que* $b_n > a_n$. *L'inégalité* $\delta \le \beta$ *est équivalente à* $-\delta n^{1/2} \ge -\beta n^{1/2}$, *qui implique que* $-r_n = [-\delta n^{1/2}] \ge [-\beta n^{1/2}] = -b_n$, *ce qui équivaut à* $b_n \ge r_n$.

Pour montrer que le vecteur $n^{-1/2}(a_n, b_n, u_n, r_n)$ *converge vers* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$, *il suffit de prouver que l'on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|n^{-1/2}a_n - \alpha| \le n^{-1/2}, \quad |n^{-1/2}b_n - \beta| \le n^{-1/2}, \quad |n^{-1/2}u_n - \gamma| \le n^{-1/2} \quad \textit{et} \quad |n^{-1/2}r_n - \delta| \le n^{-1/2} \;;$$

nous allons nous contenter d'établir la dernière de ces quatre inégalités, les trois autres peuvent être obtenues de façon analogue. Au moyen de l'égalité $r_n = -[-\delta n^{1/2}]$ *et de l'inégalité* $\big| -\delta n^{1/2} - \big[-\delta n^{1/2}\big]\big| < 1$, *on trouve que*

$$|n^{-1/2} r_n - \delta| = n^{-1/2}\big| -\delta n^{1/2} - \big[-\delta n^{1/2}\big]\big| < n^{-1/2}.$$

b) Pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, nous notons par $A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}$ le sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^3$ défini par $A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha' < x \le y < \beta' \text{ et } \gamma' < z < \delta'\big\}$; nous admettons que pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, on a

$$P\big((m, M, W_1) \in \partial A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big) = 0,$$

où $\partial A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}$ désigne la frontière de $A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}$. Montrer que pour tout $(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \in \Theta$, on a

$$P\big((m, M, W_1) \in A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n) \in A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big)$$

et en déduire que

$$P\big(\alpha < m \le M < \beta, \gamma < W_1 < \delta\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(a_n < m_n \le M_n < b_n, u_n < S_n < r_n\big).$$

L'hypothèse $P\big((m, M, W_1) \in \partial A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big) = 0$, *signifie que* $A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}$ *est un ensemble de continuité pour la loi de probabilité du vecteur aléatoire* (m, M, W_1) *; ainsi, au moyen de 1)b), on obtient*

$$P\big((m, M, W_1) \in A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n) \in A^{\gamma',\delta'}_{\alpha',\beta'}\big). \tag{18}$$

Nous posons $D = A^{\gamma,\delta}_{\alpha,\beta}$ *; de plus, pour tout* $l \in \mathbb{N}^*$, *vérifiant* $l \ge l_0 = \big[2(\delta-\gamma)^{-1}\big] + 1$, *nous posons*

$$D_l^- = A^{\gamma+l^{-1},\,\delta-l^{-1}}_{\alpha+l^{-1},\,\beta-l^{-1}} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha + l^{-1} < x \le y < \beta - l^{-1} \textit{ et } \gamma + l^{-1} < z < \delta - l^{-1}\big\}$$

et

$$D_l^+ = A^{\gamma-l^{-1},\,\delta+l^{-1}}_{\alpha-l^{-1},\,\beta+l^{-1}} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha - l^{-1} < x \le y < \beta + l^{-1} \textit{ et } \gamma - l^{-1} < z < \delta + l^{-1}\big\}.$$

Il est clair que

$$D_l^- \subset D_{l+1}^- \subset D \subset D_{l+1}^+ \subset D_l^+, \quad D_{l+1}^+ \setminus D_{l+1}^- \subset D_l^+ \setminus D_l^- \quad \textit{et} \quad \bigcap_{l=l_0}^{+\infty} \big(D_l^+ \setminus D_l^-\big) \subset \partial D \ ; \tag{19}$$

de plus, il existe $n_1 = n_1(l)$, *tel que pour tout* $n \ge n_1$,

$$\begin{aligned} D_l^- &\subset A^{n^{-1/2}u_n,\, n^{-1/2}r_n}_{n^{-1/2}a_n,\, n^{-1/2}b_n} \qquad (20)\\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : n^{-1/2}a_n < x \le y < n^{-1/2}b_n \textit{ et } n^{-1/2}u_n < z < n^{-1/2}r_n\big\} \subset D_l^+, \end{aligned}$$

