Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Correction du devoir à la maison de Processus Stochastiques
Année 2012-2013

Partie I : Variables aléatoires réelles Symétriques α-Stables

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X, est notée par Φ_X ; rappelons que cette fonction est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par $\Phi_X(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})$. Soient $\alpha \in]0,2]$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$ deux paramètres. Dans les questions 1) à 5), on suppose que X est une variable aléatoire Symétrique α-Stable de paramètre d'échelle σ ($S\alpha S(\sigma)$ en abrégé) ; cela signifie que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'on a, $\Phi_X(\xi) = e^{-\sigma^\alpha |\xi|^\alpha}$ (par convention $0^b = 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$).

1) Que peut-on dire de X lorsque $\sigma = 0$? Par la suite, on suppose que $\sigma > 0$.

Lorsque $\sigma = 0$, l'on a $\Phi_X(\xi) = 1$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que la variable aléatoire X vaut zéro presque sûrement.

2) Que peut-on dire de X lorsque $\alpha = 2$?

Lorsque $\alpha = 2$, alors X est une variable aléatoire centrée de variance $2\sigma^2$.

3) Montrer que les variables aléatoires X et $-X$ sont de même loi.

On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_{-X}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i(-\xi)\cdot X}) = e^{-\sigma^\alpha |-\xi|^\alpha} = e^{-\sigma^\alpha |\xi|^\alpha} = \Phi_X(\xi)$. Cela prouve que les variables aléatoires X et $-X$ sont égales en loi.

4) Que peut-on dire de la variable aléatoire $Y = X/\sigma$?

On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_Y(\xi) = \mathbb{E}(e^{i(\sigma^{-1})\cdot \xi X}) = e^{-|\xi|^\alpha}$. La variable aléatoire Y est donc $S\alpha S(1)$.

5) On suppose que $\alpha \in]0,2[$. On admet, qu'il existe alors deux constantes $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$, ne dépendant pas de X, telles que les deux inégalités : $c_1 \sigma^\alpha \lambda^{-\alpha} \leq \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq c_2 \sigma^\alpha \lambda^{-\alpha}$, sont vérifiées, pour tout réel $\lambda \geq \sigma$.

a) Prouver que pour tout $\gamma \in]0,\alpha[$, on a $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) < +\infty$ et que $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) = \kappa(\alpha,\gamma)\sigma^\gamma$, où $\kappa(\alpha,\gamma)$ est une constante ne dépendant que de α et de γ.

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, désignons par $L_{|X|^\gamma}$ la loi de probabilité de la variable aléatoire $|X|^\gamma$. En utilisant, le Théorème de Fubini-Tonelli, on a, que les intégrales soient finies ou non,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) &= \int_0^{+\infty} x \, dL_{|X|^\gamma}(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^x dy \Big) \, dL_{|X|^\gamma}(x) \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\int_y^{+\infty} dL_{|X|^\gamma}(x) \Big) \, dy = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^\gamma \geq y) \, dy \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geq y^{1/\gamma}) \, dy. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\gamma \in]0, \alpha[$, il résulte de (1) et de l'inégalité $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq c_2 \sigma^\alpha \lambda^{-\alpha}$, pour tout réel $\lambda \geq \sigma$, que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) &\leq \int_0^{\sigma^\gamma} \mathbb{P}(|X| \geq y^{1/\gamma})\, dy + \int_{\sigma^\gamma}^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geq y^{1/\gamma})\, dy \\ &\leq \sigma^\gamma + c_2 \sigma^\alpha \int_{\sigma^\gamma}^{+\infty} y^{-\alpha/\gamma}\, dy < +\infty. \end{aligned}$$

Supposons que R est une variable aléatoire réelle arbitraire $S\alpha S(1)$. Pour tout $\gamma \in]0, \alpha[$, posons $\kappa(\alpha, \gamma) = \mathbb{E}\big(|R|^\gamma\big)$. D'après ce qui précède, nous savons que $\kappa(\alpha, \gamma) < +\infty$. Par ailleurs étant donné que les variables aléatoires R et X/σ sont de même loi, on a $\mathbb{E}\big(|X/\sigma|^\gamma\big) = \kappa(\alpha, \gamma)$, d'où $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) = \kappa(\alpha, \gamma)\sigma^\gamma$.

b) Prouver que pour tout $\gamma \in [\alpha, +\infty[$, on a $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) = +\infty$.

Lorsque $\gamma \in [\alpha, +\infty[$, il résulte de (1) et de l'inégalité $\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \geq c_1 \sigma^\alpha \lambda^{-\alpha}$, pour tout réel $\lambda \geq \sigma$, que,

$$\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) \geq \int_{\sigma^\gamma}^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geq y^{1/\gamma})\, dy \geq c_1 \sigma^\alpha \int_{\sigma^\gamma}^{+\infty} y^{-\alpha/\gamma}\, dy = +\infty.$$

6) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace de probabilité. Supposons qu'elles sont respectivement $S\alpha S(\sigma_1)$ et $S\alpha S(\sigma_2)$, que peut-on alors dire de la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_1+X_2}(\xi) = \Phi_{X_1}(\xi)\Phi_{X_2}(\xi) = e^{-(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\xi|^\alpha}$, ce qui montre que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est $S\alpha S\big((\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}\big)$.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par X_n une variable aléatoire réelle $S\alpha S(\sigma_n)$. Supposons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle X. Que peut-on dire de X ?

