Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Correction du problème donné dans l'examen de Processus Stochastiques
du 4 janvier 2012

Dans tout ce problème, on désigne par $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; dans toute la suite, on suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto B(t,\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $B(0,\omega) = 0$.

L'objectif du problème est de montrer que pour tous $T \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a,

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} B(t) > \lambda\right) = P\big(|B(T)| > \lambda\big). \qquad (*)$$

Partie I : Préliminaires

1) Prouver que lorsque $T = 0$, alors $(*)$ est vraie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Réponse : *dans ce cas, l'intervalle $[0,T]$ se réduit à $\{0\}$ et $(*)$ résulte de façon immédiate de $B(0) = 0$.*

2) On suppose que $T \in \mathbb{R}_+^*$ est arbitraire et fixé.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$, nous posons

$$Y_T(\omega) = \sup_{t\in[0,T]} B(t,\omega)\,;$$

montrer que ce supremum est fini, puis que

$$Y_T(\omega) = \sup_{s\in[0,1]} B(Ts,\omega).$$

Réponse : *étant donné que $t \longmapsto B(t,\omega)$ est une fonction continue sur le compact $[0,T]$, on a que $Y_T(\omega) < +\infty$; de plus l'application $s \longmapsto Ts$ est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,T]$ et par conséquent $Y_T(\omega) = \sup_{s\in[0,1]} B(Ts,\omega)$.*

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient

$$Y_{T,n} = \sup_{k\in\{1,\ldots,2^n\}} B(T2^{-n}k) \quad \text{et} \quad Z_{T,n} = T^{1/2}Y_{1,n}.$$

Montrer que $Y_{T,n}$ et $Z_{T,n}$ sont deux variables aléatoires (c'est-à-dire des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la σ-algèbre des ensembles boréliens de $\mathbb{R}$) puis qu'elles possèdent la même loi.

Réponse : *$Y_{T,n}$ est définie comme le supremum d'un nombre fini de variables aléatoires (les $B(T2^{-n}k)$, où $k \in \{1,\ldots,2^n\}$), donc $Y_{T,n}$ est une variable aléatoire. $Z_{T,n}$ est définie comme le produit de la variable aléatoire $Y_{1,n}$ par le réel $T^{1/2}$, donc $Z_{T,n}$ est une variable aléatoire. Grâce à la propriété d'auto-similarité du mouvement brownien, on sait que les vecteurs aléatoires $\big(B(T2^{-n}k)\big)_{k\in\{1,\ldots,2^n\}}$ et $\big(T^{1/2}B(2^{-n}k)\big)_{k\in\{1,\ldots,2^n\}}$ sont identiquement distribués ; ainsi, il résulte* *de la continuité de la fonction $\mathbb{R}^{2^n} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_k)_{k\in\{1,\dots,2^n\}} \longmapsto \sup_{k\in\{1,\dots,2^n\}} x_k$, que les variables aléatoires $Y_{T,n} = \sup_{k\in\{1,\dots,2^n\}} B(T2^{-n}k)$ et $Z_{T,n} = T^{1/2}Y_{1,n}$ sont de même loi.*

c) Nous désignons par Y_T la fonction de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, $\omega \longmapsto Y_T(\omega)$. En utilisant, les résultats obtenus dans les deux questions précédentes, montrer que Y_T et $Z_T = T^{1/2}Y_1$ sont deux variables aléatoires, puis qu'elles possèdent la même loi.

Réponse : *soit $\omega \in \Omega$, en utilisant la continuité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \longmapsto B(t,\omega)$ et le fait que les nombres dyadiques de $[0,1]$ sont denses dans cet intervalle, on a $Y_T(\omega) = \lim_{n\to+\infty} Y_{T,n}(\omega)$ et $Z_T(\omega) = \lim_{n\to+\infty} Z_{T,n}(\omega)$. Ainsi, Y_T (reps. Z_T) est une variable aléatoire parce qu'elle s'exprime, ω par ω, comme la limite de la suite des variables aléatoires $(Y_{T,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(Z_{T,n})_{n\in\mathbb{N}}$). De plus, l'égalité en loi des variables aléatoires Y_T et Z_T résulte de l'égalité en loi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires $Y_{T,n}$ et $Z_{T,n}$.*