puisque, d'après 4)a), les suites $(n^{-1/2}a_n)_{n\geq 1}$, $(n^{-1/2}b_n)_{n\geq 1}$, $(n^{-1/2}u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(n^{-1/2}r_n)_{n\geq 1}$ *convergent respectivement vers* α, β, γ *et* δ, *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *Il résulte de (20) que*

$$P\big(n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n) \in D_l^-\big) \leq P(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n) \leq P\big(n^{-1/2}(m_n, M_n, S_n) \in D_l^+\big) \ ;$$

ainsi en utilisant (18), on obtient

$$\begin{aligned} & P\big((m, M, W_1) \in D_l^-\big) \\ & \leq \liminf_{n\to+\infty} P\big(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n\big) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n\big) \\ & \leq P\big((m, M, W_1) \in D_l^+\big). \end{aligned} \tag{21}$$

De plus, (19) et le fait que $P\big((m, M, W_1) \in \partial D\big) = 0$, *impliquent que*

$$P\big((m, M, W_1) \in D\big) = \lim_{l\to+\infty} P\big((m, M, W_1) \in D_l^-\big) = \lim_{l\to+\infty} P\big((m, M, W_1) \in D_l^+\big). \tag{22}$$

Finalement, en combinant (21) et (22), on trouve que

$$P\big(\alpha < m \leq M < \beta, \gamma < W_1 < \delta\big) = \lim_{n\to+\infty} P\big(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n\big).$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$g_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma+2k(\beta-\alpha)}^{\delta+2k(\beta-\alpha)} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{et} \quad h_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\beta-\delta+2k(\beta-\alpha)}^{2\beta-\gamma+2k(\beta-\alpha)} e^{-x^2/2}\, dx \ ;$$

montrer que

$$g_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lim_{n\to+\infty} P\big(u_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < r_n + 2k(b_n - a_n)\big)$$

et que

$$h_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lim_{n\to+\infty} P\big(2b_n - r_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < 2b_n - u_n + 2k(b_n - a_n)\big).$$

Grâce à 4)a) l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) = \gamma + 2k(\beta - \alpha)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big) = \delta + 2k(\beta - \alpha).$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 = n_0(\varepsilon, k)$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$, *on a*

$$\gamma + 2k(\beta - \alpha) - \varepsilon < n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) < \gamma + 2k(\beta - \alpha) + \varepsilon \tag{23}$$

et

$$\delta + 2k(\beta - \alpha) - \varepsilon < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big) < \delta + 2k(\beta - \alpha) + \varepsilon. \tag{24}$$

Il résulte de (23) et (24) que tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
&P\big(\gamma + 2k(\beta-\alpha) + \varepsilon < n^{-1/2}S_n < \delta + 2k(\beta-\alpha) - \varepsilon\big) \\
&\leq P\big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big)\big) \\
&\qquad\qquad \leq P\big(\gamma + 2k(\beta-\alpha) - \varepsilon < n^{-1/2}S_n < \delta + 2k(\beta-\alpha) + \varepsilon\big)\ ;
\end{aligned}$$

ainsi, en appliquant le Théorème de la limite centrale, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma+2k(\beta-\alpha)+\varepsilon}^{\delta+2k(\beta-\alpha)-\varepsilon} e^{-x^2/2}\, dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big)\big) \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big)\big) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma+2k(\beta-\alpha)-\varepsilon}^{\delta+2k(\beta-\alpha)+\varepsilon} e^{-x^2/2}\, dx.
\end{aligned}$$

Puis, en remarquant que

$$\begin{aligned}
&P\big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n - a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n - a_n)\big)\big) \\
&= P\big(u_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < r_n + 2k(b_n - a_n)\big)
\end{aligned}$$

et en faisant tendre ε vers 0, on trouve que

$$g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \lim_{n\to+\infty} P\big(u_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < r_n + 2k(b_n - a_n)\big).$$

De façon analogue, on peut montrer que

$$h_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \lim_{n\to+\infty} P\big(2b_n - r_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < 2b_n - u_n + 2k(b_n - a_n)\big).$$

d) Au moyen de 3), 4)a), 4)b) et 4)c), montrer que

$$P(\alpha < m \leq M < \beta, \gamma < W_1 < \delta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - h_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\big).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 = k_0(\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$0 \leq R^1_{k_0} = \sum_{k\in\mathbb{Z}, |k|\geq k_0} g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{\gamma+2k_0(\beta-\alpha)}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx + \int_{-\infty}^{\delta-2k_0(\beta-\alpha)} e^{-x^2/2}\, dx\Big) \leq \varepsilon/2\ ; \tag{25}$$