On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(\xi) = \lim_{n\to+\infty} e^{-\sigma_n^\alpha |\xi|^\alpha}$. D'où $\Phi_X(1) = \lim_{n\to+\infty} e^{-\sigma_n^\alpha}$. A priori, deux cas sont envigeables : $\Phi_X(1) = 0$ et $\Phi_X(1) \in]0, 1]$. Dans le premier cas l'on a $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$, cela implique que $\Phi_X(0) = 1$ et $\Phi_X(\xi) = 0$ si $\xi \neq 0$, ce qui est impossible parce que Φ_X est une fonction continue. Dans le deuxième cas l'on a $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \big(-\ln(\Phi_X(1))\big)^{1/\alpha}$, d'où $\Phi_X(\xi) = e^{-(-\ln(\Phi_X(1)))|\xi|^\alpha}$, c'est-à-dire que X est une variable aléatoire $S\alpha S\big(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n\big)$.

8) On suppose que $\alpha \in]0, 2[$ et on désigne par $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles $S\alpha S(1)$, définies sur un même espace de probabilité et mutuellement indépendantes. Est-il possible que la variable aléatoire $\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle, lorsque l'entier N tend vers $+\infty$?

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, posons $R_N = \frac{Y_1 + \ldots + Y_N}{N^{1/\alpha}}$. On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{R_N}(\xi) = \Phi_{Y_1+\ldots+Y_N}(N^{-1/\alpha}\xi) = \prod_{n=1}^{N} \Phi_{Y_n}(N^{-1/\alpha}\xi) = e^{-N|N^{-1/\alpha}\xi|^\alpha} = e^{-|\xi|^\alpha} \ ; \tag{2}$$

de plus,

$$\Phi_{\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}}(\xi) = \Phi_{R_N}(N^{1/\alpha - 1/2}\xi). \tag{3}$$

Ainsi, en combinant (2) et (3), on obtient,

$$\Phi_{\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}}(\xi) = e^{-N^{1-\alpha/2}|\xi|^\alpha}.$$

D'où

$$\lim_{N \to +\infty} \Phi_{\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}}(\xi) = \begin{cases} 1, \textit{si } \xi = 0, \\ 0, \textit{sinon.} \end{cases}$$

Cette dernière limite est une fonction discontinue, donc elle ne peut être une fonction caractéristique. Ainsi, la variable aléatoire $\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}$ ne peut converger en loi vers une variable aléatoire réelle, lorsque l'entier N tend vers $+\infty$.

Partie II : Intégrale stochastique par rapport au Processus de Lévy $S\alpha S$

Dans toute cette partie le paramètre α appartient à $]0, 2]$.
1) Au moyen du Théorème de consistance de Kolmogorov, établir l'existence d'un processus stochastique $\{Z'(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles, vérifant les deux propriétés suivantes : (i) $Z'(0) = 0$ presque sûrement ; (ii) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tous réels $t_0 = 0 \leq t_1 \ldots \leq t_k$, les variables aléatoires $Z'(t_n) - Z'(t_{n-1})$, $n \in \{1, \ldots, k\}$ sont mutuellement indépendantes et $S\alpha S\big((t_n - t_{n-1})^{1/\alpha}\big)$ respectivement.

D'après le cours, nous savons construire un espace de probabilité, que l'on note ici par $(\check{\Omega}, \check{\mathcal{B}}, \check{P})$, et une suite de variables aléatoires réelles, notée ici par $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, définies sur cet espace, mutuellement indépendantes et de même loi. Etant donné qu'il n'y a pas de restriction sur le choix de cette loi, désormais, nous supposons que les ϵ_n sont $S\alpha S(1)$. Désignons par $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B})$ l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de la σ-algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par les cylindres. Notre objectif est maintenant de définir une mesure de probabilité convenable sur $\mathcal{B}$, que l'on notera par $\widetilde{P}$. Commençons d'abord, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$ fixés, par définir une mesure de probabilité, que l'on note par $\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}$, sur la σ-algèbre $\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_k}$[1], constituée par les cylindres $\mathcal{C}$ de la forme,

$$\mathcal{C} = \big\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : (\widetilde{\omega}(t_1), \ldots, \widetilde{\omega}(t_k)) \in A\big\}, \tag{4}$$

où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, la σ-algèbre des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}^k$. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_k$, les variables aléatoires $S\alpha S(t_n)$ définies sur $\check{\Omega}$ par $\eta_1 = t_1\epsilon_1$ et $\eta_n = (t_n - t_{n-1})\epsilon_n + \eta_{n-1}$ pour tout

[1] Etant donné que pour toute permutation π de $\{1, \ldots, k\}$, on a $\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_k} = \mathcal{B}_{t_{\pi(1)},\ldots,t_{\pi(k)}}$, il n'est pas restrictif de supposer que la suite $(t_n)_{1 \leq n \leq k}$ est croissante.

$n \in \{2,\ldots,k\}$. Notons que lorsque $t_1 = 0$, l'on a $\eta_1 = 0$ presque sûrement. Notons aussi que les variables aléatoires $\eta_n - \eta_{n-1}$, $n \in \{1,\ldots,k\}$ [2] *sont mutuellement indépendantes et $S\alpha S\big((t_n - t_{n-1})^{1/\alpha}\big)$ respectivement. Désignons par $\mathbb{P}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}$ la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(\eta_1,\ldots,\eta_k)$, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,*

$$\mathbb{P}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}(A) = \check{P}\big(\{\check{\omega} \in \check{\Omega} : (\eta_1(\check{\omega}),\ldots,\eta_k(\check{\omega})) \in A\}\big). \tag{5}$$