3) On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} B(t) > \alpha\right) = P\big(|B(1)| > \alpha\big). \qquad (**)$$

Au moyen de $(**)$ et du résultat obtenu dans la question précédente, montrer que $(*)$ est vraie pour tous $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Réponse : *en posant, dans $(**)$, $\alpha = T^{-1/2}\lambda$, on trouve ,*

$$P(Z_T > \lambda) = P\big(T^{1/2}|B(1)| > \lambda\big).$$

Ensuite, grâce à cette dernière égalité, au résultat obtenu dans la question précédente, et à la propriété d'auto-similarité du mouvement brownien, on peut alors montrer que $(*)$ est vraie.

Partie II : Preuve de l'égalité $(**)$

Dans toute cette partie :

- Nous désignons par $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépendantes, identiquement distribuées et vérifiant

$$P(\xi_l = 1) = P(\xi_l = -1) = 1/2\,, \quad \text{pour tout } l \in \mathbb{N}^*.$$

- Nous notons par $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la suite de variables aléatoires telles que pour tout $\omega \in \Omega$ on a, $S_0(\omega) = 0$ et quelque soit $m \in \mathbb{N}^*$,

$$S_m(\omega) = \sum_{l=1}^{m} \xi_l(\omega).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous désignons par $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$, le processus stochastique dont les trajectoires sont les fonctions continues et affines par morceaux définies, pour tous $\omega \in \Omega$ et $t \in [0,1]$, par

$$X_n(t,\omega) = \left(\frac{n^{-1}\big([nt]+1\big)-t}{n^{-1}}\right)\frac{S_{[nt]}(\omega)}{\sqrt{n}} + \left(\frac{t-n^{-1}[nt]}{n^{-1}}\right)\frac{S_{[nt]+1}(\omega)}{\sqrt{n}},$$

  où $[nt]$ est la partie entière du réel nt.

Par ailleurs, rappelons que, si $(S,\mathcal{B}_S)$ est un espace métrique muni de $\mathcal{B}_S$ la σ-algèbre des ensembles boréliens de S, et si $R : (\Omega,\mathcal{F},P) \longrightarrow (S,\mathcal{B}_S)$ désigne une variable aléatoire ; *la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_S$ induite par R (ou encore la loi de R)*, notée par $\mathbb{P}_R$, est définie pour tout $D \in \mathcal{B}_S$, par,

$$\mathbb{P}_R(D) = P\big(\{\omega \in \Omega : R(\omega) \in D\}\big).$$

4) a) Soit C l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0,1]$; rappelons qu'il est muni de la distance $d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|$. On désigne respectivement par $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{X_n}$, les mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_C$, induites par les processus $\{B(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$; rappelons qu'on a vu en cours, qu'on peut considérer ces processus comme des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et à valeurs dans $(C,\mathcal{B}_C)$. En utilisant un théorème du cours, montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathbb{P}_{X_n}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}_B$.

Réponse : *il suffit de remarquer que chacune des variables aléatoires ξ_l est centrée et de variance égale à 1, puis d'utiliser le Théorème de Donsker.*

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit M_n la variable aléatoire définie sur Ω par,

$$M_n = \sup_{m\in\{0,\dots,n\}} S_m.$$

Nous notons par $H : \big(C,\|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R},|\cdot|\big)$, la fonction définie pour tout $f \in C$ par

$$H(f) = \sup_{t\in[0,1]} f(t)$$

et nous admettons que H est continue. Enfin, nous désignons respectivement par $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ et $\mathbb{P}_{Y_1}$, les mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ induites par les variables aléatoires $n^{-1/2}M_n$ et Y_1. En utilisant, la continuité de H, le résultat obtenu dans la question précédente, et le Théorème de Portmanteau, montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}_{Y_1}$.