notons que pour obtenir l'avant dernière inégalité, on utilise le fait que les intervalles $\big[\gamma + 2k(\beta-\alpha), \delta + 2k(\beta-\alpha)\big]$, $k \in \mathbb{Z}$ *sont disjoints (c'est le cas car* $2(\beta-\alpha) > \beta-\alpha \geq \delta-\gamma > 0$*). D'après 4)a) nous savons que*

$$\gamma + 2k_0(\beta-\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\big(u_n + 2k_0(b_n-a_n)\big)$$

et

$$\delta - 2k_0(\beta-\alpha) = \lim_{n\to+\infty} n^{-1/2}\big(r_n - 2k_0(b_n-a_n)\big) \ ;$$

par conséquent, il existe $n_2 = n_2(\varepsilon, k_0) \in \mathbb{N}^*$*, tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, vérifiant* $n \geq n_2$*, on a*

$$\gamma + 2k_0(\beta-\alpha) - \varepsilon/4 \leq n^{-1/2}\big(u_n + 2k_0(b_n-a_n)\big) \tag{26}$$

et

$$\delta - 2k_0(\beta-\alpha) + \varepsilon/4 \geq n^{-1/2}\big(r_n - 2k_0(b_n-a_n)\big). \tag{27}$$

Etant donné que les intervalles $\big[n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n-a_n), n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n-a_n)\big]$, $k \in \mathbb{Z}$ *sont disjoints, on a pour tout* $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ R^2_{k_0,n} &= \sum_{k\in\mathbb{Z},|k|\geq k_0} P\Big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n-a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n-a_n)\big)\Big) \quad (28)\\ &\leq P\Big(n^{-1/2}S_n > n^{-1/2}\big(u_n + 2k_0(b_n-a_n)\big)\Big) + P\Big(n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n - 2k_0(b_n-a_n)\big)\Big)\\ &\leq P\Big(n^{-1/2}S_n > \gamma + 2k_0(\beta-\alpha) - \varepsilon/4\Big) + P\Big(n^{-1/2}S_n < \delta - 2k_0(\beta-\alpha) + \varepsilon/4\Big), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte (26) et (27). Au moyen de (28), du Théorème de la limite centrale et de la dernière inégalité dans (25), on trouve que

$$\limsup_{n\to+\infty} R^2_{k_0,n} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{\gamma+2k_0(\beta-\alpha)-\varepsilon/4}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{-\infty}^{\delta-2k_0(\beta-\alpha)+\varepsilon/4} e^{-x^2/2}\,dx\Big) \leq \varepsilon. \tag{29}$$

Posons

$$A_n = \Bigg|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - P\Big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n-a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n-a_n)\big)\Big)\Big)\Bigg|$$

et

$$B_{k_0,n} = \Bigg|\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|<k_0}\Big(g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - P\Big(n^{-1/2}\big(u_n + 2k(b_n-a_n)\big) < n^{-1/2}S_n < n^{-1/2}\big(r_n + 2k(b_n-a_n)\big)\Big)\Big)\Bigg|.$$

Notons que 4)c) implique que

$$\lim_{n\to+\infty} B_{k_0,n} = 0. \tag{30}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et (25), on obtient

$$A_n \leq B_{k_0,n} + R^1_{k_0} + R^2_{k_0,n} \leq B_{k_0,n} + \varepsilon/2 + R^2_{k_0,n},$$

ainsi, il résulte de (29) et (30) que

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n \leq 3\varepsilon/2.$$

En faisant tendre ε vers 0, on trouve que $\limsup_{n\to+\infty} A_n = 0$, ce qui montre que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P\big(u_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < r_n + 2k(b_n - a_n)\big). \tag{31}$$

De même on peut établir que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} P\big(2b_n - r_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < 2b_n - u_n + 2k(b_n - a_n)\big). \tag{32}$$

De plus grâce à 3), nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &P(a_n < m_n \leq M_n < b_n, u_n < S_n < r_n) \\ &\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(u_n + 2k(b_n - a_n) < S_n < r_n + 2k(b_n - a_n)\big) \\ &\qquad\qquad - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P\big(2b_n - r + 2k(b_n - a_n) < S_n < 2b_n - u_n + 2k(b_n - a_n)\big). \end{aligned} \tag{33}$$

Finalement, au moyen de 4)b), (31), (32) et (33), on obtient le résultat qu'on cherche à établir.

