Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Correction de l'Examen de Processus Stochastiques du 11 janvier 2013

Problème 1

Soit $(\mathcal{E}_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire que sa densité de probabilité vaut $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{0\leq x\}}$ pour presque tout réel x), définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous notons par T_n la v.a.r. définie par $T_n = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, $N(t)$ désigne la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, définie par

$$N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}$ est la variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que : pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 1$ lorsque $T_n(\omega) \leq t$ et $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 0$ sinon.
1) Montrer que $N(0) = 0$ presque sûrement.

Il résulte de la définition de $N(0)$ que $\{N(0) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\{T_n > 0\}$. Soit $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\{\mathcal{E}_k > 0\}$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$, car $\mathbb{P}(\mathcal{E}_k > 0) = 1$, pour tout $k \geq 1$. Grâce à ce qui précède et à l'inclusion, $\{T_n > 0\} \cap A \subset \{T_{n+1} > 0\} \cap A$ pour tout $n \geq 1$, on trouve que $\mathbb{P}(N(0) = 0) = \mathbb{P}\big(\{N(0) = 0\} \cap A\big) = \mathbb{P}(T_1 > 0) = 1$.

2) Montrer qu'il existe un événement de probabilité 1, que l'on note par Ω^*, tel que l'on a pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N(t, \omega) < +\infty$ (<u>indication :</u> on commencera d'abord par prouver que presque sûrement, $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}T_n = \lambda^{-1}$).

Etant donné que T_n s'écrit comme la somme de n v.a.r. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ, grâce à la loi des grands nombres, nous savons qu'il existe un événement de probabilité 1, que l'on note par Ω^*, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$, l'on a $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}T_n(\omega) = \lambda^{-1}$; cela implique que $\lim_{n\to+\infty} T_n(\omega) = +\infty$ et donc que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $\big\{n \in \mathbb{N}^* : T_n(\omega) \leq t\big\}$ est fini (ou même vide), ce qui revient à dire que $N(t, \omega) < +\infty$.

3) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, f_m la densité de probabilité du vecteur aléatoire $(T_1, \ldots, T_m)$ existe et qu'elle est donnée, pour presque tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, par,

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = \lambda^m e^{-\lambda x_m}\mathbf{1}_{\{0\leq x_1\leq \ldots\leq x_m\}}.$$

Soit g une fonction borélienne définie sur $\mathbb{R}^m$ et à valeurs positives. Désignons par h_m la densité de probabilité du vecteur aléatoire $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m)$; l'on a pour presque tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$h_m(x_1, \ldots, x_m) = \lambda^m e^{-\lambda(x_1+\ldots+x_m)}\mathbf{1}_{\{\min(x_1,\ldots,x_m)\geq 0\}}. \tag{1}$$

En utilisant les définitions de $T_1, T_2, \ldots, T_m$, puis le changement de variable $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1 + x_2$, ..., $y_m = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, et enfin (1), on obtient,

$$\mathbb{E}\big(g(T_1, T_2, \ldots, T_m)\big) = \mathbb{E}\big(g(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_m)\big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} g(x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_m)\, h_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} g(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, h_m(y_1, y_2-y_1, \ldots, y_m-y_{m-1})\, dy_1 dy_2 \ldots, dy_m$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} g(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, \lambda^m e^{-\lambda y_m} \mathbf{1}_{\{0\le y_1\le y_2\le \ldots \le y_m\}}\, dy_1 dy_2 \ldots, dy_m \ ;$$

cela prouve ce que l'on cherchait à établir.

4) a) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la densité de probabilité du vecteur aléatoire (T_m, T_{m+1}).

Lorsque $m = 1$, la densité de ce vecteur est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $(x_1, x_2) \mapsto \lambda^2 e^{-\lambda x_2} \mathbf{1}_{\{0\le x_1 \le x_2\}}$. Lorsque $m \geq 2$, la densité de ce vecteur est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}(x_m, x_{m+1}) \longmapsto \quad & \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_{m+1}(x_1, \ldots x_{m-1}, x_m, x_{m+1})\, dx_1 \ldots dx_{m-1}. \\ & = \lambda^{m+1} e^{-\lambda x_{m+1}} \mathbf{1}_{\{x_m \le x_{m+1}\}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \mathbf{1}_{\{0\le x_1\le \ldots \le x_{m-1}\le x_m\}}\, dx_1 \ldots dx_{m-1} \\ & = \lambda^{m+1} e^{-\lambda x_{m+1}} \frac{x_m^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{1}_{\{x_m \le x_{m+1}\}} .\end{aligned}$$

b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ; rappelons que l'on dit qu'une variable aléatoire X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X = m) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^m}{m!} .$$