La mesure de probabilité $\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}$ est définie, pour tout cylindre $\mathcal{C}$ de la forme (4), par

$$\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}(\mathcal{C}) = \mathbb{P}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}(A). \tag{6}$$

Montrons maintenant que les mesures de probabilité $\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}$, où l'entier $k \geq 1$ et les réels $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$ sont arbitraires, vérifient les deux conditions de consistance de Kolmogorov. La condition (a) est satisfaite, car si π est une permutation de $\{1,\ldots,k\}$, telle que $t_{\pi(1)} \leq \ldots \leq t_{\pi(k)}$, on a alors pour tout $n \in \{1,\ldots,k\}$, $t_{\pi(n)} = t_n$. La condition (b) est satisfaite également, car, pour tout entier $k \geq 1$ et tous réels $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t_{k+1}$, on a,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k,t_{k+1}}(\mathcal{C}) &= \mathbb{P}_{\eta_1,\ldots,\eta_k,\eta_{k+1}}(A \times \mathbb{R}) = \check{P}\big(\{\check{\omega} \in \check{\Omega} : (\eta_1(\check{\omega}),\ldots,\eta_k(\check{\omega}),\eta_{k+1}(\check{\omega})) \in A \times \mathbb{R}\}\big)\\ &= \check{P}\big(\{\check{\omega} \in \check{\Omega} : (\eta_1(\check{\omega}),\ldots,\eta_k(\check{\omega})) \in A\}\big) = \mathbb{P}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}(A) = \widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}(\mathcal{C})\ ;\end{aligned}$$

bien sûr, la variable aléatoire η_{k+1} est définie par $\eta_{k+1} = (t_{k+1} - t_k)\epsilon_{k+1} + \eta_k$. On peut donc appliquer le Théorème de consistance de Kolmogorov, aux mesures de probabilité $\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}$, et ce théorème nous donne l'existence d'une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\mathcal{B}$, dont la restriction à chacune des σ-algèbres $\mathcal{B}_{t_1,\ldots,t_k}$, coïncide avec $\widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}$. Supposons maintenant que $\{\widetilde{Z}(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est le processus canonique défini sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+},\mathcal{B},\widetilde{P})$, c'est-à-dire que $\widetilde{Z}(t,\widetilde{\omega}) = \widetilde{\omega}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous réels $0 \leq t_1 \ldots \leq t_k$, et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$\big\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : (\widetilde{Z}(t_1,\widetilde{\omega}),\ldots,\widetilde{Z}(t_k,\widetilde{\omega})) \in A\big\} = \big\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : (\widetilde{\omega}(t_1),\ldots,\widetilde{\omega}(t_k)) \in A\big\} = \mathcal{C}\ ;$$

par conséquent,

$$\widetilde{P}\big(\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : (\widetilde{Z}(t_1,\widetilde{\omega}),\ldots,\widetilde{Z}(t_k,\widetilde{\omega})) \in A\}\big) = \widetilde{P}_{t_1,\ldots,t_k}(\mathcal{C}). \tag{7}$$

Désignons par $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}(t_1),\ldots,\widetilde{Z}(t_k)}$ la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(\widetilde{Z}(t_1),\ldots,\widetilde{Z}(t_k))$, c'est-à-dire la mesure de probabilité définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, par,

$$\mathbb{P}_{\widetilde{Z}(t_1),\ldots,\widetilde{Z}(t_k)}(A) = \widetilde{P}\big(\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : (\widetilde{Z}(t_1,\widetilde{\omega}),\ldots,\widetilde{Z}(t_k,\widetilde{\omega})) \in A\}\big). \tag{8}$$

Il résulte de (8), (7) et (6), que les vecteurs aléatoires $(\widetilde{Z}(t_1),\ldots,\widetilde{Z}(t_k))$ et $(\eta_1,\ldots,\eta_k)$ sont égaux en loi. Maintenant posons $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ et $P = \widetilde{P} \otimes \widetilde{P}$. Désignons alors par $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, le processus stochastique défini sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$, par $Z'(t,\widetilde{\omega}',\widetilde{\omega}'') = \widetilde{Z}(t,\widetilde{\omega}')$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $(\widetilde{\omega}',\widetilde{\omega}'') \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. On peut facilement vérifier

[2] Par convention, $t_0 = 0$ et la variable aléatoire η_0 vaut 0 presque sûrement.

que les processus $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}+}$ et $\{\widetilde{Z}(t)\}_{t\in\mathbb{R}+}$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles.

2) On désigne par $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique défini sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$ que $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; de plus on suppose que ces deux processus sont indépendants et possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles.

Signalons, au passage, qu'une façon simple de construire un tel processus $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, consiste à poser $Z''(t,\widetilde{\omega}',\widetilde{\omega}'')=\widetilde{Z}(t,\widetilde{\omega}'')$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et $(\widetilde{\omega}',\widetilde{\omega}'')\in\Omega$.

On note alors, par $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ le processus stochastique tel que $Z(t)=Z'(t)$ lorsque $t\in\mathbb{R}_+$ et $Z(t)=Z''(-t)$ sinon ; on appelle $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ le Processus de Lévy $S\alpha S$. Dans le reste de cette partie, notre objectif est de définir une intégrale stochastique par rapport à $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, cette intégrale est notée par $I(\cdot)$.

a) Soient deux réels arbitraires $u'\le u''$, on désigne par $\mathbf{1}_{]u',u'']}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $]u',u'']$ et on pose $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})=Z(u'')-Z(u')$. Montrer que $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big((u''-u')^{1/\alpha}\big)$.