Partie II Soit $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ le processus stochastique, appelé pont brownien, défini par :

$$Y_t(\omega) = W_t(\omega) - t\, W_1(\omega), \quad \text{pour tout } (t,\omega) \in [0,1]\times\Omega.$$

1) Montrer que $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré dont les trajectoires sont des fonctions continues.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1,\dots,t_k \in [0,1]$, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $Y_{t_1},\dots,Y_{t_k}$, est en fait une combinaison linéaire des variables aléatoires $W_{t_1},\dots,W_{t_k},W_1$; étant donné que $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré, il en résulte que $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$ l'est également. Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $t \longmapsto Y_t(\omega)$ est continue, conme somme des deux fonctions continues $t \longmapsto W_t(\omega)$ et $t \longmapsto -t\, W_t(\omega)$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'événement $A_n = \big\{\omega \in \Omega : 0 < W_1(\omega) < n^{-1}\big\}$, montrer que $P(A_n) > 0$ et que $\big|n(2\pi)^{1/2}P(A_n) - 1\big| < n^{-2}/2$.

On sait que W_1 est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite, ainsi $P(A_n) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{1/n} e^{-x^2/2}\,dx > 0$. Grâce au Théorème de la moyenne, on a l'existence de $c_n \in]0,1/n[$, tel que $n(2\pi)^{1/2}P(A_n) = e^{-c_n^2/2}$. D'autre part, le Théorème des accroissements finis permet de *prouver que pour tout $y \in]0,+\infty[$, on a $1-e^{-y} < y$. Ainsi, en posant $y = c_n^2/2$, on trouve que $\big|n(2\pi)^{1/2}P(A_n) - 1\big| < c_n^2/2 < n^{-2}/2$.*

3) On note par Y la variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(C, \mathcal{B}_C)$ induite par le pont brownien $\{Y_t\}_{t\in[0,1]}$; plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega)$ est la trajectoire $t \longmapsto Y_t(\omega)$. On désigne par $\mathbb{P}_Y$ la loi de la variable aléatoire Y, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathbb{P}_Y(B) = P\big(Y^{-1}(B)\big), \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}_C,$$

où $Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\}$ est l'image réciproque de B par Y. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{Q}_n$, la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathcal{Q}_n(B) = P\big(Y^{-1}(B)/A_n\big) = \frac{P\big(A_n \cap Y^{-1}(B)\big)}{P(A_n)}, \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}_C.$$

a) Nous supposons que $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ sont arbitraires et fixés. Montrer que la variable aléatoire W_1 est indépendante du vecteur aléatoire $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$. On pourra utiliser le fait que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, tout vecteur gaussien centré Z à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et dont les coordonnées sont linéairement indépendantes, admet une densité de probabilité f_Z, telle que pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$f_Z(z) = (2\pi)^{-d/2}\Big(\det\big(\textstyle\sum_Z\big)\Big)^{-1/2} \exp\Big(-2^{-1}z^*\textstyle\sum_Z^{-1} z\Big) \ ;$$

où z est identifié à une matrice colonne dont la transposée est notée z^*, et où $\sum_Z^{-1}$ désigne l'inverse de $\sum_Z$ la matrice de variances-covariances de Z.

Il existe $l \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $l \le k$, et il existe $s_1, \ldots, s_l \in \{t_1, \ldots, t_k\}$, tels que les variables aléatoires $Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l}$ sont linéairement indépendantes et $\mathrm{Vect}\{Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l}\} = \mathrm{Vect}\{Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}\}$. Il suffit en fait de montrer que la variable aléatoire W_1 est indépendante du vecteur aléatoire $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l})$. Il est clair que $(W_1, Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l})$ est un vecteur gaussien centré. De plus, pour tout $m \in \{1, \ldots, l\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(W_1, Y_{s_m}) = \mathrm{cov}(W_1, W_{s_m} - s_m W_1) &= \mathrm{cov}(W_1, W_{s_m}) - s_m \mathrm{var}(W_1) \\ &= \min(1, s_m) - s_m = s_m - s_m = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{W_1,Y}$ la matrice de variances-covariances de $(W_1, Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l})$ vérifie

$$\textstyle\sum_{W_1,Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sum_Y \end{pmatrix},$$

où $\sum_Y$ est la matrice de variances-covariances de $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l})$. Notons que $\det\big(\sum_{W_1,Y}\big) = \det\big(\sum_Y\big) \neq 0$, puisque les variables aléatoires $Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l}$ sont linéairement indépendantes. Ainsi, $f_{W_1,Y}$, la densité de probabilité de $(W_1, Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_l})$, existe et vérifie [2] pour tout $(w, y) \in$