On a

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = P(\mathcal{E}_1 > t) = \lambda \int_t^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda t},$$

$$\mathbb{P}(N(t) = 1) = \mathbb{P}(T_1 \le t, T_2 > t) = \lambda^2 \Big(\int_0^t dx_1 \Big) \Big(\int_t^{+\infty} e^{-\lambda x_2}\, dx_2 \Big) = e^{-\lambda t} (\lambda t),$$

et pour tout entier $m \geq 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N(t) = m) = \mathbb{P}(T_m \le t, T_{m+1} > t) \ &= \ \lambda^{m+1} \Big(\int_0^t \frac{x_m^{m-1}}{(m-1)!}\, dx_m \Big) \Big(\int_t^{+\infty} e^{-\lambda x_{m+1}}\, dx_{m+1} \Big) \\ &= \ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}.\end{aligned}$$

5) Supposons que $(\lambda_l)_{l\geq 1}$ est une suite croissante de réels strictement positifs.
a) Construiser une suite $(X_l)_{l\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, vérifiant pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les deux propriétés suivantes : (i) X_l suit une loi de Poisson de paramètre λ_l ; (ii) pour tout $\omega \in \Omega$, $X_l(\omega) \leq X_{l+1}(\omega)$.

On peut supposer que les v.a.r. ξ_k suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$; il suffit alors de prendre $X_l = N(\lambda_l)$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\lim_{l \to +\infty} \lambda_l = +\infty$ si et seulement si $\lim_{l \to +\infty} X_l = +\infty$ presque sûrement.

Grâce à la propriété (ii), nous savons que pour tout $\omega \in \Omega$, $\lim_{l \to +\infty} X_l(\omega)$ existe et vaut $\sup_{l \in \mathbb{N}^*} X_l(\omega)$. Ainsi, on a $\mathbb{P}\big(\sup_{l \in \mathbb{N}^*} X_l = +\infty\big) = 1$ si et seulement si pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{l \to +\infty} \mathbb{P}(X_l \leq q) = 0$, ce qui revient à dire que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a,

$$\lim_{l \to +\infty} e^{-\lambda_l} \sum_{m=0}^{q} \frac{\lambda_l^m}{m!} = 0. \tag{2}$$

Il est clair que (2) n'est vérifiée que si $\lim_{l \to +\infty} \lambda_l = +\infty$.

Problème 2

Dans tout ce problème, $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; de plus $(\lambda_l)_{l \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de réels appartenant à l'intervalle $]1, 2]$, qui converge vers 1. Pour tout $(l, N) \in \mathbb{N}^2$, nous notons par $\{X_{l,N}(t)\}_{t \in [0,1]}$ le processus stochastique défini pour tout $t \in [0, 1]$, par,

$$X_{l,N}(t) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=-N}^{N} \epsilon_n \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t).$$

1) Montrer que $\{X_{l,N}(t)\}_{t \in [0,1]}$ est un processus gaussien centré (centré signifie que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\mathbb{E}(X_{l,N}(t)) = 0$).

Il suffit de remarquer que tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1, \ldots, t_m \in [0, 1]$, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $X_{l,N}(t_1), \ldots, X_{l,N}(t_m)$, s'écrit comme une combinaison linéaire des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et réduites $\epsilon_{-N}, \ldots, \epsilon_N$.

2) Prouver que pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, lorsque N tend vers $+\infty$, la suite de variables aléatoires $(X_{l,N}(t))_{N \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire que l'on note par $X_l(t)$.

Il suffit de montrer que $(X_{l,N}(t))_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. En utilisant, les propriétés des ϵ_n et le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leq min(1, |x|)$, on obtient que pour tous $N, Q \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\Big[\big(X_{l,N+Q}(t) - X_{l,N}(t)\big)^2\Big] = (\lambda_l - 1) \sum_{n=N+1}^{N+Q} \lambda_l^{-n} \sin^2(\lambda_l^n t) + (\lambda_l - 1) \sum_{n=-N-Q}^{-N-1} \lambda_l^{-n} \sin^2(\lambda_l^n t)$$

$$\leq (\lambda_l - 1) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_l^{-n} + (\lambda_l - 1) \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \lambda_l^{n} = 2\lambda_l^{-N},$$

ce qui prouve bien que $(X_{l,N}(t))_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

3) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ fixé, $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré et que l'on a pour tout $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$,

$$\operatorname{cov}\big(X_l(t_1), X_l(t_2)\big) = (\lambda_l - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_l^{-n} \sin(\lambda_l^n t_1) \sin(\lambda_l^n t_2).$$