Lorsque $0\le u'\le u''$, on a alors $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})=Z'(u'')-Z'(u')$, ainsi il résulte de II-1), que $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big((u''-u')^{1/\alpha}\big)$. Lorsque $u'\le u''<0$, on a alors $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})=-\big(Z''(-u')-Z''(-u'')\big)$, ainsi il résulte de la définition de $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, de II-1) et I-3), que $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big((u''-u')^{1/\alpha}\big)$. Lorsque $u'<0\le u''$, on a, $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})=Z'(u'')-Z''(-u')$; ainsi, étant donné que $Z'(u'')$ et $-Z''(-u')$ sont deux variables aléatoires indépendantes, respectivement $S\alpha S\big((u'')^{1/\alpha}\big)$ et $S\alpha S\big((-u')^{1/\alpha}\big)$, il résulte de I-6), que $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big((u''-u')^{1/\alpha}\big)$.

b) Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier, c'est-à-dire une fonction de la forme $h=\sum_{n=0}^{N-1}\beta_n\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]}$, où $N\in\mathbb{N}^*$, $(\beta_n)_{0\le n<N}$ est une suite finie de réels, et $(u_n)_{0\le n\le N}$ est une suite finie strictement croissante de réels. On pose $I(h)=\sum_{n=0}^{N-1}\beta_n I(\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]})$. Montrer que $I(h)$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big(\|h\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}\big)$, où $\|h\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}=\big(\int_{\mathbb{R}}|h(x)|^\alpha\,dx\big)^{1/\alpha}$.

Montrons d'abord que la définition de $I(h)$ a un sens, autrement dit, lorsque

$$h=\sum_{n=0}^{N-1}\beta_n\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]}=\sum_{k=0}^{K-1}\theta_k\mathbf{1}_{]v_k,v_{k+1}]},\tag{9}$$

où : $N\in\mathbb{N}^*$ et $K\in\mathbb{N}^*$, $(\beta_n)_{0\le n<N}$ et $(\theta_k)_{0\le k<K}$ sont deux suites finies de réels, $(u_n)_{0\le n\le N}$ et $(v_k)_{0\le k\le K}$ sont deux suites finies strictement croissantes de réels ; on a alors,

$$I(h)=\sum_{n=0}^{N-1}\beta_n\big(Z(u_{n+1})-Z(u_n)\big)=\sum_{k=0}^{K-1}\theta_k\big(Z(v_{k+1})-Z(u_k)\big).\tag{10}$$

Désignons par $L+1$, le nombre des éléments distincts de l'ensemble $\{u_n:0\le n\le N\}\cup\{v_k:0\le k\le K\}$. On a forcément $L\ge\max\{N,K\}$, de plus, on peut voir cet ensemble, comme *une suite finie strictement croissante notée par* $(r_l)_{0\le l\le L}$. *Soit* $\phi : \{0,\dots,N\} \to \{0,\dots,L\}$, *l'unique application strictement croissante telle que pour tout* $n \in \{0,\dots,N\}$, *on a*

$$r_{\phi(n)} = u_n. \tag{11}$$

Soit $\psi : \{0,\dots,K\} \to \{0,\dots,L\}$, *l'unique application strictement croissante telle que pour tout* $k \in \{0,\dots,K\}$, *on a*

$$r_{\psi(k)} = v_k. \tag{12}$$

Il résulte de (9), que,

$$h = \sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \mathbf{1}_{]r_l, r_{l+1}]},$$

où $(\lambda_l)_{0\le l<L}$ *est une suite finie de réels, vérifiant,*

$$\lambda_l = 0, \textit{lorsque } l \notin \{\phi(0), \phi(0)+1, \dots \phi(N)-1\} \cap \{\psi(0), \psi(0)+1, \dots, \psi(K)-1\}, \tag{13}$$

$$\lambda_{\phi(n)+q} = \beta_n, \textit{pour tout } n \in \{0,\dots,N-1\} \textit{ et } q \in \{0,\dots,\phi(n+1)-\phi(n)-1\} \tag{14}$$

et

$$\lambda_{\psi(k)+p} = \theta_k, \textit{pour tout } k \in \{0,\dots,K-1\} \textit{ et } p \in \{0,\dots,\psi(k+1)-\psi(k)-1\}. \tag{15}$$

Pour établir (10), il suffit de prouver que,

$$\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \big(Z(r_{l+1}) - Z(r_l)\big) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \big(Z(u_{n+1}) - Z(u_n)\big) \tag{16}$$

et que

$$\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \big(Z(r_{l+1}) - Z(r_l)\big) = \sum_{k=0}^{K-1} \theta_k \big(Z(v_{k+1}) - Z(u_k)\big). \tag{17}$$

Nous donnerons uniquement la preuve de (16) car celle de (17) est analogue. En utilisant (13), (14) et (11), on obtient,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{L-1} \lambda_l \big(Z(r_{l+1}) - Z(r_l)\big) &= \sum_{l=\phi(0)}^{\phi(N)-1} \lambda_l \big(Z(r_{l+1}) - Z(r_l)\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{\phi(n+1)-\phi(n)-1} \lambda_{\phi(n)+q} \big(Z(r_{\phi(n)+q+1}) - Z(r_{\phi(n)+q})\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \sum_{q=0}^{\phi(n+1)-\phi(n)-1} \big(Z(r_{\phi(n)+q+1}) - Z(r_{\phi(n)+q})\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \big(Z(r_{\phi(n+1)}) - Z(r_{\phi(n)})\big) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \big(Z(u_{n+1}) - Z(u_n)\big).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $I(h)$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big(\|h\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}\big)$. Soit