Réponse : *Remarquons d'abord, qu'en utilisant la définition du processus $\{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$,*

$$H\big(X_n(\cdot,\omega)\big) = n^{-1/2}M_n(\omega). \tag{1}$$

Remarquons aussi, qu'en utilisant la définition de Y_1, pour tout $\omega \in \Omega$, on a,

$$H\big(B(\cdot,\omega)\big) = Y_1(\omega). \tag{2}$$

D'après le Théorème de Portmanteau, pour montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}_{Y_1}$, il suffit de prouver que pour tout ouvert G de $\mathbb{R}$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}(G) \geq \mathbb{P}_{Y_1}(G). \tag{3}$$

Grâce à la définition de $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}(G)$ et grâce à (1), on obtient,

$$\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}(G) = P\big(\{\omega \in \Omega : n^{-1/2}M_n(\omega) \in G\}\big) = P\big(\{\omega \in \Omega : X_n(\cdot,\omega) \in H^{-1}(G)\}\big) = \mathbb{P}_{X_n}\big(H^{-1}(G)\big). \tag{4}$$

De plus étant donné que $H^{-1}(G)$ est un ouvert de C (cela résulte de la continuité de H), en utilisant (4), en utilisant la question précédente, et en utilisant le Théorème de Portmanteau, on trouve que,

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}(G) = \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{X_n}\big(H^{-1}(G)\big) \geq \mathbb{P}_B\big(H^{-1}(G)\big)\ . \tag{5}$$

Notons alors que grâce à la définition de $\mathbb{P}_B\big(H^{-1}(G)\big)$, grâce à (2) et grâce à la définition de $\mathbb{P}_{Y_1}(G)$, on a,

$$\mathbb{P}_B\big(H^{-1}(G)\big) = P\big(\{\omega \in \Omega : B(\cdot,\omega) \in H^{-1}(G)\}\big) = P\big(\{\omega \in \Omega : Y_1(\omega) \in G\}\big) = \mathbb{P}_{Y_1}(G). \tag{6}$$

Finalement, en combinant (5) avec (6), on aboutit à (3).

5) Posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et désignons par $\mathcal{P}_{\overline{\mathbb{N}}}$ la σ-algèbre formée par tous les sous-ensembles de $\overline{\mathbb{N}}$. Supposons que $q \in \mathbb{N}$ est arbitraire et fixé ; soit $\tau_q : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow \big(\overline{\mathbb{N}}, \mathcal{P}_{\overline{\mathbb{N}}}\big)$, la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$, par,

$$\tau_q(\omega) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : S_m(\omega) = q\big\}\ ,$$

avec la convention que $\tau_q(\omega) = +\infty$ lorsque $\big\{m \in \mathbb{N} : S_m(\omega) = q\big\}$ est l'ensemble vide.

a) Montrer que τ_q est une variable aléatoire.

Réponse : *pour tout $\omega \in \Omega$, on a $S_0(\omega) = 0$ et donc $\tau_0(\omega) = 0$, ce qui prouve que τ_0 est une variable aléatoire. Désormais, nous supposons que $q \geq 1$. Remarquons alors que : $\{\tau_q = 0\} = \emptyset$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\{\tau_q = m\} = \Big(\bigcap_{i=0}^{m-1} \{S_i < q\}\Big) \cap \{S_m = q\}, \tag{7}$$

et $\{\tau_q = +\infty\} = \bigcap_{i=0}^{+\infty}\{S_i < q\}$. Ainsi, pour tout $m \in \overline{\mathbb{N}}$, on a $\{\tau_q = m\} \in \mathcal{F}$, puisque tous les S_j, $j \in \mathbb{N}$, sont des variables aléatoires.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\}\right).$$

Réponse : *Il est clair que cette égalité est satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $q = 0$. Il est également clair que cette égalité est vraie lorsque $n = 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire. Désormais nous supposons que $n \geq 2$ et $q \geq 1$. En utilisant les définitions de M_n et M_{n-1}, on trouve que,*

$$\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\} = \big\{ \sup(M_{n-1}, S_n) \geq q \big\} \cap \{S_n < q\} = \{M_{n-1} \geq q\} \cap \{S_n < q\}. \tag{8}$$

Montrons que

$$\{M_{n-1} \geq q\} = \{\tau_q \leq n-1\} = \bigcup_{m=1}^{n-1} \{\tau_q = m\}. \tag{9}$$