Supposons que $m \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ sont arbitraires et fixés. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $Y_{l,N} = \sum_{k=1}^m \alpha_k X_{l,N}(t_k)$. D'après 1), nous savons que $Y_{l,N}$ est une variable aléatoire gaussienne, son écart-type est noté par $\sigma(Y_{l,N})$. De plus, d'après 2), nous savons que lorsque N tend vers $+\infty$, la variable aléatoire $Y_{l,N}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers la variable aléatoire $Y_l = \sum_{k=1}^m \alpha_k X_l(t_k)$ dont l'écart-type est noté par $\sigma(Y_l)$. Il en résulte que $\sigma(Y_l) = \lim_{N\to+\infty} \sigma(Y_{l,N})$, et que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\Phi_{Y_l}(u) = \lim_{N\to+\infty} \Phi_{Y_{l,N}}(u)$, où Φ_{Y_l} et $\Phi_{Y_{l,N}}$ désignent les fonctions caractéristiques de Y_l et de $Y_{l,N}$ (la convergence dans $L^2(\Omega)$ entraîne la convergence en loi). Ainsi en utilisant pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'égalité $\Phi_{Y_{l,N}}(u) = e^{-(\sigma(Y_{l,N})u)^2/2}$, on trouve que $\Phi_{Y_l}(u) = e^{-(\sigma(Y_l)u)^2/2}$, ce qui montre que Y_l est une variable aléatoire gaussienne centrée. Montrons maintenant que,

$$cov\big(X_l(t_1), X_l(t_2)\big) = (\lambda_l - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_l^{-n} \sin(\lambda_l^n t_1) \sin(\lambda_l^n t_2). \tag{3}$$

En utilisant le fait que $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ est centré, la continuité du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et les propriétés des ϵ_n, on trouve que

$$cov\big(X_l(t_1), X_l(t_2)\big) = \mathbb{E}\big(X_l(t_1), X_l(t_2)\big) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\big(X_{l,N}(t_1), X_{l,N}(t_2)\big)$$
$$\lim_{N\to+\infty} (\lambda_l - 1) \sum_{n=-N}^{N} \lambda_l^{-n} \sin(\lambda_l^n t_1) \sin(\lambda_l^n t_2) = (\lambda_l - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_l^{-n} \sin(\lambda_l^n t_1) \sin(\lambda_l^n t_2).$$

4) a) Prouver que pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$, on a

$$\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1) - X_l(t_2)\big)^2\big] \leq 10|t_1 - t_2|.$$

(<u>Indication :</u> on peut supposer que $0 < |t_1 - t_2|$, on vous suggère alors de découper la série qui donne $\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1) - X_l(t_2)\big)^2\big]$, en deux parties : $\sum_{n=-\infty}^{n_0} \cdots$ et $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \cdots$, où n_0 est l'unique entier naturel tel que $\lambda_l^{-n_0-1} < |t_1 - t_2| \leq \lambda_l^{-n_0}$).

Il est clair que l'inégalité qu'on cherche à établir est vraie lorsque $t_1 = t_2$; désormais nous supposons que $0 < |t_1 - t_2|$. Par ailleurs, l'on a $|t_1 - t_2| \leq 1$ puisque $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$. Désignons par n_0 l'unique entier naturel (qui dépend bien entendu de l) tel que,

$$\lambda_l^{-n_0-1} < |t_1 - t_2| \leq \lambda_l^{-n_0}. \tag{4}$$

Il résulte de la continuité de la norme de $L^2(\Omega)$ et des propriétés des ϵ_n, que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1)-X_l(t_2)\big)^2\big] &= \lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}\big[\big(X_l^N(t_1)-X_l^N(t_2)\big)^2\big] \\ &= (\lambda_l-1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_l^{-n}\big|\sin(\lambda_l^n t_1)-\sin(\lambda_l^n t_2)\big|^2. \qquad (5)\end{aligned}$$

L'inégalité $|\sin(x)|\leq 1$ pour tout réel x, les inégalités $1<\lambda_l\leq 2$, et (4), impliquent que,

$$\begin{aligned}&(\lambda_l-1)\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\lambda_l^{-n}\big|\sin(\lambda^n t_1)-\sin(\lambda^n t_2)\big|^2 \leq 4(\lambda_l-1)\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\lambda_l^{-n} \\ &= 4\lambda_l^{-n_0}\leq 8\lambda_l^{-n_0-1}<8|t_1-t_2|. \qquad (6)\end{aligned}$$

Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis permet de montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a, $\big|\sin(x)-sin(y)\big|\leq|x-y|$. Cette dernière inégalité, les inégalités $1<\lambda_l\leq 2$, et (4), entraînent que

$$\begin{aligned}&(\lambda_l-1)\sum_{n=-\infty}^{n_0}\lambda_l^{-n}\big|\sin(\lambda^n t_1)-\sin(\lambda^n t_2)\big|^2\leq|t_1-t_2|^2(\lambda_l-1)\sum_{n=-\infty}^{n_0}\lambda_l^{n} \\ &= |t_1-t_2|^2(\lambda_l-1)\frac{\lambda_l^{n_0}}{1-\lambda_l^{-1}}\leq\lambda_l|t_1-t_2|\leq 2|t_1-t_2|. \qquad (7)\end{aligned}$$

Enfin, en combinant (5), (6) et (7), on obtient l'inégalité que l'on cherchait à établir.

b) En déduire que, pour tout $l\in\mathbb{N}$, le processus $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ admet une modification (i.e. une version) $\{\widetilde{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre γ, où $\gamma\in]0,1/2[$ est arbitraire.

Supposons que α est un réel strictement positif vérifiant $\gamma<1/2-1/\alpha$. Ainsi, pour prouver l'existence d'une modification du processus $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre γ, grâce au Théorème de Kolmogorov-Čentsov, il suffit de montrer qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}_+^*$, telle que l'on a pour tout $(t_1,t_2)\in[0,1]^2$,

$$\mathbb{E}\big[\big|X_l(t_1)-X_l(t_2)\big|^\alpha\big]\leq c|t_1-t_2|^{\alpha/2}. \qquad (8)$$

Supposons que G est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée et réduite. Etant donné que les variables aléatoires $X_l(t_1)-X_l(t_2)$ et $V=\Big(\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1)-X_l(t_2)\big)^2\big]\Big)^{1/2}\times G$ sont de même loi, on a

$$\mathbb{E}\big[\big|X_l(t_1)-X_l(t_2)\big|^\alpha\big]=\mathbb{E}\big[|V|^\alpha\big]=\Big(\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1)-X_l(t_2)\big)^2\big]\Big)^{\alpha/2}\mathbb{E}\big[|G|^\alpha\big].$$

Ainsi, en posant $c=10^{\alpha/2}\,\mathbb{E}\big[|G|^\alpha\big]$, et en utilisant 4)a), on trouve que (8) est vérifiée.

5) a) Soit G une variable aléatoire réelle gaussienne centrée et réduite, montrer que

$$\mathbb{E}\big(\exp(G^2/4)\big)<+\infty.$$

On a

$$\mathbb{E}\big(\exp(G^2/4)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2/4} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4}\, dx < +\infty.$$

b) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\exp(\epsilon_n^2/4) > 2+n\big) < +\infty.$$

On a,

$$\begin{aligned} +\infty > \mathbb{E}\big(\exp(G^2/4)\big) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\big(\exp(G^2/4) \geq y\big)\, dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}\big(\exp(G^2/4) \geq y\big)\, dy \\ &\geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \mathbb{P}\big(\exp(G^2/4) > n+2\big)\, dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\exp(G^2/4) > n+2\big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\exp(\epsilon_n^2/4) > 2+n\big). \end{aligned}$$

c) En utilisant 5)b), montrer qu'il existe un événement de probabilité 1, noté par Ω^*, tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\epsilon_n(\omega)|}{\sqrt{\log(2+|n|)}} < +\infty, \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega^*,$$

où log désigne le logarithme népérien.

En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli, on peut établir l'existence d'un événement Ω_1^* de probabilité 1 vérifiant la propriété suivante : pour tout $\omega \in \Omega_1^*$, il existe $n_1(\omega) \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq n_1(\omega)$, on a $\exp(\epsilon_n^2(\omega)/4)) \leq 2+n$. Cette inégalité est équivalente à $|\epsilon_n(\omega)| \leq 2\sqrt{\log(2+n)}$, ainsi on obtient que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\epsilon_n(\omega)|}{\sqrt{\log(2+n)}} < +\infty, \quad \textit{pour tout } \omega \in \Omega_1^*.$$

De même, on peut établir l'existence d'un événement Ω_2^* de probabilité 1, tel que,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_-} \frac{|\epsilon_n(\omega)|}{\sqrt{\log(2+|n|)}} < +\infty, \quad \textit{pour tout } \omega \in \Omega_2^*.$$