$$M = \min\big\{n \in \{0, \ldots, N\} : u_n \geq 0\big\},$$

avec la convention que $M = N+1$ lorsque $\big\{n \in \{0, \ldots, N\} : u_n \geq 0\big\} = \emptyset$. Nous posons $\beta_{-1} = \beta_N = u_{-1} = u_{N+1} = 0$. Par ailleurs, nous supposons systématiquement que $\sum_{n=p}^{q} \cdots = 0$, pour tous entiers relatifs $p > q$. On a, en utilisant la définition de M, celle de $I(h)$, celle de $I(\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]})$, et celle du processus $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} I(h) &= \sum_{n=0}^{M-1} \beta_n I(\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]}) + \sum_{n=M}^{N-1} \beta_n I(\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]}) \\ &= \sum_{n=0}^{M-2} \beta_n \big(Z''(-u_{n+1}) - Z''(-u_n)\big) + \beta_{M-1}\big(Z'(u_M) - Z''(-u_{M-1})\big) + \sum_{n=M}^{N-1} \beta_n \big(Z'(u_{n+1}) - Z'(u_n)\big) \\ &= I_-(h) + I_+(h), \end{aligned} \tag{18}$$

où $I_-(h)$ et $I_+(h)$ sont les deux variables aléatoires réelles définies par,

$$I_-(h) = -\sum_{n=0}^{M-2} \beta_n \big(Z''(-u_n) - Z''(-u_{n+1})\big) - \beta_{M-1} Z''(-u_{M-1}) \tag{19}$$

et

$$I_+(h) = \beta_{M-1} Z'(u_M) + \sum_{n=M}^{N-1} \beta_n \big(Z'(u_{n+1}) - Z'(u_n)\big)\ ; \tag{20}$$

notons que ces deux variables aléatoires sont indépendantes, car les processus $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont indépendants. Montrons maintenant que $I_-(h)$ et $I_+(h)$ sont $S\alpha S$, de paramètres d'échelle, respectivement,

$$\Big(\sum_{n=0}^{M-2} |\beta_n|^\alpha (u_{n+1} - u_n) + |\beta_{M-1}|^\alpha (-u_{M-1})\Big)^{1/\alpha}$$

et

$$\Big(|\beta_{M-1}|^\alpha u_M + \sum_{n=M}^{N-1} |\beta_n|^\alpha (u_{n+1} - u_n)\Big)^{1/\alpha}.$$

Nous donnerons la démonstration uniquement pour $I_-(h)$; celle pour $I_+(h)$ étant assez semblable. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur M. Lorsque $M = 0$, alors $I_-(h)$ est la variable aléatoire nulle, ce qui revient à dire qu'elle est $S\alpha S(0)$. Lorsque $M = 1$, alors $I_-(h) = -\beta_0 Z''(-u_0)$, ainsi il résulte de la définition de $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et de II-1), que $I_-(h)$ est $S\alpha S\big(|\beta_0|(-u_0)^{1/\alpha}\big)$. Supposons désormais que $M \geq 2$. Remarquons alors que

$$I_-(h) = I_-^1(h) - \beta_0\big(Z''(-u_0) - Z''(-u_1)\big), \tag{21}$$

où

$$I_{-}^{1}(h) = -\sum_{n=1}^{M-2} \beta_n\big(Z''(-u_n) - Z''(-u_{n+1})\big) - \beta_{M-1}Z''(u_{M-1}).$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence que $I_{-}^{1}(h)$ est une variable aléatoire $S\alpha S$, de paramètre d'échelle,

$$\Big(\sum_{n=1}^{M-2} |\beta_n|^{\alpha}(u_{n+1} - u_n) + |\beta_{M-1}|^{\alpha}(-u_{M-1})\Big)^{1/\alpha} \;;$$

par ailleurs, il résulte de la définition de $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, de II-1) et de I-3), que la variable aléatoire $-\beta_0\big(Z''(-u_0) - Z''(-u_1)\big)$ est $S\alpha S$, de paramètre, $|\beta_0|(u_1 - u_0)^{1/\alpha}$. De plus, grâce à la définition $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et à II-1), on peut montrer que les variables aléatoires $I_{-}^{1}(h)$ et $-\beta_0\big(Z''(-u_0) - Z''(-u_1)\big)$ sont indépendantes. Ainsi, au moyen de (21) et I-6), on obtient, pour $I_{-}(h)$ le résultat qu'on cherchait à établir. Finalement, en utilisant ce résultat, de même que le résultat analogue pour $I_{+}(h)$, l'indépendance de $I_{-}(h)$ et $I_{+}(h)$, (18), et I-6), on trouve que la variable aléatoire $I(h)$, est $S\alpha S$, de paramètre d'échelle,

$$\Big(\sum_{n=0}^{N-1} |\beta_n|^{\alpha}(u_{n+1} - u_n)\Big)^{1/\alpha} = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} \int_{u_n}^{u_{n+1}} |h(x)|^{\alpha}\,dx\Big)^{1/\alpha} = \Big(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^{\alpha}\,dx\Big)^{1/\alpha}.$$