En utilisant le fait que τ_q est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on obtient la deuxième égalité dans (9). Prouvons que la première égalité dans (9) est vérifiée. Soit $\omega \in \{\tau_q \leq n-1\}$, il résulte de la définition de τ_q qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $S_m(\omega) = q$; on a par conséquent $\omega \in \{M_{n-1} \geq q\}$. Soit $\omega \in \{M_{n-1} \geq q\}$, il résulte de la définition de M_{n-1}, qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $S_m(\omega) \geq q$; posons alors

$$m_0 = \min \big\{ m \in \{1, \ldots, n-1\} : S_m(\omega) \geq q \big\} \tag{10}$$

et montrons par l'absurde que,

$$S_{m_0}(\omega) = q.$$

Supposons donc que $S_{m_0}(\omega) \geq q+1$, on a alors, en utilisant le fait que $\xi_{m_0}(\omega) \in \{-1, 1\}$, $S_{m_0-1}(\omega) = S_{m_0}(\omega) - \xi_{m_0}(\omega) \geq q$, ce qui contredit (10).

Il résulte (8) et (9) que

$$\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\} = \bigcup_{m=1}^{n-1} \left(\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\} \right),$$

de plus les événements $\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\}$, $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ sont deux à deux incompatibles. On a donc,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=1}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\}\right). \tag{11}$$

c) En utilisant le résultat obtenu dans la question précédente, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \Big\{ \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0 \Big\} \right).$$

Réponse : *Il est clair que cette égalité est satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $q = 0$. Il est également clair que cette égalité est vraie lorsque $n = 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire. Désormais* *nous supposons que $n \geq 2$ et $q \geq 1$. Il résulte de (7) et de l'égalité $S_n = S_m + \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l$, que pour tout $m \in \{1, \ldots, n-1\}$,*

$$\{\tau_q = m\} \cap \{S_n < q\} = \{\tau_q = m\} \cap \left\{ \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0 \right\}; \tag{12}$$

ainsi, en utilisant le fait que $\{\tau_q = 0\} = \emptyset$ et le résultat obtenu dans la question précédente, on obtient l'égalité qu'on cherche à établir.

d) En utilisant le résultat obtenu dans la question précédente, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\tau_q = m\right) P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0 \right).$$

<u>Réponse :</u> *Il est clair que cette égalité est satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $q = 0$. Il est également clair que cette égalité est vraie lorsque $n = 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire. Désormais nous supposons que $n \geq 2$ et $q \geq 1$. Lorque $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'égalité (7) et la définition des variables aléatoires S_i, impliquent que l'événement $\{\tau_q = m\}$ ne dépend que des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_m$, cet événement est donc indépendant de l'événement $\left\{ \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0 \right\}$; ainsi l'égalité qu'on cherche à établir est une conséquence du résultat obtenu dans la question précédente, de (12) et de $\{\tau_q = 0\} = \emptyset$.*

6) a) Montrer que pour tous $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big) = \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\tau_q = m\right) P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l > 0 \right).$$

<u>Réponse :</u> *Il est clair que cette égalité est satisfaite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque $q = 0$. Il est également clair que cette égalité est vraie lorsque $n = 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire. Désormais nous supposons que $n \geq 2$ et $q \geq 1$. En utilisant $\{\tau_q = 0\} = \emptyset$, le fait que*

$$\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\} = \{M_{n-1} \geq q\} \cap \{S_n > q\},$$

l'égalité (9) et le fait que les événements $\{\tau_q = m\}$, $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ sont deux à deux incompatibles, on obtient,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big) = \sum_{m=1}^{n-1} P\left(\{\tau_q = m\} \cap \{S_n > q\}\right). \tag{13}$$

De plus, il résulte de (7) et de l'égalité $S_n = S_m + \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l$, que pour tout $m \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\{\tau_q = m\} \cap \{S_n > q\} = \{\tau_q = m\} \cap \left\{ \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l > 0 \right\}; \tag{14}$$

Remarquons aussi que (7) et la définition des variables aléatoires S_i, impliquent que l'événement $\{\tau_q = m\}$ ne dépend que des variables aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_m$, cet événement est donc indépendant de l'événement $\Big\{ \sum_{l=m+1}^{n} \xi_l > 0 \Big\}$; ainsi l'égalité qu'on cherche à établir résulte de (13), de (14) et de $\{\tau_q = 0\} = \emptyset$.

b) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 5)d) et 6)a), prouver que tous $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big) = P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big).$$

Réponse : *il suffit en fait de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \{0, \ldots, n-1\}$,*

$$P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l > 0\right) = P\left(\sum_{l=m+1}^{n} \xi_l < 0\right).$$

Cette égalité résulte de l'égalité en loi des vecteurs aléatoires $(\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$ et $(-\xi_{m+1}, \ldots, -\xi_n)$.