[2] Notons que y est identifié à une matrice colonne, dont la transposée est notée par y^*.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$,

$$
\begin{aligned}
f_{W_1,Y}(w,y) &= (2\pi)^{-(l+1)/2}\big(\det\big(\textstyle\sum_Y\big)\big)^{-1/2}\exp\left(-2^{-1}\begin{pmatrix} w & y^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sum_Y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= (2\pi)^{-(l+1)/2}\big(\det\big(\textstyle\sum_Y\big)\big)^{-1/2}\exp\Big(-2^{-1}w^2 - 2^{-1}y^*\textstyle\sum_Y^{-1}y\Big) \\
&= f_{W_1}(w)f_Y(y), \qquad (34)
\end{aligned}
$$

où f_{W_1} et f_Y sont les densités de probabilité de W_1 et $(Y_{s_1},\dots,Y_{s_l})$. Enfin, l'égalité (34) signifie que la variable aléatoire W_1 est indépendante du vecteur aléatoire $(Y_{s_1},\dots,Y_{s_l})$.

b) Nous supposons que D est un cylindre de C, autrement dit, il existe $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_1,\dots,t_k \in [0,1]$, et il existe V un sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^k$, tels que

$$D = \big\{x \in C : (x(t_1),\dots,x(t_k)) \in V\big\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{Q}_n(D) = \mathbb{P}_Y(D)$; en déduire que $\mathcal{Q}_n(B) = \mathbb{P}_Y(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}_C$.

En utilisant les définitions de $\mathcal{Q}_n$, D et A_n, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_n(D) &= \frac{P\big(A_n \cap Y^{-1}(D)\big)}{P(A_n)} \\
&= \frac{P\big(\{\omega\in\Omega : 0 < W_1(\omega) < n^{-1}\} \cap \{\omega \in \Omega : (Y_{t_1}(\omega),\dots Y_{t_k}(\omega)) \in V\}\big)}{P\big(\{\omega \in \Omega : 0 < W_1(\omega) < n^{-1}\}\big)} \ ;
\end{aligned}
$$

ainsi, l'indépendance de W_1 et $(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})$, implique que

$$\mathcal{Q}_n(D) = P\big(\{\omega \in \Omega : (Y_{t_1}(\omega),\dots Y_{t_k}(\omega)) \in V\}\big) = \mathbb{P}_Y(D).$$

Désignons par $\mathcal{D}$ la classe de tous les cylindres de C, $\mathcal{D}$ est un π-système, de plus $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}_C$ (voir le Chapitre 3 du cours). Nous venons de voir que les mesures de probabilité $\mathcal{Q}_n$ et $\mathbb{P}_Y$ coïncident sur $\mathcal{D}$, ainsi le Lemme 1.22 du Chapitre 1 du cours, nous permet d'affirmer que ces deux mesures de probabilité coïncident également sur $\mathcal{B}_C$.

4) On note par W la variable aléatoire de $(\Omega,\mathcal{F},P)$ dans $(C,\mathcal{B}_C)$ induite par le mouvement brownien $\{W_t\}_{t\in[0,1]}$; plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, $W(\omega)$ est la trajectoire $t \longmapsto W_t(\omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathcal{H}_n$, la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, définie par :

$$\mathcal{H}_n(B) = P\big(W^{-1}(B)/A_n\big) = \frac{P\big(A_n \cap W^{-1}(B)\big)}{P(A_n)}, \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}_C,$$

où $W^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : W(\omega) \in B\}$ est l'image réciproque de B par W. Enfin, pour tout $x \in C$ et $O \subset C$, on pose $\mathrm{dist}(x,O) = \inf\big\{\|x-z\|_\infty : z \in O\big\}$, avec la convention que $\mathrm{dist}(x,O) = +\infty$ lorsque O est l'ensemble vide.

a) Soit F un sous-ensemble fermé arbitraire de C, montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n(F) \leq \mathcal{Q}_n(F_n)$, où F_n est le sous-ensemble de C défini par $F_n = \big\{x \in C : \mathrm{dist}(x, F) \leq n^{-1}\big\}$.