3) Il convient maintenant de faire quelques rappels sur les espaces L^p. Pour tout réel $p > 0$, on désigne par $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue mesurables (resp. des variables aléatoires réelles Y définies sur Ω) vérifiant $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx < +\infty$ (resp. $\mathbb{E}(|Y|^p) < +\infty$) ; on pose $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}$ (resp. $\|Y\|_{L^p(\Omega)} = \big(\mathbb{E}(|Y|^p)\big)^{1/p}$). Lorsque $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$) est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), pour laquelle cet espace est un espace de Banach. Lorsque $p \in]0,1[$, alors l'application $\Delta_{L^p(\mathbb{R})} : L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ (resp. $\Delta_{L^p(\Omega)} : L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\Omega) \to \mathbb{R}_+$) définie par $\Delta_{L^p(\mathbb{R})}(f_1, f_2) = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|^p\,dx$ (resp. $\Delta_{L^p(\Omega)}(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}|Y_1 - Y_2|^p$) est une distance sur $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), pour laquelle cet espace est complet. Signalons enfin, que les fonctions en escalier forment un sous-espace vectoriel dense dans $L^p(\mathbb{R})$, au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ lorsque $p \in [1, +\infty[$, ou bien au sens de la distance $\Delta_{L^p(\mathbb{R})}$ quand $p \in]0,1[$.

a) Soit $f \in L^{\alpha}(\mathbb{R})$, on désigne par $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^{\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\gamma \in]0, \alpha[$, $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^{\gamma}(\Omega)$.

Montrons d'abord que I est une application linéaire sur $\mathcal{S}$, l'espace vectoriel des fonctions en escalier. Soient $h' = \sum_{n'=0}^{N'-1} \beta'_{n'} I(\mathbf{1}_{]u'_{n'}, u'_{n'+1}]})$ et $h'' = \sum_{n''=0}^{N''-1} \beta''_{n''} I(\mathbf{1}_{]u''_{n''}, u''_{n''+1}]})$ deux fonctions en escalier ; désignons par $K+1$, le nombre des éléments distincts de l'ensemble $\{u'_{n'} : 0 \le n' \le N'\} \cup \{u''_{n''} : 0 \le n'' \le N''\}$. On a forcément $K \ge \max\{N', N''\}$, de plus, on peut voir cet ensemble, comme une suite finie strictement croissante notée par $(v_k)_{0\le k\le K}$. Les fonctions h' et h'' peuvent s'écrire sous la forme :

$$h' = \sum_{k=0}^{K-1} \theta'_k \mathbf{1}_{]v_k, v_{k+1}]} \quad \textit{et} \quad h'' = \sum_{k=0}^{K-1} \theta''_k \mathbf{1}_{]v_k, v_{k+1}]},$$

où $(\theta'_k)_{0\leq k<K}$ et $(\theta''_k)_{0\leq k<K}$ sont deux suites finies de réels. Ainsi, pour tous $\mu', \mu'' \in \mathbb{R}$, la fonction en escalier $\mu' h' + \mu'' h''$, s'écrit sous la forme,

$$\mu' h' + \mu'' h'' = \sum_{k=0}^{K-1} (\mu'\theta'_k + \mu''\theta''_k)\mathbf{1}_{]v_k, v_{k+1}]}.$$

On obtient alors en utilisant la définition de l'intégrale stochastique I, pour les fonctions en escalier,

$$\begin{aligned}
I(\mu' h' + \mu'' h'') &= \sum_{k=0}^{K-1} (\mu'\theta'_k + \mu''\theta''_k)\big(Z(v_{k+1}) - Z(v_k)\big) \\
&= \mu' \sum_{k=0}^{K-1} \theta'_k\big(Z(v_{k+1}) - Z(v_k)\big) + \mu'' \sum_{k=0}^{K-1} \theta''_k\big(Z(v_{k+1}) - Z(v_k)\big) = \mu' I(h') + \mu'' I(h'').
\end{aligned}$$

Maintenant, on considère $f \in L^\alpha(\mathbb{R})$ et on désigne par $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^\alpha(\mathbb{R})$; montrons que pour tout $\gamma \in]0, \alpha[$, $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\gamma(\Omega)$. $I(h_{k'} - h_{k''})$ est une variable aléatoire $S\alpha S$ dont on note le paramètre d'échelle par $\sigma_{I(h_{k'}-h_{k''})}$. La linéarité de $I(\cdot)$, I-5)a) et II-2)b), impliquent que, pour tous $k', k'' \in \mathbb{N}$, on a,

$$\mathbb{E}\big(|I(h_{k'}) - I(h_{k''})|^\gamma\big) = \mathbb{E}\big(|I(h_{k'} - h_{k''})|^\gamma\big) = \kappa(\alpha,\gamma)\sigma^\gamma_{I(h_{k'}-h_{k''})} = \kappa(\alpha,\gamma)\|h_{k'} - h_{k''}\|^\gamma_{L^\alpha(\mathbb{R})}. \quad (22)$$

Ainsi, $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\gamma(\Omega)$, car $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\alpha(\mathbb{R})$.

b) Montrer que la suite $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $S\alpha S\big(\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}\big)$, notée par $I(f)$, qui ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escalier $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Etant donné que l'epace $L^\gamma(\Omega)$ est complet, la suite $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, dans cet espace vers une variable aléatoire notée par $I(f)$. Montrons que cette dernière, ne dépend pas du choix de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous désignons par $(h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^\alpha(\mathbb{R})$, et nous notons par $I'(f)$ la limite dans $L^\gamma(\Omega)$ de la suite $\big(I(h'_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$. De façon analogue à (22), on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a,

$$\mathbb{E}\big(|I(h_k) - I(h'_k)|^\gamma\big) = \kappa(\alpha,\gamma)\|h_k - h'_k\|^\gamma_{L^\alpha(\mathbb{R})}.$$

On a donc,

$$\mathbb{E}\big(|I(f) - I'(f)|^\gamma\big) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}\big(|I(h_k) - I(h'_k)|^\gamma\big) = \kappa(\alpha,\gamma) \lim_{k\to+\infty} \|h_k - h'_k\|^\gamma_{L^\alpha(\mathbb{R})} = 0,$$

ce qui montre que $I(f) = I'(f)$ presque sûrement.