Finalement en prenant $\Omega^* = \Omega_1^* \cap \Omega_2^*$, on trouve que,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\epsilon_n(\omega)|}{\sqrt{\log(2+|n|)}} < +\infty, \quad \textit{pour tout } \omega \in \Omega^*.$$

6) Pour tout $(l, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, désignons par $\{Y_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{Z_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ les processus stochastiques définis pour tout $(t, \omega) \in [0,1] \times \Omega$, par

$$Y_{l,N}(t,\omega) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=-N}^{-1} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t), \quad \text{lorsque } \omega \in \Omega^*,$$

$$Z_{l,N}(t,\omega) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t), \quad \text{lorsque } \omega \in \Omega^*,$$

et $Y_{l,N}(t,\omega) = Z_{l,N}(t,\omega) = 0$, lorsque $\omega \notin \Omega^*$. Fixons $\omega \in \Omega$ et désignons par $Y_{l,N}(\cdot,\omega)$ et $Z_{l,N}(\cdot,\omega)$ les fonctions continues sur $[0,1]$, $t \mapsto Y_{l,N}(t,\omega)$ et $t \mapsto Z_{l,N}(t,\omega)$.
a) Montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, la fonction $Z_{l,N}(\cdot,\omega)$ converge uniformément vers une fonction continue sur $[0,1]$, que l'on note par $Z_l(\cdot,\omega)$.

Le cas où $\omega \notin \Omega^*$, ne présente pas de difficulté, l'on a que $Z_{l,N}(\cdot,\omega) = Z_l(\cdot,\omega) = 0$. Désormais nous supposons que $\omega \in \Omega^*$. Nous désignons par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$; rappelons qu'elle est définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour répondre à la question, il suffit de prouver que la série de fonctions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n \cdot),$$

est normalement convergente, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$. C'est le cas, car d'après 5)c) nous savons que $\big\|\epsilon_n(\omega)\lambda_l^{-n/2}\sin(\lambda_l^n\cdot)\big\|_\infty = \mathcal{O}\big(\lambda_l^{-n/2}\sqrt{\log(2+n)}\big)$.

b) Montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, la fonction $Y_{l,N}(\cdot,\omega)$ converge uniformément vers une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$, que l'on note par $Y_l(\cdot,\omega)$.

Le cas où $\omega \notin \Omega^*$, ne présente pas de difficulté, l'on a que $Y_{l,N}(\cdot,\omega) = Y_l(\cdot,\omega) = 0$. Désormais nous supposons que $\omega \in \Omega^*$. Pour répondre à la question, il suffit de prouver que la série de fonctions,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n \cdot), \tag{9}$$

est normalement convergente, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et qu'il est en de même de la série obtenu en dérivant à un ordre arbitraire $m \in \mathbb{N}^*$, le terme général $\epsilon_n(\omega)\lambda_l^{-n/2}\sin(\lambda_l^n\cdot)$. Supposons que $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0,1\}$ sont arbitraires, lorsque m est de la forme $m = 4q - 2r$, cette dernière série s'écrit sous la forme :

$$(-1)^r \sum_{n=-\infty}^{-1} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{(m-1/2)n} \sin(\lambda_l^n \cdot)\,, \tag{10}$$

et lorsque m est de la forme $m = 4q - 2r - 1$, elle s'écrit sous la forme :

$$(-1)^{r+1} \sum_{n=-\infty}^{-1} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{(m-1/2)n} \cos(\lambda_l^n \cdot)\,. \tag{11}$$

D'après 5)c), on a

$$\|\epsilon_n(\omega)\lambda_l^{-n/2}\sin(\lambda_l^n\cdot)\|_\infty = \mathcal{O}\big(\lambda_l^{n/2}\sqrt{\log(2+|n|)}\big)\ ,$$

$$\|(-1)^r \epsilon_n(\omega)\lambda_l^{(m-1/2)n}\sin(\lambda_l^n\cdot)\|_\infty = \mathcal{O}\big(\lambda_l^{(m+1/2)n}\sqrt{\log(2+|n|)}\big) ,$$

et

$$\|(-1)^{r+1} \epsilon_n(\omega)\lambda_l^{(m-1/2)n}\cos(\lambda_l^n\cdot)\|_\infty = \mathcal{O}\big(\lambda_l^{(m-1/2)n}\sqrt{\log(2+|n|)}\big) ;$$

il en résulte que les séries (9), (10) et (11), sont normalement convergentes.

c) Désignons par $\{\check{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ le processus stochastique défini pour tout $(t,\omega) \in [0,1]\times\Omega$, par $\check{X}_l(t,\omega) = Y_l(t,\omega) + Z_l(t,\omega)$. Prouver que les processus $\{\widetilde{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{\check{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ sont indistinguables.