7) En utilisant le résultat obtenu dans la question 6)b), montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(M_n \geq q) = 2P(S_n > q) + P(S_n = q).$$

Réponse : *les événements $\{S_n > q\}$, $\{S_n = q\}$ et $\{S_n < q\}$ forment une partition de l'espace de probabilité Ω, on a donc,*

$$P(M_n \geq q) = P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big) + P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n = q\}\Big) + P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n < q\}\Big). \tag{15}$$

De plus, l'inclusion, $\{S_n > q\} \subset \{M_n \geq q\}$, implique que,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n > q\}\Big) = P(S_n > q), \tag{16}$$

et l'inclusion $\{S_n = q\} \subset \{M_n \geq q\}$, implique que,

$$P\Big(\{M_n \geq q\} \cap \{S_n = q\}\Big) = P(S_n = q). \tag{17}$$

Ainsi, en combinant (15), (16), (17) et le résultat obtenu dans la question 6)b), on trouve l'égalité qu'on cherche à établir.

8) Supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est arbitraire et fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $q_n = -[-\alpha n^{1/2}]$, où $[-\alpha n^{1/2}]$ est la partie entière du réel $-\alpha n^{1/2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P\big(n^{-1/2} M_n \geq \alpha\big) = P(M_n \geq q_n).$$

Réponse : *Il est clair que* $P\big(n^{-1/2}M_n \geq \alpha\big) = P\big(-M_n \leq -\alpha n^{1/2}\big)$. *Par ailleurs étant donné que pour tout* $\omega \in \Omega$, *on a* $-M_n(\omega) \in \mathbb{Z}$, *il résulte de la définition de la partie entière, que :* $-M_n(\omega) \leq -\alpha n^{-1/2}$ *si et seulement si* $-M_n(\omega) \leq [-\alpha n^{-1/2}]$. *Par conséquent,*

$$P\big(-M_n \leq -\alpha n^{1/2}\big) = P\big(-M_n \leq [-\alpha n^{1/2}]\big) = P(M_n \geq q_n).$$

b) Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\liminf_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha+\eta\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha-\eta\big).$$

Réponse : *en utilisant la définition de* q_n, *on peut montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\alpha \leq n^{-1/2}q_n < \alpha + n^{-1/2}$ *; ainsi pour tout* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *vérifiant* $n \geq n_0$, *on a,*

$$\alpha - \eta \leq n^{-1/2}q_n \leq \alpha + \eta. \tag{18}$$

Il résulte de l'égalité $P(S_n > q_n) = P\big(n^{-1/2}S_n > n^{-1/2}q_n\big)$ *et de (18), que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *vérifiant* $n \geq n_0$, *on a,*

$$P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha + \eta\big) \leq P(S_n > q_n) \leq P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha - \eta\big).$$

Par conséquent,

$$\liminf_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha + \eta\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \tag{19}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}S_n > \alpha - \eta\big). \tag{20}$$

Finalement, en combinant (19) et (20) avec l'inégalité

$$\liminf_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P(S_n > q_n)\,,$$

on obtient le résultat qu'on cherche à établir.

c) Montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\limsup_{n\to+\infty} P(S_n = q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P\big(\alpha - \eta \leq n^{-1/2}S_n \leq \alpha + \eta\big).$$

Réponse : *cela résulte de (18) et de l'égalité* $P(S_n = q_n) = P\big(n^{-1/2}S_n = n^{-1/2}q_n\big)$.