Compte tenu des définitions de $\mathcal{H}_n$ et de $\mathcal{Q}_n$, pour établir l'inégalité $\mathcal{H}_n(F) \leq \mathcal{Q}_n(F_n)$, il suffit de prouver que $A_n \cap W^{-1}(F) \subset A_n \cap Y^{-1}(F_n)$, ce qui revient à montrer que $A_n \cap W^{-1}(F) \subset Y^{-1}(F_n)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\|Y(\omega) - W(\omega)\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |Y_t(\omega) - W_t(\omega)| = |W_1(\omega)| \sup_{t\in[0,1]} t = |W_1(\omega)|, \tag{35}$$

pour tout $\omega \in W^{-1}(F)$ (i.e. $W(\omega) \in F$), on a

$$\mathrm{dist}\big(Y(\omega), F\big) = \inf\big\{\|Y(\omega) - z\|_\infty : z \in F\big\} \leq \|Y(\omega) - W(\omega)\|_\infty, \tag{36}$$

et pour tout $\omega \in A_n = \big\{\omega \in \Omega : 0 < W_1(\omega) < n^{-1}\big\}$, on a

$$|W_1(\omega)| = W_1(\omega) < n^{-1}. \tag{37}$$

Ainsi, en combinant (35), (36) et (37), on trouve que pour tout $\omega \in A_n \cap W^{-1}(F)$, on a $\mathrm{dist}\big(Y(\omega), F\big) < n^{-1}$ *; cela implique que $\omega \in Y^{-1}(F_n)$.*

b) Au moyen de 4)a) et 3)b), montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathbb{P}_Y$.

Il résulte de 4)a) et 3)b) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathcal{H}_n(F) \leq \mathbb{P}_Y(F_n),$$

et par conséquent

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n(F) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}_Y(F_n) = \mathbb{P}_Y\Big(\bigcap_{n\in N^*} F_n\Big) = \mathbb{P}_Y(F) \ ;$$

ainsi, grâce au Théorème de Portmanteau, l'on a que $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathbb{P}_Y$, lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Soient ν et μ, les variables aléatoires réelles définies par $\nu = \min_{t\in[0,1]} Y_t$ et $\mu = \max_{t\in[0,1]} Y_t$. Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha \leq 0 < \beta$. Nous notons par $\Lambda_{\alpha,\beta}$ le sous-ensemble borélien de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Lambda_{\alpha,\beta} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x \leq y < \beta\big\}$; nous admettons que

$$P\big((\nu, \mu) \in \partial\Lambda_{\alpha,\beta}\big) = 0,$$

où $\partial\Lambda_{\alpha,\beta}$ désigne la frontière de $\Lambda_{\alpha,\beta}$.

a) Soit $\Phi : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne), la fonction définie pour tout $x \in C$ par

$$\Phi(x) = \big(\min_{t\in[0,1]} x(t), \max_{t\in[0,1]} x(t)\big).$$

Montrer que Φ est lipschitzienne et en déduire que l'on a

$$\mathbb{P}_Y\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big),$$

où $\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})$ est l'image réciproque de $\Lambda_{\alpha,\beta}$ par Φ.

La preuve de la lipschitianité de Φ a été implicitement donnée dans la réponse à 1)a) de la Partie I.

D'après 4)b), on sait que $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathbb{P}_Y$ lorsque n tend vers $+\infty$; ainsi, pour prouver que

$$\mathbb{P}_Y\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{H}_n\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big),$$

il suffit de montrer que $\Upsilon_{\alpha,\beta} = \Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})$ est un ensemble de $\mathbb{P}_Y$-continuité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}_Y(\partial\Upsilon_{\alpha,\beta}) = 0$. On a évidemment, $\Phi^{-1}\big(\mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big) \subset \Upsilon_{\alpha,\beta} \subset \Phi^{-1}\big(\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big)$, où $\mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}$ et $\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta}$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de $\Lambda_{\alpha,\beta}$. Il en résulte que

$$\Phi^{-1}\big(\mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big) \subset \mathring{\Upsilon}_{\alpha,\beta} \subset \Upsilon_{\alpha,\beta} \subset \overline{\Upsilon}_{\alpha,\beta} \subset \Phi^{-1}\big(\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big),$$

puisque $\Phi^{-1}\big(\mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big)$ est un ouvert et $\Phi^{-1}\big(\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big)$ est un fermé. Ainsi