Remarquons d'abord que l'on a pour tous $(l,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,1]$, $X_{l,N}(t) = Y_{l,N}(t) + Z_{l,N}(t)$, ainsi, d'après 6)a) et 6)b), l'on a,

$$\check{X}_l(t,\omega) = \lim_{N\to+\infty} X_{l,N}(t,\omega), \quad \textit{pour tout } \omega\in\Omega^*. \tag{12}$$

Par ailleurs, d'après 2) nous savons que

$$\lim_{N\to+\infty} \|X_{l,N}(t) - X_l(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{13}$$

Il résulte de (12) et (13), que $\{\check{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ est une modification du processus $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$. D'autre part, d'après 4)b), nous savons que $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ est une modification du processus $\{\widetilde{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$. Ainsi pour tout $t\in[0,1]$, il existe $\overline{\Omega}_t$ un événement de probabilité 1 (qui dépend a priori de t), tel que

$$\check{X}_l(t,\omega) = X(t,\omega) = \widetilde{X}_l(t,\omega), \quad \textit{pour tout } \omega\in\overline{\Omega}_t. \tag{14}$$

Par ailleurs, grâce à 4)b), 6)a) et 6b), nous savons qu'il existe $\widetilde{\Omega}$, un événement de probabilité 1, tel que pour tout $\omega\in\widetilde{\Omega}$, $\check{X}_l(\cdot,\omega)$ et $\widetilde{X}_l(\cdot,\omega)$ sont des fonctions continues sur $[0,1]$. Désignons enfin par $\widehat{\Omega}$, l'événement de probabilité 1, défini par

$$\widehat{\Omega} = \widetilde{\Omega} \cap \Big(\bigcap_{t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \overline{\Omega}_t\Big) .$$

Ainsi, il résulte de (14), que pour tout $\omega\in\widehat{\Omega}$ et $t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$, on a $\check{X}_l(t,\omega) = \widetilde{X}_l(t,\omega)$; de plus cette égalité reste vraie lorsque t est irrationnel, à cause de la continuité de $\check{X}_l(\cdot,\omega)$ et $\widetilde{X}_l(\cdot,\omega)$.

7) On suppose que $t\in[0,1]$ est arbitraire et fixé. On note par h_t la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ définie par $h_t(0) = t$ et $h_t(\xi) = \xi^{-1}\sin(\xi t)$ pour tout $\xi > 0$. Pour tout $l\in\mathbb{N}$, on note par $K^-_{t,l}$, la fonction définie pour tout $\xi\in\mathbb{R}_+$, par

$$K^-_{t,l}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} h_t(\lambda_l^n)\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi) .$$

a) Montrer que h_t et $K^-_{t,l}$ appartiennent à l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}_+)$.

$h_t \in L^2(\mathbb{R}_+)$ puisque l'on a $|h_t(\xi)|^2 \le \min(1, |\xi|^{-2})$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$. Cette même inégalité, permet aussi de montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, l'on a $|K_{t,l}^-(\xi)|^2 \le \mathbf{1}_{]0,1[}(\xi)$, ce qui implique que $K_{t,l}^- \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

b) Prouver que $\lim_{l\to+\infty} \left\| h_t \mathbf{1}_{]0,1[} - K_{t,l}^- \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$.

Posons $c_0 = \sup_{\xi\in[0,1]} |h_t'(\xi)|$, cette constante est finie puisque h_t', la dérivée de h_t, est continue sur l'intervalle compact $[0,1]$. Grâce au Théorème des accroissements finis, on peut montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, tout entier $n \le -1$ et tout réel $\xi \in [\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[$, on a

$$\left| h_t(\xi) - h_t(\lambda^n) \right| \le c_0(\xi - \lambda_l^n) \le c_0(\lambda_l^{n+1} - \lambda_l^n) = c_0 \lambda_l^n (\lambda_l - 1)\,.$$

Il en résulte que,

$$\begin{aligned} &\left\| h_t \mathbf{1}_{]0,1[} - K_{t,l}^- \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\lambda_l^n}^{\lambda_l^{n+1}} \left| h_t(\xi) - h_t(\lambda^n) \right|^2 d\xi \\ &\le c_0^2 (\lambda_l - 1)^3 \sum_{n=-\infty}^{-1} \lambda_l^{3n} = c_0^2 \frac{(\lambda_l - 1)^3}{\lambda_l^3 - 1} = c_0^2 \frac{(\lambda_l - 1)^2}{\lambda_l^2 + \lambda_l + 1}\ ; \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $\lim_{l\to+\infty} \left\| h_t \mathbf{1}_{]0,1[} - K_{t,l}^- \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$.

8) Pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on note par $K_{t,l}^+$, la fonction définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, par

$$K_{t,l}^+(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_t(\lambda_l^n) \mathbf{1}_{[\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[}(\xi)\,.$$

a) Montrer que $K_{t,l}^+$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$.

En utilisant les définitions de $K_{t,l}^+$ et h_t, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left| K_{t,l}^+(\xi) \right|^2 d\xi \le \int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_l^{-n} \mathbf{1}_{[\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[}(\xi) \Big)^2 d\xi \\ &= \lambda_l^2 \int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_l^{-n-1} \mathbf{1}_{[\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[}(\xi) \Big)^2 d\xi \le \lambda_l^2 \int_1^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \xi^{-1} \mathbf{1}_{[\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[}(\xi) \Big)^2 d\xi \\ &= \lambda_l^2 \int_1^{+\infty} \xi^{-2}\, d\xi < +\infty\,. \end{aligned}$$

b) Prouver que pour tout $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$, on a

$$\int_1^{+\infty} h_{t_1}(\xi) h_{t_2}(\xi)\, d\xi = \lim_{l\to+\infty} \int_1^{+\infty} K_{t_1,l}^+(\xi) K_{t_2,l}^+(\xi)\, d\xi\,.$$

Nous allons utiliser le Théorème de convergence dominée. Montrons d'abord que pour tout $\xi \in [1,+\infty[$, *on a*

$$h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi) = \lim_{l\to+\infty} K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\ . \tag{15}$$

Il suffit de prouver que pour tout $(t,\xi) \in [0,1]\times[1,+\infty[$, *on a,*

$$\lim_{l\to+\infty} \big|h_t(\xi) - K^+_{t,l}(\xi)\big| = 0. \tag{16}$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, *nous notons par* $n_0(l)$, *l'unique entier naturel tel que* $\xi \in \big[\lambda_l^{n_0(l)}, \lambda_l^{n_0(l)+1}\big[$. *La suite* $\big(\lambda_l^{n_0(l)}\big)_{l\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ξ *lorsque* $l \to +\infty$, *puisque* λ_l *tend vers* 1 *et que l'on a par ailleurs* $1 \le \xi/\lambda_l^{n_0(l)} < \lambda_l$, *pour tout* $l \in \mathbb{N}$. *En utilisant, les définitions de* $h_t(\xi)$ *et* $K^+_{t,l}(\xi)$, *ainsi que le Théorème des accroissements finis, on obtient,*

$$\big|h_{t_1}(\xi) - K^+_{t,l}(\xi)\big| \le \Big(\sup\Big\{|h'_t(\eta)| : \eta \in \big[\lambda_l^{n_0(l)}, \lambda_l^{n_0(l)+1}\big]\Big\}\Big)\big(\xi - \lambda_l^{n_0(l)}\big). \tag{17}$$

De plus, on a pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, $h'_t(\eta) = t\eta^{-1}\cos(\eta t) - \eta^{-2}\sin(\eta t)$, *ce qui montre que* $\sup_{\eta\in[1,+\infty[} |h'_t(\eta)| \le 2$. *Ainsi, grâce à (17) et à* $\lim_{l\to+\infty} \lambda_l^{n_0(l)} = \xi$, *on obtient (16).*

Par ailleurs, en utilisant les définitions de $K^+_{t,l}$ *et* h_t, *ainsi que l'inégalité* $\lambda_l \le 2$, *on a pour tout* $\xi \in [1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\big|K^+_{t,l}(\xi)\big| &\le \sum_{n=0}^{+\infty} |h_t(\lambda_l^n)|\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_l^{-n}\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi) = \lambda_l \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_l^{-n-1}\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi)\\ &\le 2\sum_{n=0}^{+\infty} \xi^{-1}\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi) = 2\xi^{-1}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(\xi)\,;\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\big|K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\big| \le 4\xi^{-2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(\xi)\,. \tag{18}$$

Finalement, grâce à (15) et à (18), nous pouvons appliquer le Théorème de convergence dominée qui permet d'obtenir que,

$$\int_1^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi = \lim_{l\to+\infty}\int_1^{+\infty} K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\,d\xi\,.$$

9) a) Etablir l'existence d'un processus gaussien centré, noté par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, telle que l'on a

$$\mathrm{cov}\big(X(t_1), X(t_2)\big) = \int_0^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi\,, \quad \text{pour tout } (t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

La réponse à cette question se trouve dans le cours.

b) Montrer que ce processus est en fait un mouvement brownien (<u>indication :</u> on pourra calculer pour tout $(t,\xi) \in [0,1]\times\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-t}^{t} e^{-i\xi x}\,dx$).