9) a) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la variable aléatoire $n^{-1/2}S_n$ converge en loi vers $B(1)$ (on vous rappelle que la variable aléatoire $B(1)$ suit une loi normale centrée et réduite).

Réponse : *il suffit d'utiliser la définition de S_n et le Théorème de la limite centrale.*

b) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 7), 8) et 9)a), montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a,

$$\lim_{n\to+\infty} P\big(n^{-1/2}M_n \geq \alpha\big) = P\big(|B(1)| \geq \alpha\big).$$

Réponse : *Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les résultats obtenus dans les questions 8)b) et 9)a), on trouve que*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha+\eta}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha-\eta}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx.$$

En uilisant les résultats obtenus dans les questions 8)c) et 9)a), on trouve que

$$\limsup_{n\to+\infty} P(S_n = q_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Ainsi, en faisant tendre η vers 0, on a,

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n > q_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = P\big(B(1) \geq \alpha\big). \tag{21}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = q_n) = 0. \tag{22}$$

Le résultat obtenu dans la question 7), (21) et (22) impliquent que,

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n \geq q_n) = 2P\big(B(1) \geq \alpha\big) = P\big(|B(1)| \geq \alpha\big). \tag{23}$$

Enfin, en combinant (23) avec le résultat obtenu à la question 8)a), on peut fini notre preuve.

c) Rappelons que si $U : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ est une variable aléatoire, F_U la fonction de répartition associée à U, est définie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, par $F_U(\alpha) = P(U \leq \alpha)$. Désignons par $F_{n^{-1/2}M_n}$ et $F_{|B(1)|}$ les fonctions de répartition associées respectivement aux variables aléatoires $n^{-1/2}M_n$ et $|B(1)|$. En utilisant le résultat obtenu dans la question 9)b), montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) = F_{|B(1)|}(\alpha).$$

Réponse : *étant donné que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|B(1,\omega)| \geq 0$ et $n^{-1/2}M_n(\omega) \geq 0$, l'égalité qu'on cherche à établir est vraie lorsque $\alpha < 0$. Désormais nous supposons que $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Etudions d'abord le cas où $\alpha = 0$. Supposons que $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ est arbitraire et fixé. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$F_{n^{-1/2}M_n}(0) \leq P(n^{-1/2}M_n < \eta)\,;$$

ainsi en utilisant le résultat obtenu dans la question 9)b), on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(0) \leq \lim_{n\to+\infty} P(n^{-1/2}M_n < \eta) = P\big(|B(1)| < \eta\big)$$

et ensuite, en faisant tendre η vers 0, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(0) = F_{|B(1)|}(0).$$

Etudions maintenant le cas où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, comme précédemment, supposons que $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ est abitraire et fixé. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(n^{-1/2}M_n < \alpha - \eta) \leq F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) \leq P(n^{-1/2}M_n < \alpha + \eta)\,;$$

ainsi en utilisant le résultat obtenu dans la question 9)b), et l'inégalité

$$\liminf_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) \leq \limsup_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha)\,,$$

on obtient

$$P\big(|B(1)| < \alpha - \eta\big) \leq \liminf_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) \leq \limsup_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) \leq P\big(|B(1)| < \alpha + \eta\big)\ ;$$

ensuite, en faisant tendre η vers 0, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{n^{-1/2}M_n}(\alpha) = F_{|B(1)|}(\alpha).$$

10) En utilisant les résultats obtenus dans les questions 4)b) et 9)c), montrer que l'égalité $(**)$ est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Réponse : *d'après le résultat obtenu dans la question 9)c), on sait que lorsque n tend vers $+\infty$, la variable aléatoire $n^{-1/2}M_n$ converge en loi vers la variable aléatoire $|B(1)|$; ainsi la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{n^{-1/2}M_n}$ converge faiblement vers la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{|B(1)|}$. On déduit alors du résultat obtenu dans la question 4)b) que $\mathbb{P}_{Y_1} = \mathbb{P}_{|B(1)|}$ et par conséquent que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$P(Y_1 > \alpha) = \mathbb{P}_{Y_1}\big(]\alpha, +\infty[\big) = \mathbb{P}_{|B(1)|}\big(]\alpha, +\infty[\big) = P(|B(1)| > \alpha).$$