$$\partial\Upsilon_{\alpha,\beta} = \overline{\Upsilon}_{\alpha,\beta} \setminus \mathring{\Upsilon}_{\alpha,\beta} \subset \Phi^{-1}\big(\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big) \setminus \Phi^{-1}\big(\mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big) = \Phi^{-1}\big(\overline{\Lambda}_{\alpha,\beta} \setminus \mathring{\Lambda}_{\alpha,\beta}\big) = \Phi^{-1}(\partial\Lambda_{\alpha,\beta}),$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}_Y(\partial\Upsilon_{\alpha,\beta}) \le \mathbb{P}_Y\big(\Phi^{-1}(\partial\Lambda_{\alpha,\beta})\big) = P\big(Y^{-1}(\Phi^{-1}(\partial\Lambda_{\alpha,\beta}))\big) = P\big((\nu,\mu) \in \partial\Lambda_{\alpha,\beta}\big) = 0.$$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \ge \beta^{-1}$, et pour tout $x \in [0, 1/n]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\exp\Big(-2^{-1}\big(x+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right| \\
&\le 2\,n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha)\bigg(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\bigg).
\end{aligned}$$

Il est clair que l'inégalité qu'on souhaite établir est vraie lorsque $x = 0$; désormais nous supposons que $x \in]0, 1/n]$. En appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction

$$y \longmapsto \exp\Big(-2^{-1}\big(y+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big),$$

on a l'existence de $c \in]0, x[\subset [0, 1/n] \subset [0, \beta] \subset \big[0, 2(\beta-\alpha)\big]$ tel que

$$\begin{aligned}
&\left|\exp\Big(-2^{-1}\big(x+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right| \\
&= x\big|c+2k(\beta-\alpha)\big|\exp\Big(-2^{-1}\big(c+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) \\
&\le 2\,n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha)\exp\Big(-2^{-1}\big(c+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big).
\end{aligned} \tag{38}$$

De plus, lorsque $k \ge 0$, on a

$$\exp\Big(-2^{-1}\big(c+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) \le \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big), \tag{39}$$

et, lorsque $k < 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-2^{-1}\big(c+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(c-2(\beta-\alpha)+2(k+1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\\
&= \exp\Big(-2^{-1}\big(2(\beta-\alpha)-c-2(k+1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\\
&= \exp\Big(-2^{-1}\big(2(\beta-\alpha)-c+2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\\
&\le \exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big), \qquad (40)
\end{aligned}$$

puisque $2(\beta-\alpha)-c+2(|k|-1)(\beta-\alpha) \ge 2(|k|-1)(\beta-\alpha) \ge 0$. Finalement, en combinant (38), (39) et (40), on obtient l'inégalité qu'on souhaite établir.

c) Au moyen de 5)b), montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} n(2\pi)^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}),$$

et en déduire que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{P(A_n)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1})\ ;$$

rappelons que (voir 4)c) de la Partie I),

$$g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{2k(\beta-\alpha)}^{n^{-1}+2k(\beta-\alpha)} \exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx.$$

Il est clair que toutes les séries qu'on considère dans cette question sont convergentes. En utilisant la définition de $g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1})$ puis 5)b), on a pour tout entier n vérifiant $n \ge \beta^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(n(2\pi)^{1/2} g_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right)\right|\\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(n\int_{2k(\beta-\alpha)}^{1/n+2k(\beta-\alpha)} \exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right)\right|\\
&\le n\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{1/n} \left|\exp\Big(-2^{-1}\big(x+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right| dx\\
&\le 2(\beta-\alpha)n^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(|k|+1\big)\left(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right),
\end{aligned}$$

cela prouve bien la première égalité qu'on cherche à établir, puisque

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(|k|+1\big)\left(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right) < +\infty.$$

Il résute de 2), que lorsque n tend vers $+\infty$, $1/P(A_n)$ est équivalent à $n(2\pi)^{1/2}$, ainsi grâce à l'égalité qu'on vient de prouver, on obtient la seconde égalité que l'on cherche à montrer.

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq \beta^{-1}$, et pour tout $x \in [0, 1/n]$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big| \exp\Big(-2^{-1}\big(x - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big| \\
&\leq 2\, n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha)\bigg(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) + \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\bigg).
\end{aligned}$$

Il est clair que l'inégalité qu'on souhaite établir est vraie lorsque $x = 0$; désormais nous supposons que $x \in]0, 1/n]$. En appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction

$$y \longmapsto \exp\Big(-2^{-1}\big(y - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big),$$

on a l'existence de $c \in]0, x[\subset [0, 1/n] \subset [0, \beta] \subset \big[0, 2(\beta-\alpha)\big]$ tel que

$$\begin{aligned}
&\Big| \exp\Big(-2^{-1}\big(x - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big| \\
&= x\big|c - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big| \exp\Big(-2^{-1}\big(c - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) \\
&\leq 2\, n^{-1}\big(|k|+1\big)(\beta-\alpha) \exp\Big(-2^{-1}\big(c - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big). \qquad (41)
\end{aligned}$$