Remarquons d'abord que pour tout $(t,\xi) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, on a $\widehat{\mathbf{1}}_{[-t,t]}(\xi) = \int_{-t}^{t} e^{-i\xi x}\,dx$, où $\widehat{\mathbf{1}}_{[-t,t]}$ désigne la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-t,t]}$, la fonction indicatrice de l'intervalle $[-t,t]$. Un calcul simple permet de montrer que $\widehat{\mathbf{1}}_{[-t,t]}(\xi) = 2h_t(|\xi|)$. On en déduit que, pour tout $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbf{1}}_{[-t_1,t_1]}(\xi)\overline{\widehat{\mathbf{1}}_{[-t_2,t_2]}(\xi)}\,d\xi = 4\int_{-\infty}^{+\infty} h_{t_1}(|\xi|)h_{t_2}(|\xi|)\,d\xi = 8\int_{0}^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Par ailleurs, grâce à la formule de Parseval-Plancherel, on sait que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathbf{1}}_{[-t_1,t_1]}(\xi)\overline{\widehat{\mathbf{1}}_{[-t_2,t_2]}(\xi)}\,d\xi = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-t_1,t_1]}(x)\mathbf{1}_{[-t_2,t_2]}(x)\,dx = 4\pi\min(t_1,t_2)\,. \tag{20}$$

Finalement, au moyen de 9)a), (19) et (20), on obtient que

$$cov\big(X(t_1),X(t_2)\big) = \int_{0}^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi = 2^{-1}\pi\min(t_1,t_2),$$

ce qui prouve bien que le processus gaussien centré $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien.

c) Montrer que lorsque l tend vers $+\infty$, le processus $\{X_l(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ converge vers le processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, au sens des lois fini-dimensionnelles.

Etant donné que ces deux processus sont gaussiens centrés, il suffit de prouver que l'on a pour tout $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$,

$$cov\big(X(t_1),X(t_2)\big) = \lim_{l\to+\infty} cov\big(X_l(t_1),X_l(t_2)\big)\,. \tag{21}$$

Montrons d'abord que pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$, l'on a,

$$cov\big(X_l(t_1),X_l(t_2)\big) = \int_0^1 K^-_{t_1,l}(\xi)K^-_{t_2,l}(\xi)\,d\xi + \int_1^{+\infty} K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\,d\xi\,. \tag{22}$$

En utilisant les égalités $K^-_{t,l}(\xi) = h_t(\lambda_l^n) = \lambda_l^{-n}\sin(\lambda_l^n t)$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, tout entier $n \le -1$, et tout $(t,\xi) \in [0,1] \times [\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[$, l'on obtient,

$$\begin{aligned}\int_0^1 K^-_{t_1,l}(\xi)K^-_{t_2,l}(\xi)\,d\xi &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\int_{\lambda_l^n}^{\lambda_l^{n+1}} K^-_{t_1,l}(\xi)K^-_{t_2,l}(\xi)\,d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda_l^{-2n}\sin(\lambda_l^n t_1)\sin(\lambda_l^n t_2)\int_{\lambda_l^n}^{\lambda_l^{n+1}} 1\,d\xi \\ &= (\lambda_l - 1)\sum_{n=-\infty}^{-1}\lambda_l^{-n}\sin(\lambda_l^n t_1)\sin(\lambda_l^n t_2)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

En utilisant les égalités $K^+_{t,l}(\xi) = h_t(\lambda_l^n) = \lambda_l^{-n}\sin(\lambda_l^n t)$, pour tout $(l,n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(t,\xi) \in [0,1] \times [\lambda_l^n, \lambda_l^{n+1}[$, l'on obtient,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\,d\xi &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\lambda_l^n}^{\lambda_l^{n+1}} K^+_{t_1,l}(\xi)K^+_{t_2,l}(\xi)\,d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_l^{-2n}\sin(\lambda_l^n t_1)\sin(\lambda_l^n t_2)\int_{\lambda_l^n}^{\lambda_l^{n+1}} 1\,d\xi \\ &= (\lambda_l - 1)\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_l^{-n}\sin(\lambda_l^n t_1)\sin(\lambda_l^n t_2)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Ainsi, en combinant 3), avec (23) et (24), on aboutit à (22). Enfin, en utilisant 7)b), la continuité du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}_+)$*, 8)b) et (22), on obtient (21).*