Sachant que la suite $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $I(f)$ dans $L^\gamma(\Omega)$, grâce à l'inégalité de Markov cette convergence à également lieu en probabilité, et donc en loi. Ainsi, Il résulte *de I-7) et de II-2)b), que $I(f)$ est une variable aléatoire $S\alpha S$, dont le paramètre d'échelle vaut* $\lim_{k\to+\infty} \|h_k\|_{L^\alpha(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}$.

c) Prouver que I est une application linéaire de $L^\alpha(\mathbb{R})$ dans $L^\gamma(\Omega)$, où $\gamma \in]0,\alpha[$ est arbitraire.

Soient f' et f'' deux fonctions arbitraires de $L^\alpha(\mathbb{R})$; désignons par $(h'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(h''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier qui convergent respectivement vers f' et f'', dans cet espace. Ainsi pour tous réels μ' et μ'', la suite de fonctions en escalier $(\mu' h'_k + \mu'' h''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction $\mu' f' + \mu'' f''$ dans $L^\alpha(\mathbb{R})$. Il résulte alors de II-3)b) et de la linéarité de $I(\cdot)$ sur l'espace $\mathcal{S}$ des fonctions en escalier, que l'on a,

$$I(\mu' f' + \mu'' f'') = \lim_{k\to+\infty} I(\mu' h'_k + \mu'' h''_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu' I(h'_k) + \mu'' I(h''_k) = \mu' I(f') + \mu'' I(f''),$$

où les limites sont à comprendre au sens de la convergence dans $L^\alpha(\mathbb{R})$.

Partie III : Mouvement Fractionnaire Stable Linéaire (MFSL)

Dans toute cette partie, sauf indication supplémentaire, le paramètre α appartient à $]0,2]$. $H \in]0,1[$ désigne un autre paramètre[3]. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on suppose que $(x)_+^{H-1/\alpha} = x^{H-1/\alpha}$ lorsque $x > 0$, et $(x)_+^{H-1/\alpha} = 0$ sinon. Pour tout réel s fixé, $K_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, désigne la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $K_s(t) = (s-t)_+^{H-1/\alpha} - (-t)_+^{H-1/\alpha}$.

1) Montrer que pour tout réel s fixé, la fonction K_s appartient à l'espace $L^\alpha(\mathbb{R})$. On note par $\{X(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$, le processus stochastique, appelé MFSL, défini pour tout $s \in \mathbb{R}$, par $X(s) = I(K_s)$.

Commençons d'abord par montrer que la fonction K_s appartient à $L^\alpha_{loc}(\mathbb{R})$ i.e. pour tout intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$, on a $\int_J |K_s(t)|^\alpha \, dt < +\infty$. Etant donné que $L^\alpha_{loc}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, il suffit de prouver que la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x)_+^{H-1/\alpha}$ y appartient. Notons que cette dernière fonction est continue[4] sur $\mathbb{R}^*$, ainsi $\int_J (x)_+^{\alpha(H-1/\alpha)} \, dx < +\infty$ lorsque $0 \notin J$. Dans le cas contraire, désignons par $b \geq 0$ la borne supérieure de J. On a alors, en utilisant, la définition de $(x)_+^{H-1/\alpha}$ et le fait que $-\alpha(H-1/\alpha) < 1$,

$$\int_J (x)_+^{\alpha(H-1/\alpha)} \, , dx = \int_0^b \frac{dx}{x^{-\alpha(H-1/\alpha)}} < +\infty.$$

Ayant établi que $K_s \in L^\alpha_{loc}(\mathbb{R})$, pour prouver que cette fonction appartient à $L^\alpha(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\int_{|t|>2|s|+2} |K_s(t)|^\alpha \, dt < +\infty$ i.e. (en posant $\tau = -t$),

$$\int_{2|s|+2}^{+\infty} \left| (s+\tau)^{H-1/\alpha} - (\tau)^{H-1/\alpha} \right|^\alpha d\tau < +\infty.$$

Il n'est pas difficile d'établir l'existence d'une contante $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$, telle que, pour tout $y \in [-2^{-1}, 2^{-1}]$, l'on a,

$$\left| (1+y)^{H-1/\alpha} - 1 \right|^\alpha \leq c|y|^\alpha.$$

[3] Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst, par référence à l'hydrologue Hurst.

[4] Elle est même continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, lorsque $H \in]1/\alpha, 1[$.

Grâce à cette inégalité et à l'inégalité $\alpha(1-H)+1>1$, on obtient,

$$\int_{2|s|+2}^{+\infty} \left|(s+\tau)^{H-1/\alpha}-(\tau)^{H-1/\alpha}\right|^{\alpha} d\tau = \int_{2|s|+2}^{+\infty} \tau^{\alpha H-1}\left|\left(1+s\tau^{-1}\right)^{H-1/\alpha}-1\right|^{\alpha} d\tau$$
$$\leq c_1|s|^{\alpha}\int_{2|s|+2}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^{\alpha(1-H)+1}}<+\infty.$$

2) Fixons $N\in\mathbb{N}^*$ et $s_1,\ldots,s_N\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_N\in\mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{N}\lambda_n X(s_n)$ est $S\alpha S$[5] et déterminer son paramètre d'échelle.