De plus, lorsque $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-2^{-1}\big(c - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta - c + 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) \\
&\leq \exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big), \qquad (42)
\end{aligned}$$

puisque $2\beta - c \geq 0$; lorsque $k < 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-2^{-1}\big(c - 2\beta - 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(2(\beta-\alpha) + c - 2\beta - 2(k+1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) \\
&\leq \exp\Big(-2^{-1}\big(-2(k+1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big), \qquad (43)
\end{aligned}$$

puisque $2(\beta-\alpha) + c - 2\beta - 2(k+1)(\beta-\alpha) \geq -2(k+1)(\beta-\alpha) \geq 0$. Finalement, en combinant (41), (42) et (43), on obtient l'inégalité qu'on souhaite établir.

e) Au moyen de 5)d), montrer que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta + 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} n(2\pi)^{1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\alpha, \beta, 0, n^{-1}),$$

et en déduire que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta + 2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{P(A_n)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k(\alpha, \beta, 0, n^{-1}) \ ;$$

Rappelons que (voir 4)c) de la Partie I)

$$h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{2\beta-n^{-1}+2k(\beta-\alpha)}^{2\beta+2k(\beta-\alpha)} \exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx.$$

Il est clair que toutes les séries qu'on considère dans cette question sont convergentes. En utilisant la définition de $h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1})$ puis 5)d), on a pour tout entier n vérifiant $n\geq\beta^{-1}$,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(n(2\pi)^{1/2}h_k(\alpha,\beta,0,n^{-1}) - \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(n\int_{2\beta-1/n+2k(\beta-\alpha)}^{2\beta+2k(\beta-\alpha)}\exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx - \exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(n\int_{-2\beta-2k(\beta-\alpha)}^{-2\beta-2k(\beta-\alpha)+1/n}\exp\big(-2^{-1}x^2\big)\,dx - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big)\right|\\
&=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(n\int_0^{1/n}\exp\Big(-2^{-1}\big(x-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\,dx - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big)\right|\\
&\leq n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{1/n}\left|\exp\Big(-2^{-1}\big(x-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big) - \exp\Big(-2^{-1}\big(-2\beta-2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\right|dx\\
&\leq 2(\beta-\alpha)n^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(|k|+1\big)\Big(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big)+\exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big),
\end{aligned}$$

cela prouve bien la première égalité qu'on cherche à établir, puisque

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(|k|+1\big)\Big(\exp\Big(-2^{-1}\big(2(|k|-1)(\beta-\alpha)\big)^2\Big)+\exp\Big(-2^{-1}\big(2|k|(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big)<+\infty.$$

Il résute de 2), que lorsque n tend vers $+\infty$, $1/P(A_n)$ est équivalent à $n(2\pi)^{1/2}$, ainsi grâce à l'égalité qu'on vient de prouver, on obtient la seconde égalité que l'on cherche à montrer.

f) Au moyen de 5)a), de 4)d) de la Partie I, de 5)c) et de 5e), montrer que

$$P\big(\alpha<\nu\leq\mu<\beta\big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\exp\Big(-2^{-1}\big(2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)-\exp\Big(-2^{-1}\big(2\beta+2k(\beta-\alpha)\big)^2\Big)\Big).$$

D'après 5)a), nous savons que

$$\mathbb{P}_Y\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big)=\lim_{n\to+\infty}\mathcal{H}_n\big(\Phi^{-1}(\Lambda_{\alpha,\beta})\big).$$

Ainsi, en uilisant les définitions de $\Lambda_{\alpha,\beta}$, $\mathbb{P}_Y$, Φ, $\mathcal{H}_n$ et A_n, on obtient

$$P\big(\alpha<\nu\leq\mu<\beta\big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{P\big(\alpha<m\leq M<\beta,0<W_1<1/n\big)}{P(A_n)}. \tag{44}$$

Par ailleurs, grâce à 4)d) de la Partie I, nous savons pour tout entier n, vérifiant $n \geq 1/\beta$, l'on a

$$P\big(\alpha < m \leq M < \beta, 0 < W_1 < 1/n\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(g_k(\alpha,\beta,0,1/n) - h_k(\alpha,\beta,0,1/n)\big). \tag{45}$$

L'égalité qu'on cherche à prouver résulte de façon immédiate de (44), (45), 5)c) et 5)e).