En utilisant la définition du processus $\{X(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ et la linéarité de $I(\cdot)$, l'on a,

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n X(s_n)=I\Big(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n K_{s_n}\Big)\ ;$$

ce qui signifie que la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{N}\lambda_n X(s_n)$ peut s'écrire comme l'intégrale stochastique, par rapport au Processus de Lévy $S\alpha S$, de la fonction $\sum_{n=1}^{N}\lambda_n K_{s_n}$. Il résulte alors de II-3)b) que cette variable aléatoire est $S\alpha S$ de paramètre d'échelle $\big\|\sum_{n=1}^{N}\lambda_n K_{s_n}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}$.

b) Prouver que pour tout réel $a>0$, $(X(as_1),\ldots,X(as_N))$ et $a^H(X(s_1),\ldots,X(s_N))$ sont deux vecteurs aléatoires égaux en loi[6].

Il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques associées à ces vesteurs aléatoires, sont égales en tout point de $\mathbb{R}^N$, i.e. pour tout $(\xi_1,\ldots,\xi_N)\in\mathbb{R}^N$, l'on a,

$$\mathbb{E}\left(\exp\Big(i\sum_{n=1}^{N}\xi_n X(as_n)\Big)\right)=\mathbb{E}\left(\exp\Big(ia^H\sum_{n=1}^{N}\xi_n X(s_n)\Big)\right). \tag{23}$$

D'après III-2)a), on sait que $\sum_{n=1}^{N}\xi_n X(as_n)$ et $a^H\sum_{n=1}^{N}\xi_n X(s_n)$ sont deux variables aléatoires $S\alpha S$ de paramètres d'échelle, respectivement, $\big\|\sum_{n=1}^{N}\xi K_{as_n}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}$ et $a^H\big\|\sum_{n=1}^{N}\xi K_{s_n}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}$. Ainsi établir (23), revient exactement à montrer que

$$\exp\Big(-\big\|\sum_{n=1}^{N}\xi K_{as_n}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}^{\alpha}\Big)=\exp\Big(-a^{\alpha H}\big\|\sum_{n=1}^{N}\xi K_{s_n}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}^{\alpha}\Big)$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}}\Big|\sum_{n=1}^{N}\xi_n\big((as_n-t)_+^{H-1/\alpha}-(-t)_+^{H-1/\alpha}\big)\Big|^{\alpha}dt=a^{\alpha H}\int_{\mathbb{R}}\Big|\sum_{n=1}^{N}\xi_n\big((s_n-t)_+^{H-1/\alpha}-(-t)_+^{H-1/\alpha}\big)\Big|^{\alpha}dt.$$

[5]Lorsqu'un processus vérifie cette propriété, alors on dit que ce processus est $S\alpha S$.

[6]Lorsqu'un processus stochastique vérifie cette propriété, on dit qu'il est H-auto-similaire.

Cette dernière égalité, peut facilement être obtenue, en faisant, dans son membre de gauche, le changement de variable $\tau = a^{-1}t$, puis en utilisant le fait que $(ax)_+^{H-1/\alpha} = a^{H-1/\alpha}(x)_+^{H-1/\alpha}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) On suppose que $\alpha > 1$ et $H \in]1/\alpha, 1[$. Montrer que le processus $\{X(s)\}_{s\in[0,1]}$ admet une modification dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre β, où $\beta \in]0, H - 1/\alpha[$ est arbitraire.

Notons d'abord, qu'il existe $\gamma_0 \in]1, \alpha[$, tel que $\beta < H - 1/\gamma_0$. Ainsi, pour prouver l'existence d'une modification du processus $\{X(s)\}_{s\in[0,1]}$ dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre β, grâce au Théorème de Kolmogorov-Čentsov, il suffit de montrer qu'il existe une constante $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$, telle que l'on a pour tous $s', s'' \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}\left(\left|X(s') - X(s'')\right|^{\gamma_0}\right) \leq c_0 |s' - s''|^{\gamma_0 H}. \tag{24}$$

Etant donné que $X(s') - X(s'')$ est une variable aléatoire réel $S\alpha S$ qui s'écrit sous la forme $X(s') - X(s'') = I\big(K_{s'} - K_{s''}\big)$, grâce à I-5)a) et II-3)b), nous savons que pour établir (24), il faut et il suffit de prouver qu'il existe une constante $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que l'on a pour tous $s', s'' \in [0,1]$,

$$\big\|K_{s'} - K_{s''}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}^\alpha \leq c_2 |s' - s''|^{\alpha H}.$$

Il n'est pas restrictif de supposer que $s' > s''$. En faisant, dans la première intégrale ci-dessous, le changement de variable $t = s'' + (s' - s'')\tau$, on obtient,

$$\begin{aligned}
&\big\|K_{s'} - K_{s''}\big\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}^\alpha = \int_{\mathbb{R}} \left|\big(s' - t\big)_+^{H-1/\alpha} - \big(s'' - t\big)_+^{H-1/\alpha}\right|^\alpha dt \\
&= (s' - s'') \int_{\mathbb{R}} \left|\big(s' - s'' - (s' - s'')\tau\big)_+^{H-1/\alpha} - \big(s'' - s'' - (s' - s'')\tau\big)_+^{H-1/\alpha}\right|^\alpha d\tau \\
&= (s' - s'')^{\alpha H} \int_{\mathbb{R}} \left|\big(1 - \tau\big)_+^{H-1/\alpha} - \big(-\tau\big)_+^{H-1/\alpha}\right|^\alpha d\tau.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de prendre

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\big(1 - \tau\big)_+^{H-1/\alpha} - \big(-\tau\big)_+^{H-1/\alpha}\right|^\alpha d\tau.$$